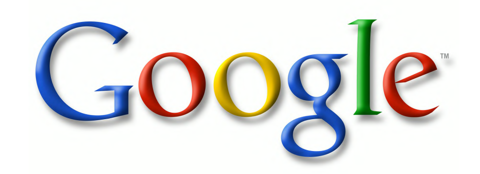
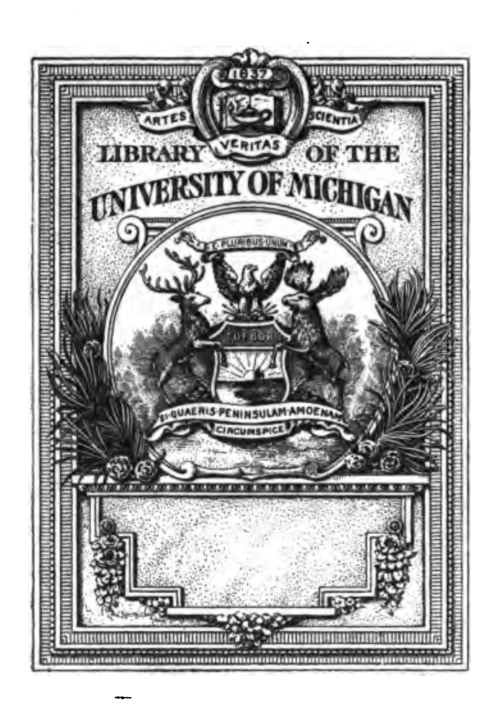



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

ANALYTISCHE

GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

MIT BESONDERER

BERÜCKSICHTIGUNG DER NEUEREN METHODEN.

NACH

GEORGE SALMON

FREI BEARBEITET

VON

DR. WILHELM FIEDLER,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNICUM ZU ZÜRICH.

FÜNFTE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

ZWEITER TEIL.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Inhaltsverzeichnis.

XIV. Kapitel. § 268—288. 32 Beisp.

Lineare Systeme von Kegelschnitten.

XV. Kapitel. § 289—301. 67 Beisp.

Projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte.

XVI. Kapitel. § 302—317. 87 Beisp.

Specielle homogene Gleichungsformen zweiten Grades.

XVII. Kapitel. § 318—336. 57 Beisp.

Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades.

XVIII. Kapitel. § 337—353. 22 Beisp.

Invariantentheorie der binären Formen.

XIX. Kapitel. § 354—378. 78 Beisp.

Invariantentheorie der Kegelschnitte.

XX. Kapitel. § 379—375. 25 Beisp.

Analytische Grundlagen der Metrik.

XXI. Kapitel. § 396—418. 72 Beisp.

Von den reciproken Verwandtschaften.

XXII. Kapitel. § 419--440. 54 Beisp.

Von der Methode der Projection.

Literatur-Nachweisungen und Nachträge.

Nachträge zum ersten Teil.

p. 344. Zl. 4 v. u. für die gleichseitige Hyperbel dem Halbmesser gleich.

Zum § 199 p. 355 will ich zu dem Satze $rr' = b'^2$, dafs das Rechteck der Brennstrahlen eines Punktes im Kegelschnitte dem Quadrat des dem seiner conjugirten Halbmesser gleich ist, noch folgendes hinzufügen. Nach § 191 ist die Normale des Punktes $n = bb' : a$ und somit $n^2 = b^2 b'^2 : a^2$; man erhält also durch Division $rr' : n^2 = a^2 : b^2$ für das Verhältnis vom Rechteck der Brennstrahlen zum Quadrat der Normale.

§ 201, p. 357. Für den Winkel φ der Normale zum Brennstrahl als den halben Winkel P im Dreieck FPF' erhält man aber leicht $\cos^2 \varphi = b^2 : rr' = b^2 : b'^2$ (vergl. § 201) und durch Verbindung mit dem vorigen $n^2 \cos^2 \varphi = b^4 : a^2 = p^2$ (§ 198). Für alle Kegelschnitte gilt also der Satz: *Die Projection der Normale auf den Brennstrahl ist dem Linearparameter gleich.* Ebenso folgt für die Länge der Normale bis zur Nebenaxe (§ 191) $n' = ab' : b$ durch dieselbe Verbindung $n' \cos \varphi = a$, *ihre Projection auf den Brennstrahl gleich der halben Hauptaxe* (vergl. § 203, 1). Und wenn für zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse von den Längen a_1, b_1 die halben Winkel der Brennstrahlen an ihren Endpunkten φ und ψ sind, so dafs man hat $a_1 \cos \varphi = b_1 \cos \psi = b$ oder $\tan^2 \varphi = \frac{a_1^2 - b^2}{b^2}$ und $\tan^2 \psi = \frac{b_1^2 - b^2}{b^2}$, so folgt wegen $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ auch $\tan^2 \varphi + \tan^2 \psi = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$ also constant; insbesondere für die Ellipse mit $c = b$ oder $2c^2 = a^2$ gleich Eins. Für die Scheitel der Nebenaxe ist $\psi = 0$, $\tan \varphi = 1$ bei dieser Ellipse. Für die gleichseitige *Hyperbel* $c^2 = 2a^2$, $e = \sqrt{2}$ und für die *Ellipse* $2c^2 = a^2$ (§ 170). $e = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist die Projection der Normale auf den Brennstrahl gleich $c\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ oder a resp. $\tfrac{1}{2}a$. Man vergleiche für diese Kegelschnitte meine Abh. in Bd. 5 der „Acta" § 31—34 u. die VIII. meiner „Geom. Mittheilungen" in der „Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellsch. zu Zürich" 1844 p. 352 f. u. p. 360 f. Die Abschnitte der Tangente und ihre Projectionen auf den Brennstrahl stehen natürlich in denselben Beziehungen zu dem confocalen Kegelschnitt durch denselben Punkt. Auch die Projectionen der Strecken bis zu den Directrixen verdienen Beachtung; sie sind natürlich den Brennstrahlen gleich (vergl. deshalb § 248). Die Projection des Krümmungsradius auf den Brennstrahl (§ 235) ist $\varrho \cos \varphi = b'^2 : a$, was zu $n \cos \varphi = b^2 : a$ zu halten.

p. 399 § 234 zum Ende des vorletzten Absatzes: In den imaginären Schnittpunkten mit den Directrixen ist er Null.

p. 402 B. 6) Daher (1) geht der Kreis durch die Fufspunkte von dreien der Normalen durch den diametral entgegengesetzten Punkt von dem der vierten. Bezeichnet man mit r_{ik} den zur Sehne ik für $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ parallelen Halbmesser des Kegelschnittes, so ist $r_{12}{}^2 + r_{34}{}^2 = a^2 + b^2$.

C. Kap. XIV—XVII. Projectivische Behandlung der Kegelschnitte.

67) § 268, p. 433. Vergl. Note 4 in Teil I.

68) § 273, p. 440. Vergl. *Poncelet's* „Traité des propriétés projectives des figures" 2. Ausg. Bd. 1, Nr. 48 f., 56 f. Dazu die Betrachtungen von *Chasles* im „Aperçu historique" chap. V, §§ 11—17, und §§ 365, 431 des Textes.

69) § 273, 3. p. 441. Vergl. meine „Geometrische Mittheilungen" VII in Bd. 29 der „Vierteljahrschrift der Züricher Naturf. Gesellsch." p. 343, insbes. p. 346 f.

70) § 278, 2, p. 446. Vergl. *Poncelet's* vorher genanntes Werk; Bd. 1, Art. 427.

71) § 280, p. 448. Der Satz von *Brianchon* steht zuerst im 13. Heft des „Journ. de l'école polyt." p. 301. Der besprochene Einwand ist von *Todhunter.*

72) § 284, p. 455. *Plücker* gab diesen Satz „Entwickel." Bd. 1, p. 240 und 257. Vergl. überhaupt den Schlussparagraph 10 daselbst.

73) § 285, p. 456. Der *Pascal'*sche Satz steht dem Inhalt nach in der Schrift von 1640: „Essais pour les Coniques". Bericht von *Leibniz* über den ihm vorgelegten geometrischen Nachlafs von *Pascal* in einem Briefe an *Perier* vom 30. Aug. 1676.

74) § 285, p. 456. Für eine Erweiterung desselben Beweisverfahrens und des Pascal'schen Satzes etc. vergl. *Lachlan's* Note in Bd. 15 des „Messenger of Mathematics" p. 155 f.

75) § 285, 2, p. 457. Der Beweis ward dem Verfasser unabhängig von de *Morgan* und *Burnside* mitgetheilt. Aus § 228 letzter Zusatz folgt, dafs die vier Kreise, welche den Dreiecken aus vier Geraden umgeschrieben sind, durch einen Punkt, den Brennpunkt der zugehörigen Parabel, gehen. Für fünf Gerade bewies *Miquel* (Catalan's „Théorèmes et Problèmes de Géomètrie élémentaire" p. 93), dafs die Brennpunkte der fünf Parabeln, welche sie zu vieren berühren, auf einem Kreise liegen. Die Kreise, die in solcher Art den sechs Fünfseiten aus sechs Geraden entsprechen, gehen durch einen Punkt, und aus den von sieben Geraden gebildeten Sechsseiten erhält man so sieben Punkte eines Kreises; etc. in inf. *Clifford* „Educat. Times" Dec. 1870, jetzt „Mathematical Papers by W. K. Clifford" p. 38—54.

76) § 285, 3, p. 457. Der Beweis in B. 3 ist von *Moore.*

77) § 286, p. 458. So sprach den Satz *Maclaurin* 1685 aus.

78) § 286, p. 465. *Steiner* lenkte die Aufmerksamkeit der Geometer auf die vollständige Figur des Pascal'schen Sechsecks in „Gergonne's Annal." Bd. 18, p. 319. 1827. „Werke" I, p. 450 f. Seine Sätze ergänzte *Plücker* „Crelle's Journ." Bd. 5, p. 268 (vergl. *Steiner* „System. Entwickel." p. 311); später haben *Hesse* ibid. Bd. 24, p. 40, Bd. 41,

p. 268; *Cayley* Bd. 41, p. 66; *Kirkmann* „Cambridge and Dublin Math. Journ.“ Bd. 5, p. 185 das System untersucht; sodann *Grossmann* „Crelle's Journ.“ Bd. 58, p. 174, *v. Staudt, Cayley* und *Hesse* (ibid. Bd. 62, p. 142, „Quarterly Journ.“ Bd. 9, p. 348 und „Crelle's Journ.“ Bd. 68, p. 193) neue Beiträge dazu gegeben. Siehe *Hesse's* „Vorlesungen a. d. analyt. Geom. d. Kreises u. d. g. Linie“, Leipzig 1865. Vorl. 10, u. *Steiner's* Vorlesungen „Theorie der Kegelschnitte“ *v. Schröter* (Leipzig 1867) p. 128 f. (1876 p. 126 f. u. 217 f.). *Cayley* leitete die Eigenschaften der Figur aus der Projection der Durchschnittslinien von sechs Ebenen ab; ebenso neuestens *Cremona* die sogleich zu erwähnenden neuen Ergebnisse von *Veronese* durch Projection der fünfzehn Geraden einer Fläche dritter Ordnung mit Doppelpunkt aus diesem (an dem sogleich anzuführenden Orte).

Die *Dualität zwischen den entdeckten Eigenschaften der Figur des vollständigen Pascal'schen Sechsecks* ist durch *Gius. Veronese* näher bestimmt worden in „Nuovi Teoremi sull' Hexagrammum Mysticum“ Bd. 1 der 3. Ser. der „Memor. della Classe di Scienze fisische, matemat. e naturali“ der R. Accademia dei Lincei (1877, 4. 61 p.) Die Untersuchungsmethode ist die der perspectivischen Dreiecke wie in § 287, 288 des Textes; sie wird erweitert in der Betrachtung der 27 Dreiecke, welche von dreimal drei Punkten A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 auf drei Geraden aus einem Punkte gebildet werden; diese Dreiecke bilden 36 Ternen und die Perspectiv-Axen jeder Terne gehen durch einen Punkt, die so erhaltenen 36 Punkte liegen zu vier in 27 Geraden; ferner für vier Dreiecke und vier Vierecke, welche das erste mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten, das dritte mit dem vierten und das vierte mit dem ersten perspectivisch liegen — wenn die vier Perspectivcentra der Dreiecke in einer Geraden sind, so gehen die Perspectiv-Axen durch einen Punkt und für die Vierecke liegen die vier aus ihren Dreiecken also entspringenden Punkte in einer Geraden; und aus zwei perspectivischen Dreiecken $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ wird durch die Ecken B_1C_2, B_2C_1 oder A_3, C_1A_2, C_2A_1 oder B_3 und A_1B_2, A_2B_1 oder C_3 ein drittes zu beiden perspectivisches Dreieck gebildet und gezeigt, dafs die drei Perspectivcentra in einer Geraden liegen.

Nach Ableitung der 10 conjugirten Paare der Steiner'schen Punkte G und der 60 den Pascal'schen Geraden p zugeordneten Kirkmann'schen Punkte H folgen die wichtigen Sätze: *Die 60 Geraden p und die 60 Punkte H bilden sechs Figuren π von je 10 Punkten H, die zu drei auf entsprechenden Geraden liegen, je 10 Paare entsprechender Elemente von sechs verschiedenen Polarsystemen.* Zwei dieser Figuren π haben vier Punkte G in einer Geraden j und die vier entsprechenden Geraden g aus einem Punkte J gemein; dazu sechs der 45 Punkte P, in denen sich die 15 Fundamentalgeraden in Paaren schneiden, welche zu drei in vier Geraden p liegen, die einzeln den vier übrigen Figuren π angehören und durch jene vier Punkte G gehen. Drei der Figuren π haben einen Punkt G und die entsprechende Gerade g gemein. Die 45 Punkte P bilden 15 Dreiecke Δ_{ik}, welche den 15 Paaren i, k der sechs Figuren π entsprechen; durch die Ecken von Δ_{ik} geht keine der Geraden g der Systeme i, k; die 30 Punkte P einer Figur π werden von den Ecken der Dreiecke Δ_{ik} der 10 Paare aus den fünf andern gebildet. Die 12 Geraden g durch die Ecken von Δ_{ik} schneiden sich 8 mal zu dreien in vier Punkten G und in vier Punkten H; jene liegen in den vier Geraden g, diese entsprechen vier Geraden p beider Figuren π. In zwei Figuren π giebt es zwei Vierseite aus Geraden p, deren Ecken Punkte H sind und deren Seiten sich paarweise in Punkten P des

Dreiecks Δ_{ik} der beiden Figuren und in Punkten G ihrer Geraden j begegnen; die 12 Ecken derselben liegen in Paaren auf sechs Geraden v_{12}, welche paarweis durch die Ecken des Dreiecks Δ_{ik} gehen und mit seinen Seiten harmonische Gruppen bilden, so dafs alle sechs in vier Punkten Z_2 zu dreien zusammentreffen; es giebt 90 solche Geraden und durch jeden Punkt H gehen drei von ihnen; der Punkte Z_2 sind 60 und in jeder Geraden v_{12} liegen zwei. Die vier Punkte G einer Geraden j und die Schnittpunkte Y derselben mit zwei Seiten des Dreiecks Δ_{ik} der zugehörigen Figuren π bilden eine Involution. Drei Punkte Z_2, welche den Geraden p eines Punktes G entsprechen, liegen in einer Geraden g; die vier Geraden g zweier Figuren π und zwei der Geraden aus ihrem Punkte J nach Ecken des gemeinsamen Dreiecks Δ_{ik} bilden drei Paare einer Involution. Zwei Figuren π enthalten zwei Vierecke von Punkten H paarweis in vier Geraden g aus dem zugehörigen Punkte J, und die Perspectiv-Axen ihrer Dreieckspaare sind die Linien p, welche in den vier andern Systemen π durch die ersten bestimmt werden. Ihre Polaren in den beiden Figuren π begegnen sich paarweis in den vier Punkten G der Geraden j derselben und in den vier Perspectivcentren Z_2 ihrer Geraden g. Somit correspondiren die Punkte Z_2 den Geraden p und *fünf der Figuren π bestimmen daher die sechste.*

In zwei Figuren π liegen die 12 Ecken H der zwei Vierseite ihrer p paarweis in sechs Geraden m, welche zu zweien durch die Schnitte ihrer Geraden j mit den Seiten des Dreiecks Δ_{ik} gehen und die sich noch in 12 Punkten T schneiden, welche paarweis in den sechs Geraden v_{12} derselben liegen; es giebt 90 Gerade m und 180 Punkte T. Die drei Punkte Z_2, welche den p aus einem H entsprechen, liegen in einer Geraden z_2; solcher sind 60, durch jeden Punkt Z_2 gehen drei und sie begegnen sich überdies zu drei in den 20 Punkten G. Sie entsprechen einerseits den p, andrerseits den H. Die 90 Geraden v_{12} schneiden sich paarweis in 180 Punkten E, die zu drei in den 60 p liegen und in jeder derselben mit den drei H Paare einer Involution bilden. *Die Z_2 und z_2 bilden wie die H* und *p sechs Figuren π' von je zehn Paaren von Polarsystemen. Die Punkte G und J und die Geraden g, j und v_{12} sind den Systemen (Hp) und $(Zz)_2$ gemein. Fünf dieser Systeme bestimmen ein sechstes der jedesmal andern Art.* Und so fort.

Das Hexagramm setzt sich aus unendlich vielen Systemen (Zz) zusammen, deren jedes aus sechs Figuren π besteht, von denen fünf eine Figur des vorhergehenden und eine des folgenden Systems bestimmen, mit Ausnahme von (Hp), bei welchem fünf Figuren π die sechste desselben Systems und eine des Systems $(Zz)_2$ bestimmen. Die Punktpaare Z_2Z_3, Z_4Z_5, . . . respective Strahlenpaare z_2z_3, z_4z_5, . . . in einer g respective um einen G bilden Involutionen, mit den zugehörigen Punkten H und J respective den zugehörigen Strahlen p und g als Doppelelementen; etc.

---

79) § 286, p. 469. Der Satz B. 4 ist von *Burnside.*

80) § 289, p. 469. Der Satz in B. 5 rührt von *Roberts* her.

81) § 299, p. 479. Eine vollständige Theorie der Kegelschnitte aus den projectivischen Grundeigenschaften begann *Chasles* „Traité des sections coniques" (Paris 1865), ohne Fortsetzung. Vergl. *Steiner's* Vorlesungen „Theorie der Kegelschnitte" von Schröter. Leipzig 1867, und 2. Aufl. 1876.

82) § 296, 1 p. 480. Die Ausdrucksweise des Satzes in B. 1

gab *Townsend* in dem Werke: „Chapters on the modern geometry", Dublin 1865, Bd. 2, p. 165. Vergl. die elegante Behandlung eines allgemeinen Problems über projectivische Büschel von *Hesse* in „Crelle's Journ." Bd. 62, p. 188, und im allgemeinen für diesen Gegenstand desselben Autors schon genannte „Vorlesungen" (3 bis 7).

83) § 297, 2, p. 483. Vergl. Schröter's „*Steiner*, Theorie der Kegelschnitte" (1867), § 37 (1876, § 38).

84) § 298, 4, p. 485. *Chasles'* „Mém. de Géometrie" (Aperçu hist.).

Nachtrag zu p. 489 Zl. 4 v. o. Der Hauptkreis insbesondere die Directrix ist der Ort der Schnittpunkte symmetrischer Polarinvolutionen.

85) § 301, p. 493. Der Hauptsatz wird zuweilen als von *Sturm* bezeichnet; „Gergonne's Annal." Bd. 17, p. 180. Er ist aber bereits von *Desargues* in dessen Schrift „Brouillon project d'une atteinte aux Événemens des rencontres d'une cone avec un plan (1639) gegeben worden, — vergl. „Oeuvres de Desargues" par M. Poudra; Paris 1861, p. 97—238. Dieser Erfinder der Involution hat dieselbe bereits mit aufserordentlicher Vollständigkeit entwickelt. Vergl. meine „Darstell. Geom." Bd. 1, (3. Aufl.) in den „Quellen- u. Liter. Nachw." die Noten zu den Abschn A) u. B). Ebenda findet man zuerst den Begriff harmonischer Pole oder conjugirter Punkte.

86) § 301, 17 u. 18, p. 496, vergl. *Steiner's* Vorlesungen von Schröter (1867), § 39 resp. § 40 (1876).

87) § 308, 3, p. 509. Der Satz rührt von *Townsend* her.

88) § 311, p. 513; vergl. § 334, 6, p. 577. Die Aufgabe ward zuerst für das Dreieck und den Kreis von *Cramer* an *Castillion* vorgelegt und fand in den Berliner Memoiren von 1776 Lösungen von diesem und *Lagrange;* des letzteren Formel construirte *Euler*. (Petersburger Mém. IV.) Die Ausdehnung des Problems auf Polygone gaben *Oltajano* und *Malfatti;* zu Kegelschnitten gingen für das Dreieck *Brianchon* und *Gergonne* über; die Lösung von *Poncelet* steht in seinem „Traité des propriétés proj." p. 352, 2. Ausg. p. 340. Der gegebene Beweis der Poncelet'schen Construction ist von *Townsend*.

89) § 313, p. 518. Dieselbe ist zuerst von *Plücker* aufgestellt worden.

90) § 313, 9, p. 522. Vergl. in „Mathemat. Annalen" Bd. 5 spätere Entwickelungen von *Schröter* und *Durège*. Insbesondere giebt der erstere in p. 51 f. die Eigenschaften der Brennpunktscurve der Kegelschnittschaar. Meine Entwickelung des Satzes von dem Erzeugnifs der projectivischen Involutionen mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl war die darstellend geometrische, die man in meinem Werke: „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage", 3. Aufl. 2. Bd. p. 182 findet; im 3. Bd. §§ 54 f. desselben wird die daraus entspringende Theorie der Curven dritter Ordnung weitergeführt.

91) § 314, 3, p. 524. Die Lösung der Aufg. 3 ist von *Burnside*.

92) § 314, 6, p. 525. Diese Ableitung gab *W. R. Hamilton*.

93) § 315, p. 526. Die vorhergehenden Sätze sind von *Bobillier* in „Gergonne's Annales des Mathém." Bd. 18 p. 320 gegeben worden.

94) ibid. p. 527 — eine von *Hermes* in seinem Programm von 1860 gegebene Gleichung.

95) § 316, 2, p. 530 — eine von *Hart* herrührende Gleichung.

96) ibid, 6, p. 531. Dieser Übergang ward von *Hart* gezeigt.

97) § 317, p. 531. Vergl. *Witworth* „Messenger of Math." Heft 10, p. 71.

98) § 317, 1, p. 533. Die gegebene Lösung ist von *P. Serret*, „Nouvelles Annales" Bd. 24, p. 145.

99) § 317, 2, p. 534. Vergl. *Hesse's* Abhandlung „De Curvis et Superficiebus secundi ordinis", „Journal f. Math." Bd. 20, p. 301. Dafs die harmonisch conjugirten in den Diagonalen eines Vierecks zu den Punkten einer Geraden wieder in einer Geraden liegen, bemerkte *J. Steiner* „Journal f. Math." Bd. 3, p. 212. In *Hesse's* Abhandlung findet man auch den Begriff harmonischer Pole oder conjugirter Punkte. zuerst wieder; *Desargues'* Schriften fehlten noch.

100) § 317, 5, p. 536. Ein Satz von *Möbius* in der Abhandlung „Journal f. Math." Bd. 26, p. 26 f.; jetzt „Werke" I, p. 587.

101) § 317, 6, p. 536. Beweis von *Burnside* zu einem Satze von *Sylvester*.

102) § 317, 12, p. 538. Vergl. *Cayley* „Journ. f. Math." Bd. 68, p. 178.

103) § 319, p. 540. Diese Methode wurde von *Joachimsthal* eingeführt in „Journal f. Math." Bd. 33, p. 373.

104) § 322, 2, p. 545. Vergl. *Hearn's* „Researches on conic sections".

105) § 322, 3, p. 546. Man findet weiteres in Abh. von *Cayley* „Cambridge and Dublin Math. Journ." Bd. 5, p. 148 u. „Quarterly Journal of Math." Bd. 6, p. 26; Bd. 8, p. 21 u. 220.

106) § 325, p. 551. Man kann vergl. *Hesse's* „Vier Vorlesungen a. d. analyt. Geom." Leipzig 1866.

107) § 325, 4, p. 553. Vergl. die an unbewiesenen Sätzen reiche Abh. *J. Steiner's* „Journal f. Math." Bd. 45, p. 189 u. „Werke" II, p. 447 f. Für vollständige geometrische Ableitung sehe man meine Abh. „Acta mathem." Bd. 5, p. 331—408: „Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide mit parallelen Axen".

108) § 325, 7, p. 554. Vergl. „Journal f. Math." Bd. 1, p. 161 f. u. „Werke" Bd. 1, p. 19 f. § IV. Einen geometrischen Beweis gab *Hart* „Quart. Journ." Bd. 1, p. 219. Siehe den nach *Steiner's* Wegweisung entwickelten von *Schröter* „Crelle's Journ." Bd. 77, p. 230. Ferner *Affolter* in „Math. Ann." Bd. 6, p. 597.

109) § 326, 3, p. 556. Vergl. *Plücker* „Anal.-geom. Entwickel." Bd. 2, § 639. (1831.)

110) § 327, p. 557. Das Theorem von *Carnot* findet sich in dessen „Géométrie de position" p. 437. Vergl. *Chasles*, „Traité des sections coniques". Den Specialfall des Satzes in B. 3 bewies *Steiner* „Gergonne's Annal." Bd. 19, p. 3.

111) § 329, p. 562. Die Methode dieses § gab *Aronhold* in „Crelle's Journ." Bd. 61, p. 102. Vergl. auch *Gundelfinger* in „Annali di Matem." Bd. 5.

Nachtrag zu p. 557. Das Verschwinden eines A_{ik} oder a_{ik} hat harmonische Trennung des bezüglichen Punkt- oder Tangentenpaares durch die vereinigt liegenden Fundamentalelemente zur Folge.

112) § 330, 3, p. 563. Vergl. *J. Steiner's* Abh. in Bd. 19, p. 37 f. der „Annales" oder „Werke" I, p. 189, speciell p. 198.

113) § 332, 3, p. 570. Siehe *Feuerbach's* „Eigensch. einiger merkw. Punkte des geradl. Dreiecks etc." 1822, p. 38, § 57. Der folgende Beweis ist von *Casey* und die Ausdehnung auf die Kreise des Apollonischen Problems, die er gleichfalls beweist, war von *Hart* gegeben. Die Ausdrücke in B. 8 rühren her von *Cathcart*.

114) § 334, p. 575. Der Satz von dem Polarenbüschel eines Punktes ist von *Lamé*: „Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie". Paris 1818.

115) § 334, 4, p. 577. Der Satz ist von *Burnside*.

116) § 334, 6, p. 577. Dieser Satz rührt her von *Williamson* und ist eine Form der Construction von Curven vierter und dritter Ordnung aus projectivischen Involutionen, mit selbst entsprechendem Scheitelstrahl.

D. Kap. XVIII—XXII. Invariantentheorie. Methoden der Reciprocität und der Projection.

117) § 338, p. 586. Vergl. *Cayley's* „Fifth Memoir upon Quantics" in „Philosoph. Transactions" Bd. 148, p. 434, und meine „Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen", Leipzig 1862. I. Kap. Für die Resultante als Discriminante § 342.

118) § 339, p. 588. Man studiere *Aronhold's* Abh. „Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie" in Bd. 62 des „Journal für Math." p. 281—345.

119) § 345, 1, p. 601. Die Theorie der Doppelverhältnisse von vier Elementen gab zuerst *Möbius* in „Barycentr. Calcul" (1827) p. 246 f., jetzt „Werke" I, 222 f. Die Gleichheit der drei fundamentalen Doppelverhältnisse ist zuerst erwähnt und bestimmt in des Autors „Higher plane Curves" 1852, § 105, p. 192. Vergl. *Schröter* „Zur Construction eines äquianharmonischen Systems" in Bd. 10, p. 420 der „Mathem. Annalen".

120) § 347, p. 604. *Battaglini* in „Giornale di Matem." Bd. 2, p. 170 etc. und Bd. 3, p. 24 etc. hat dieselbe Theorie ausführlich dargestellt.

121) § 348, p. 607. Diese Darstellung ist dem Manuscripte von *Clebsch* entnommen, welches er mir nach dem Erscheinen meiner in Note 117 genannten Schrift von 1862 als seine Bearbeitung desselben Gegenstandes mittheilte. Man vergl. sein Werk „Theorie der binären Formen", Leipzig 1871.

122) § 349, p. 610. Für die Theorie der Involution erscheint wichtig die Abhandlung von *Cayley* „Transact. of the Cambridge Philos. Soc." Bd. 11, p. 21 (1865). Vergl. „Vorlesungen" 2. Aufl. Kap. XVI. Art. 177 f.

123) § 352, 1, p. 616. Das Beispiel ist von *Cremona*.

124) § 353, p. 619. Siehe *Gordan's* Entwickelung im 69. Bd. des „Journal für Math." u. die Darstellung von *Sylvester* im „American Journal of Math." nach der Methode von *Cayley*.

125) § 356, p. 625. Die Gleichung $k^3 \Delta_2 + k^2 \Theta_2 + k\Theta_1 + \Delta_1 = 0$ findet sich zuerst in *Lamé:* „Examen des différentes méthodes".

126) § 358, p. 627. Vergl. die Dissertation von *Kemmer,* Gieſsen 1878.

Nachtrag zu p. 630, B. 6) So auch aus § 315 f. Analog für Kegelschnitte, deren einer dem Fundamentaldreieck um- oder eingeschrieben ist, während der andere es zum Tripel harmonischer Pole hat; nämlich resp. $(a_{11} a'_{23}{}^2)^{\frac{1}{3}} + \cdots = 0$ und $(a_1{}^2 a_{11}{}^{-1})^{\frac{1}{3}} + \cdots = 0.$ In der ersten Formel B. 6) ist natürlich zu lesen $(a_1 a'_{23})^{\frac{1}{3}} +$

127) § 358, 2, p. 629. Vergl. meine Abhandlung in Grunert's „Archiv d. Math." Bd. 37, p. 20.

128) § 360, 2, p. 634. Vergl. *Hesse's* „Vier Vorlesungen", Leipzig 1866 (Satz 17), u. *P. Serret's* „Géom. de direction" (Paris 1869), p. 130.

129) § 361, p. 636 und § 362. Vergl. die gehaltvolle Abhandlung von *H. J. Stephen Smith* „On some geometrical constructions" in Bd. 2 der „Proceedings of the London Mathem. Society" (1868) p. 87, und die Schrift von *H. Picquet* „Etude géom. des systèmes ponctuelles et tangentielles des sections coniques", Paris 1872 (183 p. 8vo). Aufg. § 362, 6 löste zuerst *de Jonquières* „Nouvelles Annales" Bd. 14, p. 435. Für die Vorhergehenden vergleiche man *St. Smith's* genannte Abhandlung.

130) § 363, 1, p. 640. Satz von *Faure:* „Nouvelles Annal." Bd. 19, p. 234. Ibid. *Salmon's* Entwickelungen p. 347.

131) § 363. Der Satz in B. 4 ist von *Hart.*

132) § 363. Der Satz des B. 5 rührt her von *Burnside.* Vergl. „Zeitschrift f. Math." Bd. 6, p. 140.

133) § 364, p. 642. Zu diesem und dem vorigen § vergleiche die Note von *Beltrami* „Giornale" Bd. 9, p. 341, welche von der Betrachtungsweise des § 303 ausgeht. Die Bedingung für das ein- und umgeschriebene Dreieck ward von *Cayley* in „Philosoph. Magaz." Bd. 6, p. 99 mit Hilfe der Theorie der elliptischen Functionen gegeben — wie vorher *Jacobi* „Crelle's Journ." Bd. 3, p. 395 für den Kreis und *Richelot* ibid. Bd. 5, p. 250 für Kugelkreise gethan. Er beweist auch, dafs, wenn die Quadratwurzel aus

$$k^3\Delta + k^2\Theta + k\Theta' + \Delta'$$

nach Potenzen von k entwickelt durch $A + Bk + Ck^2 +$ etc. dargestellt wird, die Bedingungen für die Möglichkeit eines dem Kegelschnitt $S=0$ umgeschriebenen und dem Kegelschnitt $S'=0$ eingeschriebenen nEcks für $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ durch die Ausdrücke

$$C=0,\quad D=0,\quad CE-D^2=0,\quad DF-E^2=0,$$
$$CEG+2DEF-CF^2-D^2G-E^3=0, DFH+2EFG-DG^2-E^2H-F^3=0,$$

etc. — sämmtlich Determinantea der Coefficienten der Entwickelung — gegeben sind. Man vergl. *Rosanes* und *Pasch* in „Crelle's Journ." Bd. 64, p. 126, *Moutard* im Anhange zu *Poncelet's* „Applications d'analyse et de géométrie" Bd. 1, p. 335, und besonders neuestens *M. Simon* in Bd. 81 von „Crelle's Journ." p. 304 f. und *Gundelfinger* in Bd. 82, p. 171 respective für die Invariantenrelationen und die Beziehung zur Bildung von Covarianten des Büschels.

134) Vergl. „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2. Aufl. § 132.

135) § 368, p. 649. Die Wichtigkeit dieser Kegelschnitte als Covarianten betonte zuerst der Verfasser „Cambridge and Dublin Math. Journ." Bd. 9, p. 30. Entdeckt hatte dieselben bereits *v. Staudt* in seinem Nürnberger Programm von 1834. (Vergl. § 433, 8.)

136) § 369, p. 653, B. 3. Siehe *Gundelfinger's* Abhandl. „Zur Theorie des Kegelschnittbüschels" in der „Zeitschrift für Math. u. Physik" von 1874, p. 153 f.

137) § 369, 8, p. 656. *Cayley* hat in „Quart. Journ." Bd. 1, p. 344 das Problem untersucht, den Ort der Spitze eines Dreiecks zu finden, das einem Kegelschnitt S umgeschrieben ist, indess die Basisecken gegebene Curven durchlaufen. Sind diese Kegelschnitte, so ist der Ort von der Ordnung acht und berührt S in den Punkten, in denen ihn die Polaren ihrer Schnittpunkte in Bezug auf S schneiden.

138) § 369, 10, p. 656. Vergl. „Philos. Mag." Bd. 13, p. 337.

139) § 369, 11, p. 656. Der Satz rührt von *Faure* her.

140) § 370, B. 1, p. 659. *Cayley* gab im Wesentlichen diese all-

gemeine Auflösung des Problems der Berührungen; „Crelle's Journ." Bd. 39, p. 4. Vergl. „Philosoph. Magazine", Bd. 27, p. 42.

141) § 370, 3, p. 662. Diese Gleichung erhielt zuerst *Casey* durch Betrachtungen der sphärischen Geometrie. („Proceedings of the R. Irish Acad." 1866.)

142) § 370, 4, p. 663. Für diese Ausdehnung des *Feuerbach*'schen Satzes und ihre Erweiterung siehe „Quarterly Journ." Bd. 6, p. 67.

143) Vergl. *Aronhold's* „Fundamentale Begründung der Invariantentheorie" in Bd. 62 des „Journal f. Math." § 11.

144) § 371, p. 667. Für die Transformation auf die Hauptaxen studire man die Abhandlung von *Jacobi*, „Crelle's Journ." Bd. 12, p. 50; vergl. Bd. 19, p. 309, und *Hesse* „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes", Leipzig 1861, p. 237 f.; *Weierstrass* „Berichte der k. Preufs. Akad. d. Wissensch." 1858, p. 207. Vergl. § 411.

145) § 371, 2 f., p. 668. Vergl. *Gundelfinger* „Zeitschrift f. Math. u. Physik" 1874, p. 153 f.

146) § 371, p. 670. Die Gleichungen der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte in 6, sowie die Darstellung der Transformation auf das gemeinsame System harmonischer Pole in 7 hat *Aronhold* a. a. O. gegeben; siehe p. 319 f., p. 328 f.

147) § 373, 4, p. 677. Vergl. *Beltrami* „Giornale" Bd. 1, p. 112.

148) § 374 p. 679. Vergl. für das vollständige System „Vorlesungen über Geometrie von *A. Clebsch*" (Lindemann) (1876) die Aufstellung und Ableitung von Gordan p. 291 f.

149) § 375, 3 p. 681. Prof. *Gundelfinger* erinnerte mich an dies Beispiel. Das Beispiel 4) § 375 ist von *Burnside*. Betreffs der Cayley-Hermite'schen Curven merken wir an, dafs *Cayley's* erste Untersuchung „A Memoir on curves of the third order" („Philos. Transact." 147. Bd.) von 1857 ist, während *Hermite's* Arbeit in Bd. 57 (1860) des „Journal für Math." steht. Weiteres findet man in der Theorie der Curven dritter Ordnung in meiner Bearbeitung von *G. Salmon's* „Analyt. Geometrie der höheren ebenen Curven" 2. Aufl. 1882. Kap. V.

150) § 377, p. 684. Sie ward zuerst von *Sylvester* gegeben und die Relation $T = \Theta^2_{123}$ — etc. von *Burnside*. Zum System von drei ternären quadratischen Formen sehe man *Gundelfinger's* an *Hermite* anknüpfende algebraisch weiterführende Untersuchungen in Bd. 80, p. 73 f. von „Crelle's Journal".

151) § 380, 3 u. 4, p. 689 u. § 381, 2, p. 690 sind von *Burnside* beigetragen.

152) § 382, p. 691. Vergl. *Hensley* „Quarterly Journ." Bd. 5, p. 177, p. 273, und *Cayley* über die durch die Brennpunkte eines Kegelschnitts gehenden Kegelschnitte, ibid. p. 275. Über die Behandlung des Problems der Brennpunkte als der Algebra binärer Formen angehörig gab *Siebeck* eine interessante Abhandlung in „Crelle's Journ." Bd. 64, p. 175.

Die Anwendung der in den B. von § 382 enthaltenen allgemeinen Resultate auf die einem Dreieck um- und eingeschriebenen Kegelschnitte (§ 315 f.) und auf die Kegelschnitte mit demselben Tripel harmonischer Pole (§ 312) liefert zahlreiche interessante Ergebnisse. Vergl. *Steiner's* „Vermischte Sätze und Aufgaben" aus Bd. 55 des „Journ. f. Math." oder „Werke" II, p. 669 f. und die darauf bezügliche Dissertation „Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte" von *Dörholt* (Münster 1884).

153) § 383 bis 389, p. 695. Die hier entwickelte Theorie gab zuerst *Cayley* in seinem „Sixth Memoir upon Quantics" in „Philosoph. Transactions" Bd. 149.

154) § 387, p. 702. Vergl. *F. Klein* „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", Math. Ann. Bd. 4, p. 573 f. und Bd. 6, p. 112 f.

Die Beziehungen dieser Fragen zur Cayley'schen Maſsbestimmung kannte der Herausgeber *vor* dieser Veröffentlichung, und sie waren auch *Beltrami* bekannt. Hier ist die ausgedehnte Literatur dieser Frage nicht aufzuzählen, doch sind *Beltrami's* Arbeiten „Giornale" Bd. 6 (1868) und „Annali" Bd. 2 (2. Ser.) (1868—69), vorher Bd. 7 (1. Ser.) (1866) hervorzuheben.

155) § 392, p. 709. Vergl. *F. Klein's* vorher bezeichnete Abhandlung Bd. 4, p. 600.

156) § 394, 5, p. 717. Vergl. *Cremona's* Untersuchungen über den Flächeninhalt des Segments zwischen Gerade und Kegelschnitt etc. in „Giornale di Matem." Bd. 1, p. 360.

157) § 395, 2, p. 720. Der Satz über den Zusammenhang der vier von einem Punkte ausgehenden Normalen rührt von *Joachimsthal* her (siehe „Crelle's Journ." Bd. 26, p. 172; Bd. 38); seine allgemeine Form gab ihm *Cayley* in „Crelle's Journ." Bd. 56, p. 182.

158) § 395, 3, p. 731. Zum Studium ist zu empfehlen die Abhandlung von *Clebsch* „Crelle's Journ." Bd. 62, p. 64.

159) § 402, p. 732. Die Methode der reciproken Polaren gab *Poncelet* „Crelle Journ." Bd. 4, p. 1 f. Siehe auch den 2. Bd. des „Traité des propriétés projectives des figures" (1866) von *Poncelet* p. 57 f. Im 4. und 5. Kap. des 3. Abschnitts des Werkes „Der barycentrische Calcul" („Werke" I.) handelt *Möbius* mit gewohnter Umsicht von der Polarreciprocität und von dem allgemeinen projectivischen Entsprechen zwischen Punkten und geraden Linien unabhängig von *Poncelet*. Man vergleiche auch die Darstellung von *Magnus* „Aufgaben u. Lehrsätze" Bd. 1, p. 31 f.

160) § 414, p. 752. Die Parabel als Directrix der Reciprocität hat besonders *Chasles* empfohlen: „Correspond. mathém." von *Quetelet*. Bd. 5, 6.

161) § 415, p. 754. Die Methode der reciproken Radien vectoren ward als „Princip des images" gegeben von *W. Thomson* in „Liouville's Journ." Bd. 10, p. 364. Vergl. *Liouville* Bd. 12, p. 365. Schon *Jacobi* hatte sich mit solchen Betrachtungen beschäftigt, siehe „Crelle's Journ." Bd. 15, p. 309 und vielfache Spuren sprechen für *Steiner's* Kenntniss derselben. Neuestens ist diese Methode auf elementarem Wege als Circular-Inversion von *Townsend* (siehe „Chapters on the modern Geometry" Bd. 2, p. 363) entwickelt worden. *Hart* wendete sie auf das System des Feuerbach'schen Kreises an und gab eine Gruppentheilung des Systems der Berührungskreise von drei Kreisen („Quarterly Journ." Bd. 5, p. 260). *Casey* gelang ein einfacher Beweis derselben (ibid. Bd. 5, p. 318). Vergl. oben Note 113. Zum besonderen Studium ist zu empfehlen: *Möbius* „Die Theorie der Kreisverwandtschaft" in „Abhandl. d. K. S. Ges. d. Wissensch." Bd. 4, p. 531 oder „Werke" II, p. 243.

162) § 415, p. 754. Dies ist zuerst bemerkt in meinem Aufsatze „Die birationalen Transformationen in der Geometrie der Lage" in Bd. 21, Heft 4 der „Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellsch. in Zürich".

163) § 416, 3, p. 758. Vergl. *Steiner's* „Systematische Entwickelung" p. 305, Aufg. 39. „Werke" I, p. 446.

164) § 417, p. 759. Das Entsprechen von Punkten in Bezug auf das Büschel von Kegelschnitten entwickelten *Steiner* (a. a. O. p. 266)

und *Magnus* „Crelle's Journ." Bd. 8, p. 51. *Magnus*, Aufg. u. Lehrs. Bd. 1, §§ 50, 63. Für Beispiele siehe *Bauer* „Crelle's Journ." Bd. 69, p. 293.

165) § 418, p. 762. Die Methode des Entsprechens von Geraden in Bezug auf ein Vierseit begründete *Steiner* („Systematische Entwickelung" p. 277); die Anwendung auf das Problem der Normalen verdanke ich *Cremona*.

166) § 419, p. 764. Für die geometrische Entwickelung der Methode der Projection vergleiche man des Herausgebers „Darstellende Geometrie etc." (Leipzig 1872. 3. Aufl. 1883.) Für die Anwendung auf die Theorie der Kegelschnitte besonders die §§ 24—36, Bd. I. Die involutorische Collineation oder die Centralprojection mit $\varDelta = -1$ findet man in §. 20 und ihre Anwendung auf die Theorie der Kegelschnitte in § 30 f.

167) § 421, p. 766. Die Methode der Projection als Entdeckungsmethode verdankt man *Poncelet:* „Traité des propriétés projectives des figures". 1822. (Bd. 1 der 2. Ausg. 1865.) Man kann dies Werk als grundlegend für die neuere Geometrie (in einem weiteren als dem üblichen Sinne des Wortes) bezeichnen.

168) § 422, 1, p. 768. Siehe des Herausgebers „Darstellende Geometrie etc." 3. Aufl., I, § 22, f) und g), sowie den Überblick A, der diese Specialfälle auf die Reciprocität überträgt, p. 116.

169) § 423, p. 770. Die Einführung gleichbenannter Brüche für Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten zur Überführung der Gleichungen zwischen ihnen in homogene Form — wie bei *Hesse* (z. B. „Vorlesungen aus der analyt. Geom. der ger. Linie, des Punktes u. des Kreises" 1865, p. 98) — ist also stets zugleich Übergang zur Untersuchung einer Projection der ursprünglichen Figur an ihrer Stelle.

170) § 424, p. 772. Vergl. auch a. a. O. § 11. Überdies schneidet die projicirende Ebene, welche der Ebene beider Gegenaxen parallel läuft, aus Original- und Bildebene diejenigen Geraden aus, welche entgegengesetzt gleiche Reihen enthalten; dieselben liegen symmetrisch zur Collineationsaxe in Bezug auf die Gegenaxen. Endlich bestimmt die zur Halbirungslinie des Drehungswinkels beim Umklappen parallele projicirende Gerade in der Original- und Bildebene die Scheitel entsprechend gleicher Büschel von entgegengesetztem Drehungssinn, zwei Punkte, welche in Bezug auf die Gegenaxen symmetrisch liegen zum Collineationscentrum. Man sieht, dafs in vereinigten projectivischen Gebilden erster Stufe die symmetrischen der Doppelelemente in Bezug auf die Gegen- oder Grenzelemente sich entsprechen. Vergl. „Darstellende Geometrie" etc. § 14; § 15, 4 und § 18, 10; dazu den Aufsatz: Über die Symmetrie" etc. in Bd. 21 der „Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellsch. in Zürich". Für entsprechende Eigenschaften der Strahlen- und Ebenenbündel vergl. man Bd. III des genannten Werkes § 71.

171) § 426, p. 775. In der Geometrie der Alten betrachtete man bis auf *Apollonius* (250 v. Chr.) die Kegelschnitte nur am geraden Kegel und nur unter der Voraussetzung, dafs die Schnittebene zu einer Kegelseite (der einen Seite des Axendreiecks) senkrecht sei, d. i. dafs MN senkrecht auf OB. Darnach wurden die Kegelschnitte eingetheilt *in Schnitte des rechtwinkligen spitz- oder stumpfwinkligen Kegels,* und nach *Eutochius,* dem Commentator des Apollonius, wurde die Schnittcurve Parabel, Ellipse oder Hyperbel genannt, je nachdem und weil der Winkel des Kegels gleich, kleiner oder gröfser als ein rechter Winkel war. Schon *Archimedes* kannte die Namen Parabel und Ellipse. *Apollonius* war es aber, welcher zuerst bewies, *dafs alle drei Kegelschnitte aus dem*

nämlichen Kegel geschnitten werden können, und der, ebenso wie *Pappus,* ihnen die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel aus dem im § 206 angegebenen Grunde beilegte.

172) § 430, p. 778. Der Hauptsatz rührt von *Quetelet* und *Dandelin* her; man findet die genauere Entwickelung bei *Steiner* „Vorlesungen über synth. Geom." Bd. 1, § 24, bei *Schlömilch* „Geometrie des Maſses" II. Buch. Vergl. auch „Darstellende Geometrie etc." Bd. II, § 9. Endlich *Chasles* (Sohnke) „Geschichte der Geometrie" p. 289.

173) § 430, Anmerk., p. 779. Vergl. *Mulcahy* „Principles of modern Geometry", 2. Aufl. Dublin 1862.

174) § 431, p. 781. Das Princip der Continuität stellte *Poncelet* in seinem mehrgenannten Hauptwerk auf. Vgl. über seine Begründung desselben *Chasles* (Sohnke) „Geschichte der Geometrie" p. 193 f.

175) § 433, 8, p. 786. Vergl. *Steiner* „Crelle's Journ." Bd. 45, p. 219. „Werke" II, p. 477 f.

176) § 437, 1, p. 794. Dieser Beweis des Satzes von *Mac Cullagh* ist von *Graves* gegeben worden.

177) § 438, p. 795. Vergl. des Herausgebers obengenannte „Darstellende Geometrie" 3. Aufl. I, § 10; für das Orthogonalsystem den 3. Bd. § 74.

178) § 439, p. 799. Für die Ausdehnung auf die Construction der Kreise, welche drei gegebene Kreise unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden (*Steiner* im 2. Bd. von „Crelle's Journ.") vergleiche man eine Abhandlung von *Darboux* in Bd. 1 der 2. Ser. von „Annales de l'école normale" p. 323, besonders p. 377 f.

179) § 440, p. 799. Die Entwickelung der „Cyklographie" als einer Methode der Untersuchung der Kreis- und Kugelsysteme knüpfte ich an die Benutzung des Distanzkreises zur Festlegung des Centrums in der Centralprojection. Siehe mein Programm von 1860. Sie ist elementar dargestellt in meiner Schrift „Cyklographie" (263 S. mit 16 Tafeln), Leipzig 1882.

180) § 440, p. 800. Dasselbe führt auch in den Fällen zum Ziel, wo die rein planimetrische Methode nicht direct anwendbar bleibt, wie bei Kreisen mit einerlei Centrale. Das wesentliche Fortbestehen derselben Construction für die Kreise, welche drei gegebene unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, ist a. a. O. §§ 126 bis 131 gezeigt.

Druckfehler.

Seite

186 Zl. 9 v. o. zweite Formel lies $\varrho\alpha'\beta'$.

186 Zl. 13 v. u. lies $-\mathsf{A}_{23}$, Zl. 10 v. u. erste Formel lies im Zähler $-\alpha_{23}\mathsf{A}_{23}$, zweite Formel $-\alpha_{31}\mathsf{A}_{23}$.

209 Zl. 11 v. o. streiche paare.

235 B. 7) in der Determinante lies erste Reihe $x^2+y^2-\pi_1$, $x^2+y^2-\pi_2$, $x^2+y^2-\pi_3$.

331 Zl. 4 v. u. lies eingeschlossenen.

404 Zl. 5 v. o. lies § 297, 2 f.

504 Zl. 12 v. o. lies $-\mu\{$

521 B. 9) Zl. 2 lies circulare statt bicirculare.

542 Zl. 17 v. u. lies $x_2'\,x_1$ —

567 Zl. 2 v. o. lies $d'^2 = -$

580 B. 1) Zl. 2 lies ξ_a statt a_x.

584 Zl. 9 v. o. lies § 370, 1.

592 letzte Zeile von B. 2) lies 367 u. 369.

595 Zl. 12 v. o. lies S, S', F.

617 B. 3) Zl. 2 streiche das Wort conjugirt u. verweise auf § 362.

628 B. 2) Zl. 5 lies § 357, 3.

661 B. 2) Zl. 4 lies solchen statt andern.

690 Zl. 3 v. o. sind die Doppelproducte negativ.

700 Zl. 14 v. o. lies also statt als.

705 letzte Zl. fehlt die Klammer (nach a_{11}.

723 Zl. 5 v. u. fehlen in der 2. Gleichung die $+\cdot\cdot$

754 Zl. 18 v. o. lies Ordnungscurven.

758 Zl. 7 v. o. lies Harmonikalen.

760 Zl. 10 v. o. lies nur.

Vierzehntes Kapitel.

Lineare Systeme von Kegelschnitten.

---

268. **Kegelschnittbüschel.** Nachdem in den fünf vorhergehenden Kapiteln fast durchgängig die Methode der Cartesischen und nur einigemal die der Plücker'schen Coordinaten gebraucht worden ist, wiederholen wir nun den Entwickelungsgang des vierten Kapitels an dem mehr umfassenden Object der Gleichungen vom zweiten Grade, um uns dadurch endlich in den vollständigen Besitz der allgemeinen Hilfsmittel und Gesichtspunkte zu setzen, welche dort entwickelt worden sind. Dabei tritt wieder zuerst die Anwendbarkeit und der grofse Nutzen einer *abkürzenden Symbolik*[67]) hervor (§ 61).

Wenn wir dabei diese Symbole zunächst als auf Punktcoordinaten bezogen denken und sie demgemäfs interpretieren, so ist zu bemerken, dafs ihre Interpretation in Liniencoordinaten (§ 79) ohne weiteres zu den dualistisch entsprechenden Sätzen der abgeleiteten führt (§ 282).

Nach § 141 ist die Angabe eines Punktes der Curve eine lineare Bedingung zwischen den fünf verfügbaren Constanten der Gleichung zweiten Grades. Die Angabe von vier Punkten gestattet daher in der allgemeinen Gleichung vier Constanten durch die fünfte, noch unbestimmt bleibende Constante und gegebene Gröfsen auszudrücken. *Die Gleichung eines durch vier gegebene Punkte gehenden Kegelschnittes enthält linear eine verfügbare Constante, einen Parameter.*

Nun können irgend vier reelle oder in Paaren conjugiert imaginäre (§ 19) Punkte als die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte von reellen Gleichungen angesehen werden. Wenn

also $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ die Gleichungen von zwei Kegelschnitten symbolisch bezeichnen, so kann *die Gleichung jedes Kegelschnittes, welcher die vier Schnittpunkte jener enthält, in der Form*

$$S_1 - kS_2 = 0$$

dargestellt werden. Und umgekehrt definiert jede quadratische Gleichung, welche einen Parameter linear enthält, einen durch vier gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt*).

Gibt man dem Parameter alle möglichen Werte, so bildet die Gesamtheit der Kegelschnitte $S_1 - kS_2 = 0$ *ein Kegelschnittbüschel;* die vier allen gemeinsamen Punkte heifsen *die Grundpunkte* desselben. *Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels,* denn ein Parameterwert k' wird dadurch bestimmt, dafs die Gleichung durch die Coordinaten x_i' irgend eines fünften Punktes befriedigt sein soll.

269. **Polarenbüschel.** Wenn man die Gleichung der Polare eines Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt $S_1 - kS_2 = 0$ bildet (§ 157), so enthält sie den Parameter k ebenfalls linear. *Daher bilden die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels selbst ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel der zu dem gegebenen in Bezug auf das Büschel doppelt conjugirte Pol heifst.* Man erkennt in diesem Satze eine nur formale Erweiterung derselben Erörterung über das Kreisbüschel (§ 125).

Zunächst erhellt daraus *die geometrische Bedeutung des Parameters* k als einer Proportionalzahl zum Sinusteilverhältnis im Polarenbüschel irgend eines Punktes. Sind inssondere $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Tangenten an $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in einem der Grundpunkte, so ist $T_1 - kT_2 = 0$ die Tangente an $S_1 - kS_2 = 0$ in demselben. Es ist also $S_1 : S_2 = T_1 : T_2 = k$, wenn man in die Functionen die Coordinaten

*) In derselben Art enthält die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, welcher drei Bedingungen unterliegt, zwei unabhängige Constante, etc. Die Gleichungen der Orthogonalkreise eines gegebenen Kreises (§ 128) und der Kreise durch einen Punkt geben dazu Beispiele (vgl. § 283, 315). Aber die Kegelschnittsgleichungen, die zwei lineare Parameter enthalten, definiren *nicht* umgekehrt stets Curven durch drei Punkte.

eines Punktes eingesetzt denkt, durch welchen $S_1 - kS_2 = 0$ geht.

Sind ferner P, P' zwei doppelt conjugirte Pole, so wird ihre Verbindungsgerade durch jeden Kegelschnitt des Büschels in einem zu PP' harmonischen Punktepaar geschnitten. *Speciell der durch P gehende Kegelschnitt hat die Verbindungsgerade mit P' als die ihn in P berührende Tangente,* denn sie ist eine der zu P gehörigen Polaren; ebenso berührt PP' den durch P' gehenden Kegelschnitt in P'.

Umgekehrt liegen in jeder beliebigen Geraden zwei doppelt conjugirte Pole P, P'. Denn ihre Schnittpunktepaare mit den Curven $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ besitzen ein gleichzeitig zu beiden harmonisches Punktepaar P, P' (§ 15). Nach Definition schneiden sich aber die Polaren von P bezüglich $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ in P', also auch alle anderen Polaren im Büschel. *Somit wird jede Gerade von zwei Kegelschnitten eines gegebenen Büschels berührt und von den übrigen in zu den Berührungspunkten harmonischen Punktepaaren geschnitten.*

270. **Linienpaare im Büschel.** Es gibt drei Werte von k, für welche $S_1 - kS_2 = 0$ ein Linienpaar darstellt, d. h. *unter den Kegelschnitten eines Büschels gibt es stets drei Linienpaare.* Denn die Bedingung, unter welcher dies stattfindet, wird gefunden, indem man in $\mathbf{D} = 0$ oder (§ 163)

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0$$

für a_{11}, a_{12}, etc. die Werte $a_{11} - kb_{11}$, $a_{12} - kb_{12}$, etc. einsetzt. Das Resultat dieser Substitution ist offenbar in k vom dritten Grade. Wenn also die Wurzeln dieser cubischen Gleichung in k durch k', k'', k''' bezeichnet werden, so repräsentiren

$$S_1 - k'S_2 = 0, \quad S_1 - k''S_2 = 0, \quad S_1 - k'''S_2 = 0$$

die drei Paare von Sehnen, welche zwischen den vier Schnittpunkten beider Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ gezogen werden können (§ 230).

In dem vollständigen Viereck der Grundpunkte ist jedes Gegenseitenpaar ein zerfallender Kegelschnitt des Büschels. Von diesen Schnittsehnen ist stets *ein* Paar reell (§ 230), die beiden andern können aus reellen oder conjugirt imaginären Geraden

bestehen oder selbst complexe Gleichungen haben. Einer der beiden ersten Fälle tritt ein, wenn die cubische Gleichung drei reelle, der letzte, wenn sie eine reelle und zwei complexe Wurzeln besitzt. Eine nähere geometrische Unterscheidung dieser Fälle folgt unten; für die algebraische ist auf Lehrbücher der Algebra etc. zu verweisen.

271. **Gemeinsames Polardreieck.** Da die harmonische Beziehung zwischen Pol und Polare durch ein dem Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck vermittelt werden kann (§ 158), so sind in dem Diagonaldreieck $P_1P_2P_3$ des Vierecks der Grundpunkte jede Ecke P_1 etc. und die Gegenseite P_2P_3, etc. Pol und Polare in Bezug auf jeden Kegelschnitt, der durch die Grundpunkte geht. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist somit in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels ein gemeinsames Polardreieck (§ 159).

Es gibt aber auch nicht mehr als drei Punkte, welche in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels dieselbe Polare haben. Denn sind $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ die Polaren von $x' \mid y'$ in Bezug auf $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, so mufs identisch $P_1 = \varkappa P_2$ sein, damit jene Polaren unter einander, also auch mit $P_1 - \varkappa P_2 = 0$ identisch seien. Daher mufs $x' \mid y'$ bestimmt werden, aus den drei in $\varkappa$ linearen Bedingungen, dafs die Coefficienten von x, von y und die constanten Glieder in P_1 und P_2 proportional seien. Dies ist aber nur möglich, wenn die Determinante dieser drei Gleichungen verschwindet, d. h. $\varkappa$ aus einer Gleichung *dritten* Grades bestimmt wird*).

Jedes Kegelschnittbüschel besitzt in dem Diagonaldreieck des Vierecks der Grundpunkte das einzige gemeinsame Polardreieck.

Dies Diagonaldreieck ist reell, sobald alle Grundpunkte gleichzeitig reell oder imaginär sind. Für den Fall imaginärer Grundpunkte können diese, da sie paarweise conjugirt imaginär sind, nach der Bezeichnungsweise des § 16 durch $x_1 \mid y_1$, $\bar{x}_1 \mid \bar{y}_1$; $x_2 \mid y_2$, $\bar{x}_2 \mid \bar{y}_2$ dargestellt werden. Die Träger

*) Man überzeugt sich leicht, dafs diese Bedingungsgleichung identisch ist mit der aus der Einsetzung von $a_{ik} - \varkappa b_{ik}$ in die Discriminante $\mathsf{D} = 0$.

dieser Paare mit dem Schnittpunkt P_3 sind reell, die übrigen Schnittsehnen in Paaren conjugirt imaginär: $x_1|y_1$, $x_2|y_2$; $\bar{x}_1|\bar{y}_1$, $\bar{x}_2|\bar{y}_2$ und $x_1|y_1$, $\bar{x}_2|\bar{y}_2$; $\bar{x}_1|\bar{y}_1$, $x_2|y_2$, also von den Gleichungsformen $L \pm Mi = 0$ und $L' \pm M'i = 0$. Ihre Schnittpunkte P_1 und P_2 sind also ebenfalls reell, nämlich $L = 0$, $M = 0$ und $L' = 0$, $M' = 0$.

Von dem gemeinsamen Polardreieck ist nur eine Ecke und die Gegenseite reell, die andern Paare sind conjugirt imaginär, wenn von den Grundpunkten zwei reell und zwei conjugirt imaginär sind. Sind die Punkte $x'|y'$, $x''|y''$ reell, $x|y$, $\bar{x}|\bar{y}$ imaginär, so sind die Schnittsehnen $x'|y'$, $x''|y''$; $x|y$, $\bar{x}|\bar{y}$ reell, $x'|y'$, $x|y$; $x'|y'$; $x|\bar{y}$ und $x''|y''$, $x|y$; $x''|y''$, $\bar{x}|\bar{y}$ conjugirt imaginär, also auch die Schnittpunkte $x'|y'$, $x|y$; $x''|y''$, $\bar{x}|\bar{y}$ und $x'|y'$, $\bar{x}|\bar{y}$; $x''|y''$, $x|y$ conjugirt imaginär.

Beispiele für diese beiden Fälle bieten die Kreisbüschel; bei reellen Grenzpunkten bilden diese mit dem unendlich fernen Punkt der Radicalaxe das reelle Diagonaldreieck der imaginären Schnittpunkte, bei imaginären Grenzpunkten sind jene Richtung und die Centrale die einzigen reellen Elemente desselben.

272. **Gattungen der Kegelschnitte im Büschel.** So lange im Viereck der Grundpunkte zwei reelle Schnittsehnen eines Paares einen endlichen Winkel einschließen, können wir sie als die beiden Coordinatenaxen annehmen.

Nennen wir die Axenabschnitte λ, λ' bez. μ, μ', so sind in einer Gleichung zweiten Grades, welche sich für $y = 0$ bez. $x = 0$ reduciert auf $x^2 - (\lambda + \lambda')x + \lambda\lambda' = 0$ bez. $y^2 - (\mu + \mu')y + \mu\mu' = 0$, die Coefficienten zu bestimmen aus

$$2a_{13} = -a_{11}(\lambda + \lambda'), \quad 2a_{23} = -a_{22}(\mu + \mu'),$$
$$a_{33} = a_{11}\lambda\lambda' = a_{22}\mu\mu',$$

während $a_{12} = k$ völlig unbestimmt bleibt. Mit $a_{33} = \lambda\lambda'\mu\mu'$ können wir also die Gleichung des Büschels schreiben

$$\mu\mu'x^2 + 2kxy + \lambda\lambda'y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x$$
$$- \lambda\lambda'(\mu + \mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0.$$

Hier kann man sofort den Einfluß des Umstandes erkennen, ob die Grundpunkte ein einfaches Viereck mit lauter



ausspringenden Winkeln oder mit einem einspringenden Winkel zulassen. Das hängt nur davon ab, ob die Producte $\lambda\lambda'$ und $\mu\mu'$ gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben. Im letzten Falle ist $\lambda\lambda'\mu\mu'$ negativ, also kann auch $a_{11}a_{22} - k^2$ für reelle k nicht positiv oder Null sein. *Daher enthält ein Büschel, von dessen Grundpunkten einer im Dreieck der übrigen liegt, keine reellen Ellipsen oder Parabeln* (§ 145). In der Tat mufs offenbar der einem solchen Viereck umgeschriebene Kegelschnitt eine Hyperbel sein, deren beiden Aesten ein und drei Punkte bez. angehören.

Ist dagegen $\lambda\lambda'\mu\mu' > 0$, so liefern die Parameterwerte $k^2 < \lambda\lambda'\mu\mu'$ reelle Ellipsen und speciell $k = \pm\sqrt{(\lambda\lambda'\mu\mu')}$ Parabeln. *Einem convexen Viereck sind stets zwei reelle Parabeln umgeschrieben.* Dasselbe gilt auch für ein Viereck von zwei Paaren conjugirt imaginärer Punkte, da dann auf den reellen Schnittsehnen die Producte $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$ wesentlich positiv sind. Aus demselben Grunde entspringt die Unterscheidung: *Büschel mit zwei reellen Grundpunkten enthalten keine reellen Ellipsen und Parabeln, wenn jene durch den Träger der imaginären Grundpunkte getrennt werden.*

B. 1) *Der Ort der Centra der Kegelschnitte eines Büschels ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Seitenmitten und die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks der Grundpunkte geht. (Neunpunktekegelschnitt des Vierecks.)*

Denn das Centrum des Kegelschnittes von der Gleichungsform des Textes ist gegeben durch

$$a_{11}x + ky + a_{13} = 0, \quad kx + a_{22}y + a_{23} = 0$$

und durch Elimination von k entsteht der Ort

$$a_{11}x^2 - a_{22}y^2 + a_{13}x - a_{23}y = 0.$$

Die Curve geht durch die Punkte $0 \mid 0$, $0 \mid \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')$, $^1(\mu + \mu') \mid 0$, Schnittpunkt und Mitten eines Gegenseitenpaares, etc. Uebrigens ordnen sich offenbar die sechs Seitenmitten zu drei Parallelogrammen; diese haben daher das Centrum des Neunpunktekegelschnittes zum gemeinsamen Mittelpunkt.

Der Ort ist eine Hyperbel, wenn $\lambda\lambda'$ und $\mu\mu'$ gleiche Vorzeichen haben, die Grundpunkte ein einfaches convexes Viereck bilden; die beiden Asymptotenrichtungen $a_{11}x^2 - a_{22}y^2 = 0$ geben also *die Axenrichtungen der Parabeln des Büschels.* Im

Falle eines Büschels aus lauter Hyperbeln ist der Ort ihrer Mittelpunkte eine Ellipse.

2) Jedes Büschel enthält eine gleichseitige Hyperbel. Ihr Parameter folgt aus $a_{11} + a_{22} = 2k \cos \omega$ (§ 179).

3) *Durch vier Punkte, deren jeder der Höhenschnittpunkt im Dreieck der übrigen ist, gehen nur gleichseitige Hyperbeln.*

Wir haben nach § 36, 7 nur rechtwinklige Coordinaten und $\lambda\lambda' = -\mu\mu'$ anzunehmen. Wir können auch kürzer sagen: Durch drei Punkte geht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, weil ein vierter mitbestimmt ist.

4) *Der Ort der Centra aller gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreieck umgeschrieben sind, ist der Feuerbachsche Kreis desselben* (§ 104, 3).

Die Gleichung des Ortes in 1) gibt mit $a_{11} = a_{22}$ einen Kreis, der die Seiten und Eckenabstände des Höhenschnittpunktes halbirt.

273. Die Gleichung des Kegelschnittbüschels kann verschiedenartig geschrieben werden, indem wir von *irgend* zwei Kegelschnitten des Büschels aus den Parameter zählen. Die Abhängigkeit unter diesen Darstellungen liefert der Satz: *Zwischen den Gleichungen von drei Kegelschnitten eines Büschels besteht eine lineare Identität,* d. h. sind $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ drei solche, so lassen sich Constante k', h' so bestimmen, dafs identisch ist

$$S_1 - k' S_2 = h' S_3.$$

Sind die Coefficienten in S_1, S_2, S_3 bez. a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, so gibt umgekehrt eine lineare Identität zwischen den S_i sechs Gleichungen zur Bestimmung von k und h, deren Verträglichkeit erfordert, dafs alle Determinanten, die aus je drei Reihen der rechteckigen Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33}, & a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \\ b_{11}, & b_{22}, & b_{33}, & b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \\ c_{11}, & c_{22}, & c_{33}, & c_{23}, & c_{31}, & c_{12} \end{vmatrix}$$

gebildet werden können, verschwinden. Offenbar sind nur je vier solche für die c_{ik} linearen Bedingungen unter einander unabhängig. Somit wird der Kegelschnitt $S_1 - kS_2 = 0$ auch durch die Gleichung $(k' - k)\, S_1 + h'kS_3 = 0$ etc. repräsentirt. Nun können wir statt der einen oder statt beider Ausgangscurven $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ Linienpaare einführen. Sind etwa

$L_1 = 0$, $L_2 = 0$; $L_3 = 0$, $L_4 = 0$ zwei Schnittsehnenpaare, so ist in

$$L_3 L_4 - k L_1 L_2 = 0$$

die Gleichung jedes dem Viereck umgeschriebenen Kegelschnittes enthalten, jedoch nur dann in reeller Form, wenn das Viereck ganz reell oder ganz imaginär ist.

Diese Gleichungsform liefert z. B. den Satz: *Sind die Schnittsehnenpaare Rechtwinkelpaare, so besteht das Büschel nur aus gleichseitigen Hyperbeln.* Denn bei rechtwinkligen Coordinaten sind die Coefficienten von x^2 und y^2 dann sowol in $L_1 L_2$ als $L_3 L_4$, daher auch in $L_3 L_4 - k L_1 L_2$, entgegengesetzt gleich (§ 272, 1).

Weil aber wenigstens ein Schnittsehnenpaar $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ reell ist[68]), *so kann jedes Kegelschnittbüschel durch einen Kegelschnitt und ein Linienpaar stets reell definirt werden:*

$$S - k L_1 L_2 = 0,$$

wie schon an der Form $S - kxy = 0$ des § 272 erkennbar ist. Die Schnittpunkte von $S = 0$ mit $L_1 = 0$ bez. $L_2 = 0$ mögen P_1, Q_1 bez. P_2, Q_2 heifsen. Den Parameterwerten $k = 0$ und $k = \infty$ entspricht $S = 0$ und $L_1 L_2 = 0$, also mufs die cubische Gleichung zur Bestimmung der Parameter der Linienpaare sich auf eine quadratische reduciren.

B. 1) Wenn drei Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ gegeben sind, und zwei andere $S' = 0$, $S'' = 0$ durch die bez. dem ersten und zweiten, dem ersten und dritten von ihnen gemeinsamen Punkte gelegt werden, so liegen die vier gemeinsamen Punkte dieser letzteren und die des Paares $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ auf einem und demselben Kegelschnitt.

Denn die Gleichungen der Kegelschnitte S', S'' sind $S_1 + k' S_2 = 0$, $S_1 + k'' S_3 = 0$, und einer der durch ihre Schnittpunkte gehenden Kegelschnitte ist $k' S_2 - k'' S_3 = 0$.

2) Die Gleichung des Kegelschnittes, der durch $1 \mid 2$, $3 \mid 5$, $-1 \mid 4$, $-3 \mid -1$, $-4 \mid 3$ geht, wird erhalten, indem man die Gleichungen der Seiten des durch die vier ersten Punkte gebildeten Vierecks bestimmt und in die Gleichung

$$(3x - 2y + 1)(5x - 2y + 13) = k(x - 4y + 17)(3x - 4y + 5)$$

die Coordinaten des fünften Punktes zur Bestimmung von k

substituirt. Man findet $k = -\frac{221}{19}$, also die Gleichung des Kegelschnittes

$$79x^2 - 320xy + 301y^2 + 1101x - 1665y + 1586 = 0.$$

3) Man bilde und untersuche die Bedingungen, unter welchen drei Kreise demselben Büschel angehören.[69])

274. **Berührungsbüschel.** Äufserst brauchbar ist die Gleichungsform $S - kL_1L_2 = 0$, z. B. um die speciellen Beziehungen zwischen Kegelschnitten in allgemeinerer Form als in § 232 darzustellen. Die Kegelschnitte $S = 0$, $S - kL_1L_2 = 0$ berühren einander, d. h. zwei ihrer Schnittpunkte fallen zusammen, wenn entweder eine der Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ berührt, oder wenn $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sich in einem Punkte von $S = 0$ schneiden.

Wenn also $T = 0$ die Gleichung der Tangente von $S = 0$ im Punkte $x' | y'$ ist, so ist

$$S - T(a_1x + a_2y + a_3) = 0$$

die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, welcher $S = 0$ im Punkte $x' | y'$ berührt; noch drei weitere Bedingungen sind erforderlich, um die Bestimmung des Kegelschnittes durch die Ermittelung von a_1, a_2, a_3 zu vollenden.

Wenn die Gerade $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ durch den Punkt $x' | y'$ geht, so fallen drei von den vier Schnittpunkten zusammen; *die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, welcher $S = 0$ im Punkte $x' | y'$ osculirt, ist*

$$S - T\{a_1(x - x') + a_2(y - y')\} = 0.$$

Wenn insbesondere die Gleichung des osculirenden Kreises verlangt ist, so haben wir nur auszudrücken, dafs in dieser Gleichung erstens der Coefficient von xy verschwindet, und zweitens die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich sind, und erhalten die Werte von a_1 und a_2 aus diesen Bedingungsgleichungen.

Die beiden Kegelschnitte haben endlich vier zusammenfallende Schnittpunkte, wenn die Geraden $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ und $T = 0$ zusammenfallen. *Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, welcher mit $S = 0$ im Punkte $x' | y'$ eine Berührung dritter Ordnung (Hyperosculation) hat, ist*

$$S - kT^2 = 0. \quad (\S\ 232.)$$

Ein Kegelschnitt besitzt in jedem Punkte eine hyperosculirende Parabel, denn von den zwei Parabeln, die durch vier Grundpunkte gehen (§ 215) zerfällt nun die eine in $T^2 = 0$.

B. 1) Wenn die Axen des Kegelschnittes $S_1 = 0$ zu denen des Kegelschnittes $S_2 = 0$ parallel sind, so haben auch die Axen von $S_1 - kS_2 = 0$ dieselbe Richtung.

Denn für Coordinatenaxen, welche den Axen von $S_1 = 0$ parallel sind, enthalten weder S_1 noch S_2 das Glied xy. Wenn z. B. $S_1 = 0$ einen Kreis darstellt, so sind die Axen von $S - kS_2 = 0$ denen von $S_1 = 0$ parallel; wenn jenes ein Linienpaar repräsentirt, so geben die Winkelhalbirenden desselben die Axenrichtungen und wir erhalten den Satz des § 236.

2) Sind die Coordinatenaxen den Axen von $S = 0$ und denen von $S - kL_1L_2 = 0$ parallel, so sind L_1 und L_2 von der Form $a_1x + a_2y + a_3$, $a_1x - a_2y + a_3'$.

3) Gleichung des osculirenden Kreises für einen Centralkegelschnitt.

Die Gleichung mufs nach dem Texte von der Form sein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)\left\{a_1(x - x') + a_2(y - y')\right\}.$$

Die erste Bedingung des Textes reducirt sie auf

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right);$$

und aus der zweiten Bedingung ergibt sich $\lambda = b'^2 : (b^2 - a^2) = -b'^2 : c^2$ (vgl. § 184); also lautet die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2a^2\left(\frac{x'^3x}{a^4} - \frac{y'^3y}{b^4}\right) + a'^2 - 2b'^2 = 0.$$

4) Die Gleichung des osculirenden Kreises der Parabel ist

$$(p^2 + 4px')(y^2 - px) = \left\{2yy' - p(x + x')\right\}\left\{2yy' + p(x - 3x')\right\}.$$

5) Die Gleichung der Parabel, welche einen auf Tangente und Normale bezogenen Kegelschnitt im Nullpunkt hyperosculirt, ist

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2 + 2a_{23}y = 0.$$

6) Die hyperosculirende Parabel hat eine zum Durchmesser $2a'$ des Kegelschnittes parallele Axe und den Hauptparameter $p = 2a^2b^2 : a'^3$.

275. **Doppelberührung.** Wenn der Kegelschnitt $S = 0$ von den Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ geschnitten wird, so rücken die Punkte P_1 und P_2, Q_1 und Q_2 bez. um so näher zusammen,

je näher die Sehnen der Deckung mit derselben Geraden $L = 0$ kommen. Daher repräsentirt die Gleichung $S - kL^2 = 0$ *ein Büschel von Kegelschnitten, welche mit $S = 0$ in der gemeinsamen Sehne $L = 0$ je eine reelle oder imaginäre doppelte Berührung haben* (§ 231).

Ebenso repräsentirt $L_1 L_2 - kL^2 = 0$ jeden Kegelschnitt, der die Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ in den Punkten berührt, in welchen sie von der Geraden $L = 0$ geschnitten werden (§ 156). Die Gleichung eines Kegelschnittes, der mit $S = 0$ in den beiden Punkten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ eine doppelte Berührung hat, kann ebendesshalb auch in der Form $S - kT_1 T_2 = 0$ dargestellt werden, wenn $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Tangenten von $S = 0$ in diesen Punkten ausdrücken.

Ein Büschel doppelt berührender Kegelschnitte hat unendlich viele gemeinsame Polardreiecke, die alle die Berührungssehne als eine Seite und ihren Pol als Gegenecke enthalten (vgl. § 271). Denn jeder Punkt von $L = 0$ ist ein zum Schnittpunkt $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ conjugirt harmonischer Pol; seine Polare geht sowol durch jenen als durch den bezüglich der Berührungspunkte zu ihm conjugirt harmonischen Punkt, ist also in Bezug auf alle Kegelschnitte dieselbe. Somit bildet jedes zu $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ harmonische Punktepaar mit dem Pol der Berührung ein Polardreieck. Jede einzelne der Tangenten $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ bildet mit $L = 0$ zusammen eine Degenerationsform desselben*).

276. **Unendlich ferne Schnittsehne.** Die Gleichungsform $S - kL_1 L_2 = 0$ umfaſst namentlich auch die Specialisirung für den Fall, daſs eine oder mehrere Schnittsehnen in die unendlich ferne Gerade fallen. Man hat sich nur zu erinnern, daſs deren Gleichung die Form $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$ hat und in jedem Gliede von zu geringem Grade eine oder mehrere Constante c durch $0 \cdot x + 0 \cdot y + c$ ersetzt gedacht werden können.

So ist die Gleichung $S - kL = 0$ als der besondere Fall der Form $S - L_1 L_2 = 0$ anzusehen, in welchem

*) Das Dreieck $L = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ ist *kein* Polardreieck.

$L_2 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + k$ ist. Sie repräsentirt daher Kegelschnitte, welche durch die Schnittpunkte von $S = 0$ mit $L = 0$ und $0 \cdot x + 0 \cdot y + k = 0$ gehen. Diese Gleichungen $S - kL = 0$ stimmen auch offenbar in den quadratischen Gliedern alle überein (§ 145), definiren daher bei beliebigem L alle Kegelschnitte mit parallelen Asymptoten (§ 242). *Somit bilden alle ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte mit zwei festen Schnittpunkten im Endlichen ein Büschel*, wie z. B. das Kreisbüschel (§ 124). Dieses Büschel enthält im allgemeinen keine Parabeln, denn zwei der Schnittsehnenpaare bestehen aus Parallelen (§ 215). Dagegen sind seine Curven ausschliefslich parallelaxige Parabeln, wenn $S = 0$ selbst eine Parabel ist.

Ferner ist auch die Gleichung $S = k$ ein specieller Fall der Gleichung $S = L^2$, nämlich $S = k\,(0 \cdot x + 0 \cdot y + c)^2$. Sie bezeichnet daher (§ 275) einen Kegelschnitt, welcher mit $S = 0$ eine doppelte Berührung hat, deren Berührungssehne unendlich fern ist. Der Pol derselben ist in jedem der Kegelschnitte das Centrum (§ 157) und allen gemeinsam. *Daher bilden alle ähnlichen und coaxialen Kegelschnitte ein Büschel mit Doppelberührung*, wie z. B. das Büschel concentrischer Kreise. Da für Parabeln insbesondere die unendlich ferne Gerade Tangente ist (§ 274), *so bilden die Parabeln $S = k$ ein Osculationsbüschel* (§ 244).

Endlich kann jede nicht-symbolische Gleichung selbst als unter der Gleichungsform $L_3 L_4 - k L_1 L_2 = 0$ inbegriffen angesehen werden. Denn im allgemeinen Ansatz

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

liefert das erste Trinom, gleich Null gesetzt, ein Linienpaar $L_3 L_4 = 0$ aus dem Nullpunkt und das zweite Trinom eine durch die unendlich ferne Gerade $L_2 = 0$ zu einem Paar ergänzte Gerade $L_1 = 0$. Die Asymptotenparallelen $L_3 = 0$ $L_4 = 0$ treffen die Curve in zwei endlichen Schnittpunkten von der Sehne $L_1 = 0$.

Speciell zeigt die allgemeine Gleichung der Parabel

$$(\alpha x + \beta y)^2 + (2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = 0 \quad (\S\ 211),$$

als von der Form $L_1 L_2 - kL^2 = 0$, dafs die Gerade $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ und die unendlich ferne die Curve in den Punkten des Durchmessers $\alpha x + \beta y = 0$ berühren. Von derselben Art ist auch die auf die Asymptoten bezogene Hyperbelgleichung $xy = k^2 = (0 \cdot x + 0 \cdot y + k)^2$ (§ 178), nach welcher $x = 0$, $y = 0$ Tangenten der Curve mit unendlich ferner Berührungssehne sind.

277. **Die Normal-Gleichungsform**

$$l_1 L_1^2 + l_2 L_2^2 + l_3 L_3^2 = 0$$

definirt einen Kegelschnitt, bezüglich dessen die Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ *Seiten eines Polardreiecks sind* (§ 159).

Im bisherigen Zusammenhange erkennt man dies, indem man sie in drei äquivalenten Formen schreibt, deren eine Seite nur je eines der Quadrate bildet. Denn die Form $l_2 L_2^2 + l_2 L_3^2 = - l_1 L_1^2$ zeigt, dafs $l_2 L_2^2 + l_3 L_3^2 = 0$ ein Linienpaar darstellt, das zu dem Paare $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ harmonisch ist und aus den Tangenten der Curve zu der Berührungssehne $L_1 = 0$ besteht. Also ist die Ecke $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ der Pol der Seite $L_1 = 0$. Ebenso folgt aus $l_3 L_3^2 + l_1 L_1^2 = - l_2 L_2^2$ und $l_1 L_1^2 + l_2 L_2^2 = - l_3 L_3^2$, dafs $L_3 = 0$, $L_1 = 0$ die Polare $L_2 = 0$ und $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ die Polare $L_3 = 0$ hat.

Setzen wir ein reelles Polardreieck voraus, so haben wir zu unterscheiden, ob die drei Coefficienten l, m, n dasselbe oder ob nur zwei von ihnen dasselbe Vorzeichen haben. Nur im zweiten Falle ist der definirte Kegelschnitt reell. Nehmen wir etwa $l_1 = \lambda_1^2$, $l_2 = \lambda_2^2$, $l_3 = - \lambda_3^2$ an, so sind die zu den Seitenpaaren des Dreiecks harmonischen Tangentenpaare $\lambda_2 L_2 \pm \lambda_3 L_3 = 0$, $\lambda_1 L_1 \pm \lambda_3 L_3 = 0$ und $\lambda_1 L_1 \pm i\lambda_2 L_2 = 0$, womit die Lage des Dreiecks gemäfs § 159 verdeutlicht wird. Speciell für $\lambda_1^2 L_1^2 + l_2^2 L_2^2 = c$ $(L_3 = c)$ besteht das Polardreieck aus der unendlich fernen Geraden und zwei conjugirten Durchmessern $L_1 = 0$, $L_2 = 0$.

In gleicher Weise bestätigt man, dafs die Gleichung

$$a_{11} L_1^2 + 2a_{12} L_1 L_2 + a_{22} L_2^2 = a_{33} L_3^2$$

einen Kegelschnitt bezeichnet, für welchen der Punkt $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ der Pol der Geraden $L_3 = 0$ ist; denn die linke

Seite stellt, durch Null gesetzt, ein Linienpaar durch jenen Punkt dar. Ist speciell $L_3 = 1$, so haben wir die Centralgleichung für das Centrum $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ (§ 164).

Nun besitzen aber zwei Kegelschnitte ein gemeinsames Polardreieck, *daher können wir im allgemeinen die Gleichungen zweier Kegelschnitte gleichzeitig auf die Normalform gebracht voraussetzen:*

$$l_1 L_1^2 + l_2 L_2^2 + l_3 L_3^2 = 0, \quad l'_1 L_1^2 + l'_2 L_2^2 + l'_3 L_3^2 = 0.$$

Jedoch erscheinen diese Darstellungsformen imaginär, wenn das Polardreieck imaginär ist, d. h. wenn zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte existiren (§ 271).

278. *Wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten in doppelter Berührung sind, so gehen ihre Berührungssehnen mit diesem und eines von ihren drei Schnittsehnenpaaren durch einen Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.*

Für $S = 0$ als die Gleichung des dritten Kegelschnittes sind $S + L_1^2 = 0$, $S + L_2^2 = 0$ die Gleichungen der beiden ersten. Durch Subtraction derselben von einander erhält man als Gleichung der fraglichen Schnittsehnen $L_1^2 - L_2^2 = 0$; aber die Geraden $L_1 \pm L_2 = 0$ sind zu den Berührungssehnen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ harmonisch.

B. 1) Wenn zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung sind, so schneiden sich die Sehnen, welche ein durch die Berührungspunkte willkürlich gelegter Kegelschnitt mit beiden bestimmt, auf der Berührungssehne.

Die Gleichungen $S = 0$, $S + L_1^2 = 0$, $S + L_1 L_2 = 0$ enthalten den Beweis. Für Linienpaare durch die Berührungspunkte und für Hyperbeln mit denselben Asymptoten ergeben sich speciellere Sätze.

2) Die Berührungssehnen von zwei Kegelschnitten mit einem Paare ihrer gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch den Schnittpunkt eines Paares ihrer gemeinsamen Sehnen.[70])

Wenn man den Kegelschnitt $S = 0$ als ein Linienpaar denkt, so erhält man diesen Satz als einen Specialfall des Hauptsatzes.

Wenn die Asymptoten einer Hyperbel eine Ellipse berühren, so sind zwei ihrer Schnittsehnen der Berührungssehne parallel und von ihr gleichweit entfernt.

3) Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen und die des entsprechenden ihm umgeschriebenen Vierecks gehen durch einen Punkt und trennen einander harmonisch.

Dies ist der specielle Fall von dem Satze des Textes, in welchem die Kegelschnitte $S + L_1^2 = 0$, $S + L_2^2 = 0$ sich auf je ein Linienpaar reduciren. Der Beweis kann aber für diesen Fall auch direct geführt werden wie folgt: Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$; $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ die Gleichungen von zwei Tangentenpaaren und $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ die ihrer Berührungssehnen, d. h. der Diagonalen des entsprechenden eingeschriebenen Vierecks, so kann man die Gleichung des Kegelschnittes in jeder der Formen $T_1 T_2 - L_1^2 = 0$, $T_3 T_4 - L_2^2 = 0$ schreiben. Daher sind diese identisch oder nur um einen constanten Factor verschieden, d. h. es entspringt die Identität $T_1 T_2 - \lambda T_3 T_4 = L_1^2 - \lambda L_2^2$. In dieser drückt die rechte Seite durch ihr Verschwinden ein Linienpaar aus, das mit $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ein harmonisches Büschel bildet, während die linke Seite zeigt, daſs diese Geraden die Punkte verbinden

$$T_1 = T_3 = 0, \quad T_2 = T_4 = 0 \quad \text{und} \quad T_1 = T_4 = 0, \quad T_2 = T_3 = 0.$$

4) Man stelle die Gleichungen der Diagonalen des Vierecks auf, welches von den Tangenten eines Centralkegelschnittes in den vier Punkten gebildet wird, denen die excentrischen Winkel 2α, 2β, 2γ, 2δ entsprechen.

In diesem Falle ist (§ 173)

$$T_1 = \frac{x}{a}\cos 2\alpha + \frac{y}{b}\sin 2\alpha - 1, \qquad T_2 = \frac{x}{a}\cos 2\beta + \frac{y}{b}\sin 2\beta - 1;$$

$$L = \frac{x}{a}\cos(\alpha + \beta) + \frac{y}{b}\sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta),$$

und man findet leicht

$$T_1 T_2 - L^2 = -\sin^2(\alpha - \beta)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right\}, \text{ u. s. w.}$$

Nach den Ergebnissen von 3) findet man für die Diagonalen

$$L_1 \sin(\gamma - \delta) = \pm L_2 \sin(\alpha - \beta).$$

279. *Wenn drei Kegelschnitte in doppelter Berührung mit einem vierten Kegelschnitt sind, so gehen die Schnittsehnen der drei Paare, welche sich auf einer Berührungssehne schneiden, viermal zu je dreien durch einen Punkt.*

Denn, sind die Gleichungen der Kegelschnitte von der Form

$$S + L_1^2 = 0, \quad S + L_2^2 = 0, \quad S + L_3^2 = 0,$$

so sind die ihrer Schnittsehnen, zu dreien geordnet,

$$\begin{aligned} L_1 - L_2 = 0, \quad L_2 - L_3 = 0, \quad L_3 - L_1 = 0;\\ L_1 + L_2 = 0, \quad L_2 + L_3 = 0, \quad L_3 - L_1 = 0;\\ L_1 + L_2 = 0, \quad L_2 - L_3 = 0, \quad L_3 + L_1 = 0;\\ L_1 - L_2 = 0, \quad L_2 + L_3 = 0, \quad L_3 + L_1 = 0.\end{aligned}$$

Wie in § 278 können specielle Fälle dieses Satzes gebildet werden, indem man voraussetzt, daſs einer dieser Kegelschnitte oder mehrere von ihnen zerfallen. So z. B. bezeichnet $S = 0$, wenn dieser Kegelschnitt in ein Linienpaar degenerirt, zwei gemeinschaftliche Tangenten der Kegelschnitte $S + L_2^2 = 0$, $S + L_3^2 = 0$; wenn dann $L_1 = 0$ eine durch den Schnittpunkt dieser Tangenten gehende Gerade ausdrückt, so zerfällt auch $S + L_1^2 = 0$ in ein Paar von Geraden, die durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten gehen. *Wenn man durch den Schnittpunkt von zwei gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte ein Paar von Geraden zieht, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem ersten und zweiten Kegelschnitt in Punkten einer der Schnittsehnen der Kegelschnitte.* Dies ist die Erweiterung eines in § 136 für Kreise bewiesenen Satzes und läſst erkennen, *wie* die Schnittpunkte dabei einander zuzuordnen sind. *Insbesondere schneiden sich die Tangenten in den Schnittpunkten jener Geraden mit den Kegelschnitten in einer der Schnittsehnen.*

280. **Satz von Brianchon.** Wenn die durch $S + L_1^2 = 0$, $S + L_2^2 = 0$, $S + L_3^2 = 0$ dargestellten Kegelschnitte sämmtlich in Linienpaare zerfallen, so bilden sie ein dem Kegelschnitt $S = 0$ umgeschriebenes Sechsseit; die Schnittsehnen sind Diagonalen dieses Sechsseits, und man erhält den *Satz von Brianchon:*[71]) *In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechsseit schneiden sich die drei Verbindungsgeraden der Gegenecken in einem Punkte.* Wenn die Seiten des Sechsseits in irgend einer Reihenfolge durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind, so sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 die im Satze bezeichneten Diagonalen, deren Schnittpunkt der zu dieser Reihenfolge gehörige *Brianchon'sche Punkt* heiſst.

Durch Vertauschung der Ordnung der Seiten des Sechsseits lassen sich aber aus ihnen $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, d. i. 60 *verschiedene Brianchon'sche Sechsseite* bilden, und für jedes derselben gilt der ausgesprochene Satz, existirt also ein Brianchonscher Punkt.

Der Beweis kann auch folgendermafsen (vgl. § 278, 3) geführt werden. Sind

$$T_1 T_4 - L_1^2 = 0, \quad T_2 T_5 - L_2^2 = 0, \quad T_3 T_6 - L_3^2 = 0$$

äquivalente Formen der Gleichung des Kegelschnittes $S = 0$, so stellen $L_1 = L_2 = L_3$ drei Diagonalen dar, die sich in einem Punkte schneiden. Da aber keine Regel gegeben ist, nach der die durch die Gleichung $L_1 = + L_2$ dargestellte Diagonale des Vierseits $T_1 T_4 T_2 T_5$ bestimmt werden kann, so beweist dieser Schlufs nur dies, dafs die Verbindungslinien der Punkte 12 und 45, 23 und 56 sich entweder in der Verbindungsgeraden von 34 und 61 oder von 13 und 46 begegnen. Wäre jedoch das letztere der Fall, so würden die Dreiecke 1, 2, 3 und 4, 5, 6 perspectivisch collinear liegen (§ 64, 4), daher die Schnittpunkte von 1, 4; 2, 5; 3, 6 in einer Geraden enthalten sein; wenn wir also fünf von diesen Tangenten bestimmen, so müfste die sechste durch einen festen Punkt gehen, statt einen Kegelschnitt zu umhüllen. Also ist nur die erste Folgerung zulässig.

281. **Der Satz von Brianchon bietet das Mittel,** *aus fünf gegebenen Tangenten eines Kegelschnittes alle Tangenten desselben zu construiren.* Dabei sollen keine drei Tangenten durch einen Punkt gehen, da sonst die Curve in ein Punktepaar degenerirt (§ 250).

Denn wenn wir auf einer von ihnen, etwa 1, einen Punkt P annehmen, so können wir die zweite Tangente 6 des Kegelschnittes von P aus mit Hilfe dieses Satzes bestimmen: die Verbindungslinien der Punktepaare 12, 45; 23, 56; 34, 61 schneiden sich in einem Punkte O; nach der Voraussetzung sind die Geraden 12, 45 und 34, 61 d. i. 34, P bekannt, somit auch ihr Schnittpunkt O; zieht man daher die Gerade O, 23, so schneidet dieselbe die Tangente 5 in einem Punkte Q, welcher der Tangente 6 aus P ebenfalls angehört; PQ ist also diese Tangente 6. Man kann sagen: *Die Tangente* 6 *ist die Basis eines veränderlichen Dreiseits, dessen Basisecken sich auf den festen Geraden* 1 *und* 5 *bewegen, während sein Scheitel die Gerade* 12, 45 *beschreibt, und seine Seiten sich um die festen Punkte* 23 *und* 34 *drehen.*

Es fordert nur eine specielle Anwendung dieser Methode, um *aus fünf Tangenten* 1, 2, 3, 4, 5 *eines Kegelschnittes den Berührungspunkt T einer unter ihnen z. B. von* 1 *zu ermitteln.*

Man läfst die sechste Tangente 6 mit 1 zusammenfallen und bestimmt ihren Schnittpunkt T mit derselben (§ 251), d. h. man zieht die Gerade 1 2, 4 5 und schneidet sie mit 2 3, 5 6 oder 5 1 in O, zieht dann 3 4, O und erhält T auf 1 6 da, wo diese Gerade sie schneidet. So sind also auch die Punkte des Kegelschnitts zu construiren und man erkennt, dafs die Angabe einer Tangente mit ihrem Berührungspunkt der von *zwei* Tangenten äquivalent ist.

Weil die Construction nur Schnittpunkte von Geraden und Verbindungsgeraden benutzt, nennt man sie linear. *Aus fünf Tangenten ist eine Curve zweiter Classe durch lineare Construction bestimmt.* Die Construction nimmt sehr specielle Formen an, wenn sich unter den Tangenten der Centralcurven eine Asymptote, bei der Parabel die unendlich ferne Gerade befindet.

B. 1) Man soll zu fünf Tangenten das Centrum des Kegelschnittes bestimmen.

Dazu ist nur nötig, die zu einer der gegebenen parallele Tangente (PO unendlich fern) und für diese beiden die Berührungspunkte zu construiren; die Verbindungslinie derselben ist ein Durchmesser, sein Halbirungspunkt das Centrum.

2) Man construire die Hyperbel aus einer Asymptote und drei Tangenten.

Die Asymptote heifse 1 und 2, ihre Richtung ist 12.

3) Welches ist die einfachste Construction der Hyperbel aus den Asymptoten und einer Tangente?

Man mache die unendlich ferne Gerade zu einer Diagonalen.

4) Man zeige die Halbirung des Segmentes einer Tangente zwischen den Asymptoten durch den Berührungspunkt (§ 188) als Specialfall der Construction.

5) Man construire eine Parabel aus vier Tangenten, insbesondere ihren Berührungspunkt mit einer derselben.

282. **Kegelschnittschaar.** Die Brianchon'sche Construction zeigt deutlich, dafs von den Kegelschnitten mit vier festen Tangenten nur einer eine gegebene Gerade der Ebene berührt. Wenn wir die Gleichung eines solchen Kegelschnittes

in Liniencoordinaten schreiben, so mufs sie also eine unbestimmte Constante linear enthalten, da diese durch Einsetzung eines Wertepaares $\xi' | \eta'$ eindeutig bestimmt sein mufs. Daher haben wir nach dem Dualitätsprincip das Recht, die symbolischen Formeln auch nach Liniencoordinaten zu interpretiren (§ 79).

Bedeuten $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$ die Tangentialgleichungen zweier Kegelschnitte, *so stellt die einen Parameter $\varkappa$ linear enthaltende Gleichung*

$$\Sigma_1 - \varkappa \Sigma_2 = 0$$

*jeden Kegelschnitt dar, der die gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$ berührt. Man nennt das System der einem Vierseit von Grundtangenten eingeschriebenen Kegelschnitte eine Kegelschnittschaar. Büschel und Schaar sind duale Begriffe**). Wir kennen ein Beispiel schon in der Schaar der confocalen Kegelschnitte (§ 250).

Der Parameter kann wiederum auf dreifache Weise so bestimmt werden, dafs die linke Seite der Gleichung $\Sigma_1 - \varkappa \Sigma_2$ in lineare Factoren Λ_1, Λ_2 zerfällt (§ 270). Dies geschieht aber, sobald eine fünfte Tangente gegeben ist, welche durch eine Ecke des Vierseits geht. *Also sind in dem vollständigen Grundvierseit die drei Gegeneckenpaare zerfallende Kegelschnitte der Schaar.* Eines derselben ist stets reell.

Daher kann die Gleichung einer Schaar stets in der Form geschrieben werden (§ 273)

$$\Sigma - \varkappa \Lambda_1 \Lambda_2 = 0,$$

wo $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$ reelle Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangentenpaare darstellen. Die Tangentialgleichung eines einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnittes ist von der Form (§ 273)

$$\Lambda_3 \Lambda_4 - \varkappa \Lambda_1 \Lambda_2 = 0.$$

Die Kegelschnitte $\Sigma - \varkappa \Lambda_1 \Lambda_2 = 0$ berühren $\Sigma = 0$, wenn entweder einer der Punkte $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$ auf dem Kegel-

*) Wir wollen diese Gegenüberstellung festhalten, obwol überhaupt auch jedes lineare System von Curven, als Orte oder Enveloppen betrachtet, oft als *eine Curvenschaar* bezeichnet wird.

schnitt $\Sigma = 0$ liegt oder die Verbindungsgerade von beiden denselben berührt (§ 274).

Die Kegelschnitte $\Sigma = 0$ und $\Sigma - \varkappa \Delta^2 = 0$ berühren einander doppelt, so dafs $\Delta = 0$ den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten, den Berührungspol bezeichnet. Während im allgemeinen zwei Kegelschnitte ein Büschel und eine Schaar als ganz verschiedene Systeme bestimmen, *bilden doppeltberührende Kegelschnitte gleichzeitig ein Büschel und eine Schaar.* Sind insbesondere $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ die Berührungspnnkte, $\Delta_1 \Delta_2 = 0$ also ein zerfallender Kegelschnitt der Schaar, so läfst sich diese auch in der Gleichungsform darstellen

$$\Delta_1 \Delta_2 - \varkappa \Delta^2 = 0.$$

Ferner liefert § 279 den Satz: Wenn drei Kegelschnitte in doppelter Berührung mit einem vierten sind, so liegen die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangentenpaare viermal zu dreien in einer Geraden. Man erkennt schon, dafs dies auf einen zum Brianchon'schen dualen Satz führen mufs, den wir in § 284 auf anderem Wege entwickeln.

Namentlich aber ist die ganze Polarentheorie dualistisch übertragbar. Denn nach der Definition des Teilverhältnisses in einer Punktreihe $\xi - \lambda \xi' \mid \eta - \lambda \eta'$ in § 77 gibt die Einsetzung dieser Coordinaten in eine Gleichung zweiten Grades $\Sigma = 0$, und die Bedingung, dafs der Coefficient von λ in dem Substitutionsresultat verschwinde, die Relation (§ 157)

$$A_{11} \xi' \xi + A_{12} (\xi' \eta + \eta' \xi) + A_{22} \eta' \eta + A_{13} (\xi' + \xi) \\ + A_{23} (\eta' + \eta) + A_{33} = 0.$$

Ersetzen wir also A_{11} etc. durch $A_{11} - \varkappa A_{11}'$ etc., so sehen wir: *Die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar bilden eine gerade Punktreihe.* Die einander so zugeordneten Geraden heifsen doppelt conjugirte Polaren. Es ist nur ein Specialfall davon: *Der Ort der Centra der einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist eine Gerade;* nach § 163 sind die Coordinaten der Centra

$$\frac{A_{13} - \varkappa A_{13}'}{A_{33} - \varkappa A_{33}} \;\Big|\; \frac{A_{23} - \varkappa A_{23}'}{A_{33} - \varkappa A_{33}'}.$$

Weil die drei Gegeneckenpaare des Grundvierseits Kegelschnitte der Schaar sind, welche die Mitten der von ihnen begrenzten Strecken zu Mittelpunkten haben, so geht die Mittelpunktsgerade durch diese.

283. **Lineare Kegelschnittsysteme.** Die symbolische Bezeichnung führt über die Betrachtung des durch zwei Kegelschnitte bestimmten Systems (Büschel und Schaar) hinaus. Besteht zwischen den Gleichungen von drei Kegelschnitten in Punktcoordinaten $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ keine identische, lineare Relation (§ 273), so heifsen dieselben *linear unabhängig*. Bezeichnen ferner $\lambda = k_2 : k_1$, $\mu = k_3 : k_1$ zwei durchaus willkürliche Parameter, so bilden die Kegelschnitte, deren Gleichungen in der Form

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + k_3 S_3 = 0$$

enthalten sind, ein System, welches wir nach Analogie von § 128 ein *Kegelschnittnetz* nennen. Unter den Kegelschnitten eines solchen Netzes befinden sich noch unendlich viele, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zwar bilden dieselben ein Büschel. Denn durch Einsetzung der Coordinaten des Punktes gewinnen wir eine Gleichung, welche $k_3 : k_1$ linear durch $k_2 : k_1$ auszudrücken gestattet, dürfen also nur noch *einen* linearen Parameter als willkürlich betrachten (§ 268).

Da das Netz unendlich viele Büschel enthält, sagt man, es umfasse zweifach unendlich viele Curven oder *das Netz ist ein lineares Kegelschnittsystem zweiter Stufe*, das Büschel ein solches erster Stufe. Die Kegelschnitte des Netzes hängen statt von fünf nur von zwei willkürlichen Constanten ab; also müssen die fünf Constanten eines jeden drei linearen, unabhängigen Bedingungen genügen, wie aus der Algebra der linearen Gleichungen bekannt ist. Man kann das drei gegebenen linearen Bedingungen genügende Netz dadurch bilden, dafs man drei Coefficientengruppen a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} bestimmt, welche denselben genügen, denn dann befriedigen auch $k_1 a_{ik} + k_2 b_{ik} + k_3 c_{ik}$ dieselben. Somit bilden alle durch drei Punkte gehenden Kegelschnitte ein Netz, aber dies sind *nicht* mehr allgemeine Netze, da *drei* beliebig gewählte

Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ keine Punkte gemein haben.

Setzen wir die Curven als Tangentengebilde voraus, so gelten dieselben Betrachtungen dualistisch. Sind $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$, $\Sigma_3 = 0$ die Tangentialgleichungen von drei Kegelschnitten, welche nicht derselben Schaar angehören, so definirt

$$\varkappa_1 \Sigma_1 + \varkappa_2 \Sigma_2 + \varkappa_3 \Sigma_3 = 0$$

auch ein lineares Kegelschnittsystem zweiter Stufe, welches man aber etwa als *Kegelschnittgewebe* kennzeichnet. Die Curven desselben genügen drei für die Coefficienten A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} (§ 163) linearen Bedingungen, können in speciellen Systemen z. B. drei feste Gerade berühren. Solchen Systemen sind wir in der Lehre vom Kreise nicht begegnet, weil es nicht unendlich viele Kegelschnitte gibt, die durch zwei feste Punkte gehen und drei weiteren Bedingungen genügen.

Sind nun ferner $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$ bez. $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$, $\Sigma_3 = 0$, $\Sigma_4 = 0$ vier Kegelschnitte, welche nicht demselben Netz bez. Gewebe angehören, so stellt die drei Parameter enthaltende Gleichung

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + k_3 S_3 + k_4 S_4 = 0,$$

bez.

$$\varkappa_1 \Sigma_1 + \varkappa_2 \Sigma_2 + \varkappa_3 \Sigma_3 + \varkappa_4 \Sigma_4 = 0$$

lineare Systeme dritter Stufe dar, welche unendlich viele Netze bez. Gewebe enthalten. Und endlich kann man genau so zu *Kegelschnittsystemen vierter Stufe* aufsteigen, welche noch einer einzigen linearen Bedingung genügen und durch fünf Curven bestimmt sind, die nicht einem System dritter Stufe angehören. Man mufs die Systeme unterscheiden, je nachdem man die Kegelschnitte als Punkt- oder Tangentengebilde, in x- oder ξ-Coordinaten gegeben denkt, etwa *in punctuell-lineare und in tangentiell-lineare Systeme.*

Durch die Gleichungen von sechs ganz beliebigen Kegelschnitten läfst sich demnach die eines jeden vorgelegten Kegelschnittes linear darstellen, denn es sind dann fünf Constanten verfügbar.

284. *Wenn drei Kegelschnitte dieselben zwei Punkte gemein haben, so gehen ihre drei Schnittsehnen, welche keinen dieser Punkte enthalten, durch einen Punkt.*

Ist $S = 0$ die Gleichung des einen Kegelschnittes, $L = 0$ die Gleichung der allen gemeinsamen Sehne, so sind die Gleichungen der beiden andern Kegelschnitte von der Form $S + LL_1 = 0$, $S + LL_2 = 0$; die Gleichung ihrer Schnittsehnen ist daher $L(L_1 - L_2) = 0$; die Gerade $L_1 - L_2 = 0$ geht aber durch den Punkt $L_1 = 0$, $L_2 = 0$. Daher gilt der Satz aber für alle Kegelschnitte des durch die drei bestimmten specіellen Netzes $S + L(k_1 L_1 + k_2 L_2)$.

Der Satz dehnt auf diese Kegelschnitte den Satz über die Radicalaxen von drei Kreisen aus (§ 121), da diese letzteren die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene zur gemeinschaftlichen Sehne haben. Der Satz des § 279 erscheint als fernere Erweiterung desselben: drei Kegelschnitte, welche mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, besitzen vier Radicalcentra, in deren jedem drei ihrer gemeinschaftlichen Sehnen sich schneiden. An die Stelle des sie alle doppelt berührenden Kegelschnittes treten im Falle der Kreise die zwei Punkte, die ihnen allen gemein sind. Der obige Satz kann wie in § 121 so ausgesprochen werden: *Die Kegelschnitte eines Büschels bestimmen mit einem festen, durch zwei der Grundpunkte gehenden Kegelschnitte Schnittsehnen durch einen festen Punkt.*[72]) Man erkennt so, dafs zahlreiche frühere Sätze specielle Formen allgemeinerer Sätze über Kegelschnitte durch zwei feste Punkte sind.

B. Durch die Voraussetzung, dafs einer der drei Kegelschnitte in ein Linienpaar OA, OB degenerirt, entsteht der Satz: Wenn man durch zwei Schnittpunkte A, B von zwei Kegelschnitten Gerade zieht, welche diese in den ferneren Punktepaaren P, p bez. Q, q schneiden, so schneiden sich die Sehnen PQ, pq in der zweiten Schnittsehne CD der Kegelschnitte.

Der Satz gilt insbesondere noch, wenn A, B in einen Berührungspunkt der zwei Kegelschnitte

zusammenrücken; er ist dann auch ein specieller Fall von einem in § 279 gegebenen Satze, weil einer der Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei sich berührenden Kegelschnitten in den Berührungspunkt fällt. (§ 131.)

285. **Satz von Pascal:**[73]) *Die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks liegen in einer Geraden, der Pascal'schen Linie desselben.*

Wir bezeichnen die Ecken des Sechsecks durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 und wollen durch $L_{12} = 0$ die Gleichung der Verbindungsgeraden von 1 mit 2 ausdrücken etc.; dann mufs die Gleichung des Kegelschnittes, da er dem Viereck 1 2 3 4 umgeschrieben ist, sich in der Form schreiben lassen

$$L_{12} L_{34} - L_{23} L_{14} = 0 \quad (\S\ 273);$$

da er auch dem Viereck 4 5 6 1 umgeschrieben ist, so mufs dieselbe Gleichung in der Form auszudrücken sein

$$L_{45} L_{61} - L_{56} L_{14} = 0.$$

Die Identität beider Ausdrucksformen gibt die Gleichung

$$L_{12} L_{34} - L_{45} L_{61} = L_{14} (L_{23} - L_{56}).$$

Die linke Seite der Gleichung, die, gleich Null gesetzt, ihrer Form zufolge eine dem Viereck der Punkte 1; 4; 1 2, 4 5; 3 4, 6 1 umgeschriebene Figur darstellt, mufs somit in zwei Factoren zerlegbar sein, die nur die Diagonalen dieses Vierecks darstellen können. Nun ist $L_{14} = 0$ diejenige Diagonale, welche die Ecken 1 und 4 verbindet, also mufs $L_{23} - L_{56} = 0$ die andere Diagonale sein, welche die Ecken 1 2, 4 5; 3 4, 6 1 mit einander verbindet. Da aber die Form ihrer Gleichung sie als eine durch den Punkt 2 3, 5 6 gehende Gerade charakterisirt, so liegen notwendig die drei Punkte 1 2, 4 5; 2 3, 5 6; 3 4, 6 1 in einer Geraden.[74])

B. 1) Wenn A, B, C drei Punkte einer Geraden und A', B', C' drei Punkte einer andern Geraden sind, so liegen die Schnittpunkte $BC' \mid B'C$, $CA' \mid C'A$, $AB' \mid A'B$ in einer Geraden.

Dieser specielle Fall (§ 94) des Pascal'schen Satzes gilt auch dann noch, wenn die zweite Gerade unendlich fern ist, also die Linienpaare BC', $C'A$; CA', $A'B$; AB', $B'C$ parallel zu drei verschiedenen Geraden gezogen sind.

2) Wenn man vier Gerade auf alle Arten zu dreien com-

binirt, so entstehen vier Dreiecke; die Höhenschnittpunkte dieser Dreiecke liegen in einer Geraden.[75])

Sind a, b, c, d die vier Geraden und a', b', c', d' die zu ihnen rechtwinkligen Linien der Construction, so ergibt sich der Beweis durch die Anwendung des Satzes von 1) auf die drei Schnittpunkte von a, b, c mit d und die drei unendlich entfernten Punkte von a', b', c'. Der Satz folgt auch aus dem Steiner'schen Satze in § 229, 1, denn die vier Höhenschnittpunkte müssen in der Directrix der Parabel liegen, welche die vier Geraden zu Tangenten hat. Die Verbindungslinie der Mitten zwischen den Paaren der Gegenecken des Vierseits der vier Geraden ist zur Axe dieser Parabel parallel, also auf der vorigen Geraden rechtwinklig.

3) Der angezogene Satz von Steiner ist selbst ein specieller Fall von Brianchon's Satz;[76]) denn sind a, b, c drei Tangenten der Parabel, und bezeichnen a', b', c' drei zu ihnen rechtwinklige Tangenten, ist überdies ∞ die unendlich ferne Gerade, so betrachten wir die sechs Tangenten a, b, c, c', ∞, a' und sehen, dafs die Geraden ab, $c'\infty$; bc, $a'\infty$; cc', aa' sich in einem Punkte schneiden; von ihnen sind aber die beiden ersten Höhen des betrachteten Dreiecks, und die letzte ist die Directrix, in welcher jedes Paar rechtwinkliger Tangenten sich schneidet (§ 227).

286. **Pascal's Theorem gestattet,** *aus fünf Punkten eines Kegelschnittes denselben Punkt für Punkt zu construiren.* Dabei sollen keine drei Punkte in einer Geraden liegen, ansonst die Gerade dieser drei Punkte und die Verbindungsgerade der beiden übrigen ein Linienpaar als Degenerationsform bilden.

Denn, wenn wir irgend eine Gerade p durch einen, etwa den ersten der gegebenen Punkte 1, 2, 3, 4, 5 ziehen, so können wir den Punkt 6 bestimmen, in welchem sie den Kegelschnitt ferner schneidet, und so beliebig viele Punkte des Kegelschnittes erhalten. Die Schnittpunkte von 12 und 45, 23 und 56, 24 und 61 liegen nun in derselben Geraden o, und nach der Voraussetzung sind die Punkte 12, 45 und 34, 61 (p), also auch die Linie o bekannt; somit bestimmt die Verbindungslinie o von 5 mit dem Schnittpunkt von o und 23 auf der Geraden p (16) den Punkt 6. In andern Worten: *Der Punkt* 6 *ist die Spitze eines veränderlichen Dreiecks, dessen Seiten bez. Basis durch feste Punkte* 1, 5 *bez.* 12,

45 *gehen, während seine Basisecken sich längs fester Geraden* 23, 34 *bewegen.* (Vgl. § 46, 2).[77])

Diese Construction liefert durch die Specialisirung, dafs zwei Punkte mit einander zusammenfallen, *die Tangente t in einem von fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnittes.* Nennt man z. B. 1 zugleich 6, so verbindet o die Punkte 12, 45 und 23, 56 (51) und im Schnittpunkt von o mit 34 erhält man einen Punkt der Tangente 16.

Aus fünf Punkten ist eine Curve zweiter Ordnung durch lineare Construction bestimmt und zwar zählt die Angabe eines Punktes nebst der in ihm berührenden Tangente für zwei Punkte (vgl. § 281). Vereinfachungen bietet die Benutzung der unendlich fernen Punkte.

Der Brianchon'sche Punkt eines dem Kegelschnitte umgeschriebenen Sechsseits ist der Pol der Pascal'schen Linie des Sechsecks der Berührungspunkte. Denn, geben wir der Tangente und dem Berührungspunkt dieselbe Bezeichnung, nennen also Sechsseit wie Sechseck 123456, so ist die Verbindungsgerade der Tangentenschnittpunkte 12, 45 die Polare des Schnittpunktes der Verbindungsgeraden 12, 45 der Berührungspunkte, u. s. w. (§ 157).

Dieser Satz könnte umgekehrt als eine blofse Folgerung aus der Polarentheorie dazu dienen, um aus dem Satze von Pascal den von Brianchon abzuleiten oder umgekehrt. Jedoch leistet dies schon das Dualitätsprincip des § 79. Nach den Erörterungen des § 181 darf jeder rein descriptive Satz, der von Punkten einer Curve zweiter Ordnung handelt, unmittelbar auch für die Tangenten einer Curve zweiter Classe dual ausgesprochen werden (vgl. § 282). Unser Satz gibt aber eine constructiv specialisirte duale Beziehung, welche uns erlaubt, die weiteren Ueberlegungen an der Pascal'schen Figur allein durchzuführen.

Ein sehr nützlicher Specialfall des Satzes entsteht durch Zusammenfallen der Seiten- bez. Punktepaare 12, 34, 56. *In einem umgeschriebenen Dreieck schneiden sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken in einem Punkt o, und die Schnittpunkte der Berührungssehnen mit den Gegen-*

seiten liegen auf der Polare oder der Harmonicale o (§ 64, 1) *von jenem.*

B. 1) Aus fünf Punkten eines Kegelschnittes sein Centrum zu bestimmen.

Man ziehe 1 6 parallel zu 3 4 und bestimme den auf ihr gelegenen Punkt 6 des Kegelschnittes; dann sind 3 4 und 1 6 zwei parallele Sehnen, und die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte ist ein Durchmesser. Indem man ebenso auf 5 6′ parallel 2 3 den Punkt 6′ des Kegelschnittes bestimmt, findet man einen zweiten Durchmesser und damit das Centrum.

2) Man construire die Hyperbel aus den Asymptotenrichtungen 1, 2 und drei Punkten 3, 4, 5.

3) Man construire sie aus den Asymptoten und einem Punkte, insbesondere die Tangente in diesem.

4) Man construire die Parabel aus der Axenrichtung und drei Punkten.

5) Generationsmethode Mac Laurin's: Man bestimme den Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Seiten bez. durch drei feste Punkte gehen, während die Basisecken sich in zwei festen Geraden bewegen.

Sind $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ die Gleichungen der Seiten des von den drei festen Punkten gebildeten Dreiecks, so können nach § 60 die festen Geraden g, g' in der Form

$$lL + mM + nN = 0, \qquad l'L + m'M + n'N = 0$$

ausgedrückt werden; und ist dann $L = \mu M$ die Basis, so ist die Gerade, welche den Punkt $M = 0$, $N = 0$ mit dem Schnittpunkt der Basis mit g verbindet, durch $(l\mu + m)\, M + nN = 0$, dargestellt und die Gerade, welche den Punkt $L = 0$, $N = 0$ mit dem Schnittpunkt der Basis mit g' verbindet, durch $(l'\mu + m)\, L + n'\mu N = 0$. Die Elimination von μ zwischen den beiden letzten Gleichungen gibt die Gleichung des gesuchten Ortes in der Form

$$lm'LM = (mM + nN)\,(l'L + n'N),$$

d. h. derselbe ist ein Kegelschnitt, welcher durch die vier Punkte $M = 0, N = 0$; $N = 0, L = 0$; $L = 0, lL + mM + nN = 0$; $M = 0$, $l'L + m'M + n'N = 0$ hindurchgeht.

287. **Die vollständige Figur des Pascal'schen Sechsecks.** Wie im Falle des Satzes von Brianchon können wir eine Anzahl von 60 verschiedenen Pascal'schen Sechsecken aus den nämlichen sechs Punkten erhalten, wenn wir die Ordnung

ihrer Aufeinanderfolge ändern. Die entsprechenden Pascal-schen Linien bilden, wie dort die entsprechenden Punkte, ein System mit zahlreichen interessanten Eigenschaften.

Da z. B. der Kegelschnitt des § 285 auch dem Viereck 2356 umgeschrieben ist, so kann seine Gleichung auch in der Form $L_{25}L_{36} - L_{23}L_{56} = 0$ ausgedrückt werden, und ihre Identität mit der zuerst gegebenen Form in § 285 gibt

$$L_{12}L_{34} - L_{25}L_{36} = L_{23}(L_{14} - L_{56}),$$

woraus wir wie dort schliefsen, dafs die Punkte 12, 36; 34, 25; 56, 14 in einer Geraden, nämlich der Geraden $L_{14} - L_{56} = 0$ liegen. In gleicher Weise lernen wir aus der Identität der zweiten und dritten Form der Gleichung unseres Kegelschnittes, dafs die drei Punkte 45, 36; 61, 25; 23, 14 in einer Geraden $L_{23} - L_{14} = 0$ liegen. Nun schneiden sich aber die drei Geraden

$$L_{23} - L_{56} = 0, \quad L_{56} - L_{14} = 0, \quad L_{14} - L_{23} = 0$$

in einem Punkte. Damit ist der Satz von *Steiner* bewiesen: *Die drei Pascal'schen Linien, welche man für die Anordnung der Ecken in den bez. Folgen* 123456; 143652, 163254*) *erhält, schneiden sich in einem Punkte.* Da 234561 in derselben Weise behandelt nichts Neues gibt, *so liegt in jeder Pascal'schen Linie nur ein Steiner'scher Punkt; es gibt zwanzig solcher Punkte.*

Ebenso erhält man für die Pascal'schen Linien von 123456, 154236, 156342 die folgenden Ergebnisse. Die Gleichung des Kegelschnittes hat, weil er den Vierecken 1245, 5436, 6321 bez. umgeschrieben ist, die identischen Formen

$$L_{15}L_{24} - L_{12}L_{45} = 0,$$
$$L_{56}L_{34} - L_{45}L_{36} = 0,$$
$$L_{16}L_{23} - L_{36}L_{12} = 0.$$

Also sind auch identisch

$$L_{15}L_{24} - L_{34}L_{56} = L_{45}(L_{12} - L_{36}),$$
$$L_{34}L_{56} - L_{23}L_{16} = L_{36}(L_{45} - L_{12}),$$
$$L_{23}L_{16} - L_{15}L_{24} = L_{12}(L_{36} - L_{45}),$$

*) Nur die geradzahligen Ecken sind permutirt.

d. h.

15, 34; 24, 56; 12, 36;
34, 23; 56, 16; 45, 12;
23, 15; 16, 24; 36, 45

sind dreimal drei Punkte in je einer Geraden, und diese drei Geraden gehen durch einen Punkt — ein *Satz von Kirkmann.* Da die cyclische Verschiebung die Gruppen

234561, 265341, 261453;
345612, 316452, 312564

und keine weitern gibt, *so liegen in jeder Pascal'schen Linie drei Kirkmann'sche Punkte; die Anzahl dieser Punkte ist sechzig.*

Man kann jedoch den gröfsten Teil aller der Sätze, welche über die Figur des vollständigen Sechsecks bekannt geworden sind, auch entwickeln, indem man die einfachsten Principien der Combinationslehre mit den elementaren Sätzen über perspectivische Dreiecke verbindet (§ 64, 4).

Sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 die sechs Punkte des Kegelschnittes, die wir die Punkte P nennen wollen, so werden sie durch fünfzehn Gerade verbunden, die wir die Geraden L nennen werden. Jede derselben, z. B. 1 2, wird von den vierzehn anderen geschnitten und zwar durch vier im Punkte 1, durch vier andere in 2 und also durch sechs in anderen von 1 und 2 verschiedenen Punkten, z. B. 1 2, 3 4; etc. Wir wollen die letzteren als die Punkte P' bezeichnen; ihre Anzahl ist fünfundvierzig, denn in jeder der Linien L sind sechs derselben gelegen, und da zwei Linien L durch jeden Punkt P' gehen, so ist ihre Zahl die dreifache Zahl der L. Wenn wir die Seiten des Sechsecks in der Ordnung 123456 nehmen, so sagt Pascal's Satz, dafs diejenigen drei Punkte P' in einer Geraden liegen, welche als 12, 45; 23, 56; 34, 61 erhalten werden. Wir können diese Gerade als die Pascal'sche Linie $\begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 61 \cdot 23 \end{Bmatrix}$ bezeichnen, um die drei Punkte bequem erkennen zu lassen, durch welche sie geht.

Durch jeden Punkt P' gehen vier Pascal'sche Linien, nämlich z. B. durch (12, 45) die Linien 123456, 126453,

1 2 3 5 4 6, 1 2 6 5 4 3; wir finden also die Zahl der Pascal'schen Linien, indem wir die Zahl der Punkte P' mit vier multipliciren und durch drei dividiren, weil jede von ihnen drei Punkte P' enthält; sie ist also gleich sechzig, in der Tat die Zahl der verschiedenen möglichen Anordnungen von sechs Zahlen. Betrachten wir nun drei Dreiecke I, II, III von den Seiten 1 2, 3 4, 5 6; 4 5, 6 1, 2 3; 3 6, 2 5, 1 4 bez., so liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten von I und II in einer Pascal'schen Linie, die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken schneiden sich also in einem Punkte; diese sind aber

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \cdot 4\,5 \cdot 3\,6 \\ 3\,4 \cdot 6\,1 \cdot 2\,5 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 3\,4 \cdot 6\,1 \cdot 2\,5 \\ 5\,6 \cdot 2\,3 \cdot 1\,4 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 5\,6 \cdot 2\,3 \cdot 1\,4 \\ 1\,2 \cdot 4\,5 \cdot 3\,6 \end{Bmatrix},$$

d. i. drei Pascal'sche Linien, und wir haben *Steiner's* Satz wieder gefunden.

Wir werden den Schnittpunkt als den Punkt G und durch die Charakteristik $\begin{Bmatrix} 1\,2 \cdot 4\,5 \cdot 3\,6 \\ 3\,4 \cdot 6\,1 \cdot 2\,5 \\ 5\,6 \cdot 2\,3 \cdot 1\,4 \end{Bmatrix}$ bezeichnen. Damit wird offenbar, dafs in jeder Pascal'schen Linie nur ein einziger Punkt G liegt; denn, wenn die durch die beiden ersten Zeilen characterisirte Pascal'sche Linie gegeben ist, so erhält man die Characteristik des bezüglichen Punktes G durch Untersetzen der in ihren Verticalreihen nicht enthaltenen Buchstaben unter dieselben. Da aber in jedem Punkte G drei Pascal'sche Linien zusammentreffen, so ist die Zahl dieser Punkte gleich zwanzig. Wenn wir die Dreiecke II, III und I, III betrachten, so sind die Verbindungslinien entsprechender Ecken in beiden Fällen dieselben, und die drei Axen der Collineation treffen sich somit in einem Punkte; derselbe ist aber offenbar der Punkt G von der Characteristik $\begin{Bmatrix} 1\,2 \cdot 3\,4 \cdot 5\,6 \\ 4\,5 \cdot 6\,1 \cdot 2\,3 \\ 3\,6 \cdot 2\,5 \cdot 1\,4 \end{Bmatrix}$.

Steiner hat bemerkt; dafs zwei solche Punkte G in Bezug auf den Kegelschnitt harmonisch conjugirt sind, sodafs die zwanzig Punkte G in zehn Paare geteilt werden. Die

Pascal'schen Linien, welche durch dieselben gehen, sind für den betrachteten Fall bez.

$$123654,\ 163452,\ 143256;$$

und

$$123456,\ 163254,\ 143652.$$

B. Man zeige, dafs die Schnittpunkte der sechs Paare abwechselnder Seiten eines Pascal'schen Sechsecks in natürlicher Ordnung ein Brianchon'sches Sechsseit bilden, und dafs ebenso die Verbindungslinien der sechs Paare abwechselnder Ecken eines Brianchon'schen Sechsseits in dieser Ordnung ein Pascal'sches Sechseck bilden.

* 288. Betrachten wir nun die Dreiecke

$$12,\qquad 34,\qquad 56 \qquad\qquad \text{I}$$

$$\begin{Bmatrix}12\cdot35\cdot46\\45\cdot26\cdot13\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}34\cdot26\cdot15\\16\cdot35\cdot24\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}56\cdot24\cdot13\\23\cdot15\cdot46\end{Bmatrix}, \qquad \text{IV}$$

$$\begin{Bmatrix}12\cdot35\cdot46\\36\cdot24\cdot15\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}34\cdot26\cdot15\\25\cdot13\cdot46\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}56\cdot24\cdot13\\14\cdot35\cdot26\end{Bmatrix}, \qquad \text{V}$$

so sind die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten von I und IV drei Punkte derselben Pascal'schen Linie. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken, welche daher durch einen Punkt gehen, sind aber die drei Pascal'schen Linien

$$\begin{Bmatrix}12\cdot35\cdot46\\34\cdot26\cdot15\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}34\cdot26\cdot15\\56\cdot13\cdot24\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}56\cdot13\cdot24\\12\cdot46\cdot35\end{Bmatrix};$$

wir können den Schnittpunkt bezeichnen als den Punkt H von der Characteristik $\begin{Bmatrix}12\cdot35\cdot46\\34\cdot26\cdot15\\56\cdot13\cdot24\end{Bmatrix}$. Sie weicht von der der Punkte G darin ab, dafs nur eine der Verticalreihen die sechs Buchstaben ohne Auslassung oder Wiederholung enthält. In jeder Pascal'schen Linie gibt es drei Punkte H, nämlich in $\begin{Bmatrix}12\cdot34\cdot56\\45\cdot16\cdot23\end{Bmatrix}$ die folgenden

$$\begin{Bmatrix}\overline{12}\cdot34\cdot56\\45\cdot16\cdot23\\36\cdot24\cdot15\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}12\cdot\overline{34}\cdot56\\45\cdot16\cdot23\\13\cdot25\cdot46\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}12\cdot34\cdot\overline{56}\\45\cdot16\cdot23\\26\cdot35\cdot14\end{Bmatrix},$$

wo der Strich über der einen Columne die Vollständigkeit

derselben anzeigt. Daraus entspringt *Kirkmann's* Erweiterung des Steiner'schen Satzes: *Die Pascal'schen Linien schneiden sich zu dreien nicht nur in Steiner's zwanzig Punkten G, sondern auch in sechzig andern Punkten H.*

Wenn wir ebenso die Dreiecke I und V betrachten, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken dieselben wie für I und IV, und die entsprechenden Seiten schneiden sich daher in einer Geraden, offenbar einer Pascal-schen Linie. Endlich müssen sich die entsprechenden Seiten von IV und V in drei Punkten einer Geraden schneiden, d. h. die drei Punkte H von den Characteristiken

$$\left\{\begin{matrix}\overline{12}\cdot 35\cdot 46\\ 45\cdot 26\cdot 13\\ 36\cdot 15\cdot 24\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}15\cdot \overline{34}\cdot 26\\ 24\cdot 16\cdot 35\\ 13\cdot 25\cdot 46\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}13\cdot 24\cdot \overline{56}\\ 46\cdot 15\cdot 23\\ 35\cdot 26\cdot 14\end{matrix}\right\}$$

liegen in einer Geraden. Ueberdies mufs die Axe von IV und V durch den Schnittpunkt der Axen von I, IV und I, V gehen, d. h. durch den Punkt G, der aus den vollständigen Verticalreihen der vorigen Punkte H entsteht, nämlich

$$\left\{\begin{matrix}12\cdot 34\cdot 56\\ 45\cdot 16\cdot 23\\ 36 . 25\cdot 14\end{matrix}\right\}.$$

Damit haben wir den *Cayley-Salmon'schen Satz: Es gibt zwanzig Gerade g, deren jede einen Punkt G und drei Punkte H enthält.*

Ebenso kann man beweisen, *dafs die zwanzig Geraden g zu vieren durch fünfzehn Punkte J gehen.* Die vier Linien g nämlich, deren Punkte G in der vorigen Bezeichnung eine Verticalreihe gemein haben, gehen durch denselben Punkt.

Betrachten wir ferner die Pascal'schen Linien, welche sich in einem Punkte H schneiden, z. B.

$$\left\{\begin{matrix}12\cdot 35\cdot 46\\ 45\cdot 26\cdot 13\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}45\cdot 26\cdot 13\\ 36\cdot 15\cdot 24\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}36\cdot 15\cdot 24\\ 12\cdot 46\cdot 35\end{matrix}\right\},$$

so können wir, indem wir in jeder von ihnen einen Punkt P' wählen, ein Dreieck bilden, welches die Ecken $L_{46}L_{13}$, $L_{26}L_{15}$, $L_{24}L_{35}$ hat, und dessen Seiten daher sind

$$\left\{\begin{matrix}13\cdot 26\cdot 45\\ 46\cdot 15\cdot 23\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}26\cdot 35\cdot 14\\ 15\cdot 24\cdot 36\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}24\cdot 13\cdot 56\\ 35\cdot 46\cdot 12\end{matrix}\right\}.$$

Nehmen wir dann in jeder einen Punkt *H*, indem wir unter jede der obigen Pascal'schen Linien die Zeile $16 \cdot 34 \cdot 25$ schreiben, so entsteht ein Dreieck von den Seiten

$$\begin{Bmatrix} 13 \cdot 26 \cdot 45 \\ 25 \cdot 34 \cdot 16 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 25 \cdot 34 \cdot 16 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 46 \cdot 12 \cdot 35 \\ 25 \cdot 34 \cdot 16 \end{Bmatrix}.$$

Die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten dieser Dreiecke, d. h. die drei Punkte *G* von den Characteristiken

$$\begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 13 \cdot 26 \cdot 45 \\ 46 \cdot 15 \cdot 23 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 14 \cdot 26 \cdot 35 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 46 \cdot 12 \cdot 35 \\ 13 \cdot 56 \cdot 24 \end{Bmatrix}$$

liegen mit dem vierten, der gleichfalls die Zeile $25 \cdot 34 \cdot 16$ enthält $\begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 36 \cdot 12 \cdot 45 \\ 14 \cdot 56 \cdot 23 \end{Bmatrix}$ in einer Geraden. Da man fünfzehn verschiedene Producte von der Form $25 \cdot 34 \cdot 16$ bilden kann, so entspringt dem der Satz von *Steiner: Die Punkte G liegen zu vieren in fünfzehn Geraden j.*

Hesse hat eine gewisse Dualität zwischen den erhaltenen Sätzen hervorgehoben. Es correspondiren den 60 Kirkmann-schen Punkten *H* die 60 Pascal'schen Linien *h* in folgender Art: Es gibt 20 Steiner'sche Punkte *G*, durch deren jeden drei Pascal'sche Linien *h* und eine Gerade *g* gehen; und es giebt 20 Gerade *g*, deren jede drei Kirkmann'sche Punkte *H* und einen Steiner'schen Punkt *G* enthält. Und so wie die 20 Geraden *g* zu vieren durch 15 Punkte *J* gehen, so liegen die 20 Punkte *G* zu vieren in 15 Geraden *j*. Diese Dualität ist zuletzt durch zahlreiche neue Ergebnisse von *Veronese* näher bestimmt und vervollständigt worden.[78])

Die folgende Untersuchung gibt einen neuen Beweis einiger vorhergehender Sätze und zeigt, welcher Punkt *H* der Pascal-schen Linie entspricht, die der Ordnung 1 2 3 4 5 6 angehört. Wir betrachten die beiden eingeschriebenen Dreiecke 1 3 5, 2 4 6 und bemerken, wie wir bald (§ 296) sehen werden, dafs ihre Seiten einen und denselben Kegelschnitt berühren; so dafs das Sechsseit aus $L_{35} L_{46} L_{15} L_{26} L_{13} L_{24}$ ein Brianchon-sches ist. Aber seine Diagonalen sind die drei Pascal'schen

Linien, welche sich in dem Punkte H schneiden von der Characteristik

$$\begin{Bmatrix} 35 \cdot 26 \cdot 14 \\ 46 \cdot 13 \cdot 25 \\ 15 \cdot 24 \cdot 36 \end{Bmatrix}.$$

Und da bei Festhaltung der abwechselnden Seiten L_{35}, L_{15}, L_{13} durch cyclische Permutation der übrigen drei Brianchon'sche Punkte erhalten werden, die nach dem zu dem Steiner'schen dualen Satze in einer Geraden liegen müssen, so ist bewiesen, dafs die Geraden von 1 nach $L_{23} L_{46}$ und von 4 nach $L_{13} L_{56}$ sich in der Pascal'schen Linie 1 2 3 4 5 6 schneiden, und dafs sechs solche Schnittpunkte in jeder Pascal'schen Linie liegen.

Fünfzehntes Kapitel.*)

Projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte.

289. In den Gleichungsformen des letzten Kapitels können wir die auftretenden linearen Functionen als mit Constanten multiplicirte Abstände interpretiren, wie schon im IV. Kapitel geschehen ist.

So führt die Gleichung $L_3 L_4 - kL_1 L_2 = 0$ (§ 273) zu dem wichtigen Satz: *Das Product der Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von zwei Gegenseiten eines Sehnenvierecks steht zu dem Producte seiner Abstände von den beiden andern Gegenseiten in constantem Verhältnis.*

Und $L_1 L_2 - kL^2 = 0$ (§ 275) ergibt den Specialfall: Das Product der Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von zwei festen Tangenten steht zu dem Quadrat seines Abstandes von ihrer Berührungssehne in constantem Verhältnis. Für den Kreis ist dies schon in § 116 ausgesprochen.

Ferner können wir jeden Kegelschnitt in der Gleichungsform $S - kL_1 L_2 = 0$ darstellen (§ 273), wo $S = 0$ insbesondere die Gleichung eines Kreises ist. Unter dieser Voraussetzung bedeutet S die mit einer Constanten multiplicirte Potenz eines Punktes in Bezug auf den Kreis (§ 114). *Das Quadrat der von einem Punkt des Kegelschnittes an einen festen Kreis gehenden Tangenten steht zu dem Product seiner Abstände von zwei Gegenseiten des Vierecks der Schnittpunkte*

*) Das weitere Studium setzt die Durcharbeitung der früheren mit dem Stern bezeichneten Abschnitte voraus.

in constantem Verhältnis. Nimmt man $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ als beliebige Sehnen eines gegebenen Kreises $S = 0$, so kann man hiernach einen Kegelschnitt als Ort erzeugen. Für den Fall eines unendlich kleinen Kreises hat man speciell: *Der Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat seiner Entfernung von einem festen Punkt zu dem Product seiner Abstände von zwei festen Geraden in constantem Verhältnis steht, ist ein Kegelschnitt.*

Dasselbe gilt auch noch, wenn die festen Geraden zusammenfallen, also für die Gleichung $S - kL^2 = 0$: *Die Tangente aus einem Punkt eines Kegelschnittes an einen doppeltberührenden Kreis steht zu seinem Abstand von der Berührungssehne in constantem Verhältnis.* Endlich erkennen wir hierin im obigen speciellen Fall die Fundamentaleigenschaft des Brennpunktes und der Directrix (§ 197), so dafs wir den Brennpunkt als einen unendlich kleinen Kreis ansehen müssen, der den Kegelschnitt in zwei imaginären Punkten der Directrix berührt (§ 195).

Die Verallgemeinerungen für den Falls, dafs $S = 0$ einen Kegelschnitt bedeutet, resultiren aus § 161.

Endlich können wir diese Interpretation auch auf die Gleichungsformen des § 282 in Liniencoordinaten ausdehnen. Bedenken wir, dafs eine lineare Function $\varLambda$ von $\xi \mid \eta$ den mit $\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}$ multiplicirten Abstand des Punktes $\varLambda = 0$ von der Geraden $\xi \mid \eta$ bedeutet, so drückt $\varLambda_3 \varLambda_4 - \varkappa \varLambda_1 \varLambda_2 = 0$ den Satz aus: *Das Product der Abstände einer Tangente des Kegelschnittes von zwei Gegenecken eines Tangentenvierseits steht zu dem Product seiner Abstände von den beiden anderen Gegenecken in constantem Verhältnis* u. s. w.

B. 1) Aus $S - kL^2 = 0$, $S' - k'L^2 = 0$ für $S = 0$, $S' = 0$ als Kreise folgt $k'S - kS' = 0$, d. h. die Schnittpunkte solcher Kegelschnitte liegen in einem Kreise, welcher von der Berührungssehne nicht abhängt und fest bleibt, so lange $k : k'$ constant ist.

2) Wenn zwei Kegelschnitte einander doppelt berühren, so steht für jeden Punkt des einen das Quadrat seines Abstandes von der Berührungssehne beider in constantem Verhältnis zu dem Reckteck der Segmente, welche der andere auf dieser Senkrechten bestimmt.

3) Wenn eine Gerade von constanter Richtung zwei Kegelschnitte in den Punkten P, Q; P', Q' schneidet, und ein Punkt O auf ihr so bestimmt wird, dafs die Rechtecke $OP \cdot OQ$ und $OP' \cdot OQ'$ in constantem Verhältnis sind, so ist der Ort des Punktes O ein Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte hindurchgeht.

4) Der Durchmesser des Kreises, welcher dem von zwei Tangenten eines Centralkegelschnittes und ihrer Berührungssehne gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, ist $= b'b'' : p$ für b', b'' als die den Tangenten parallelen Halbmesser und p als den senkrechten Abstand der Berührungssehne vom Centrum.[79])

Wir setzen die Gleichung als durch eine solche Constante dividirt voraus, dafs das Substitutionsresultat für die Coordinaten des Centrums der Einheit gleich wird (§ 161). Sind dann t', t'' die Längen der Tangenten, und ist S' das Resultat der Substitution der Coordinaten ihres Schnittpunktes, so gelten die Proportionen

$$t'^2 : b'^2 = S' : 1, \quad t''^2 : b''^2 = S' : 1;$$

ist aber h die senkrechte Entfernung der Berührungssehne, so gilt nach § 164 auch die Proportion $h : p = S' : 1$; daher ist $t't'' : h = b'b'' : p$. Nach der Elementargeometrie gibt hier die linke Seite den Durchmesser des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises, und der Satz ist bewiesen.

5) Aus der Formel des vorigen Beisp. geht der Ausdruck des § 235 für den Radius des osculirenden Kreises hervor, indem man die beiden Tangenten zusammenfallen läfst.

Man erhält denselben auch mittelst des folgenden Satzes:[80]) Wenn n, n' die Längen von zwei sich schneidenden Normalen, p, p' die Abstände der zugehörigen Tangenten vom Centrum bezeichnen, und wenn b' der der Verbindungslinie beider Curvenpunkte parallele Halbmesser ist, so gilt die Relation

$$np + n'p' = 2b'^2.$$

Denn für S' als das Resultat der Substitution der Coordinaten des Mittelpunktes der Sehne in die Gleichung des Kegelschnittes, h, h' als die Abstände dieses Mittelpunktes von den beiden Tangenten und 2β als die Länge der Sehne folgt, wie im letzten Beisp., $\beta^2 = b'^2 S'$, $h = pS'$, $h' = p'S'$, und man sieht leicht, dafs

$$nh + n'h' = 2\beta^2$$

ist. Damit ist aber die angegebene Relation bewiesen.

6) Man zeigt in Analogie zu § 114 und mit der in § 110 gegebenen Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten, dafs das

Resultat der Substitution der Coordinaten einer Geraden in diese proportional ist dem Quadrat der von ihr im Kreis bestimmten Sehne und erhält dann entsprechend den Ergebnissen des Textes die folgende Interpretation der Gleichung $\Sigma = \lambda\Sigma'$ für $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ als Kreise: Die Enveloppe einer Geraden, in welcher zwei gegebene Kreise Sehnen von constantem Verhältnis bestimmen, ist ein Kegelschnitt, der die gemeinsamen Tangenten beider Kreise berührt.

290. **Doppelverhältnis von vier Elementen eines Kegelschnittes.** Bezeichnen, wie in § 66, s_1, s_2, s_3, s_4 die Abstände eines Punktes P von den vier Seiten $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$ eines Vierecks $ACBD$, so ist

$$s_1 \cdot AC = PA \cdot PC \sin APC, \quad s_2 \cdot BC = PB \cdot PC \sin BPC, \text{ etc.}$$

Bilden wir nach § 81 das Doppelverhältnis der vier von P ausgehenden Strahlen, so ist

$$\frac{\sin APC}{\sin BPC} : \frac{\sin APD}{\sin BPD} = \frac{s_1 s_3}{s_2 s_4} \cdot \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Dasselbe ist von der Lage von P nicht abhängig, so lange $s_1 s_3 : s_2 s_4 = \varkappa$ einen constanten Wert behält. Daher gilt nach der Interpretation des § 289 der Fundamentalsatz:

Das Doppelverhältnis eines Strahlbüschels, dessen Strahlen einen veränderlichen Punkt des Kegelschnittes mit vier festen Punkten desselben in gegebener Reihenfolge verbinden, hat constanten Wert, und umgekehrt: *Der Ort eines Punktes, dessen Verbindungsgeraden mit vier festen Punkten in bestimmter Reihenfolge ein Doppelverhältnis von constantem Wert ergeben, ist eine durch dieselben gehende Curve zweiter Ordnung.*

In der Bezeichnungsweise der §§ 80, 81 können wir die Doppelverhältnisgleichheit schreiben

$$(P \cdot ABCD) = \varkappa \cdot (ABCD).$$

Der Klammerausdruck der rechten Seite ist aus den Seitenlängen des Vierecks $ABCD$ ganz so gebildet, als ob dieselben in einer Geraden ein Doppelverhältnis bestimmten. Der Factor $\varkappa$ characterisirt einen bestimmten Kegelschnitt des dem Viereck umgeschriebenen Büschels. Daher nennt man *die linke Seite das Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kegelschnittes* und bezeichnet dasselbe etwa mit $\{ABCD\}$.

Es ist darunter also das Doppelverhältnis des die vier Punkte aus irgend einem fünften Punkte der Curve projicirenden Strahlbüschels zu verstehen. Der Kegelschnitt ist durch vier Punkte und den Wert ihres Doppelverhältnisses bestimmt.

Betrachten wir ferner die Tangenten a, b, c, d, t in den Punkten A, B, C, D, P. Nennen wir die Schnittpunkte der vier ersten in der letzten A', B', C', D', die Abstände der Ecken ac, bc, ad, bd von t aber $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, so liefert die Trigonometrie

$$\sigma_1 \sin ac = A'C' \,.\, \sin at \,.\, \sin bt, \quad \sigma_2 \sin bc = B'C' \,.\, \sin bt \,.\, \sin ct,$$

etc. Das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte ist

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2 \sigma_4} \cdot \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}.$$

Nun sagt $\sigma_1 \sigma_3 = \varkappa \sigma_2 \sigma_4$ nach § 289 aus, dafs t einen Kegelschnitt berührt. Also haben wir den dual entsprechenden Hauptsatz:

Das Doppelverhältnis einer Punktreihe, deren Punkte in einer beweglichen Tangente des Kegelschnittes von vier festen Tangenten ausgeschnitten werden, hat constanten Wert und umgekehrt.

Schreiben wir wiederum in früherer Art

$$(t \,.\, abcd) = \varkappa (abcd),$$

indem wir das Sinusdoppelverhältnis der Winkel der vier Tangenten bilden, als ob sie durch einen gemeinsamen Scheitel gingen. Hiernach kann man wieder das Doppelverhältnis der von vier Tangenten in einer fünften ausgeschnittenen Punktreihe $(t \,.\, abcd)$ als *das Doppelverhältnis* $\{abcd\}$ *der vier Tangenten des Kegelschnittes* auffassen.

291. **Projectivische Erzeugung der Kegelschnitte.** Die vorigen Fundamentalsätze stehen so recht im beherrschenden Mittelpunkt der Theorie der Kegelschnitte. Sie knüpfen unmittelbar an das an, was in § 83 von den projectivischen Strahlbüscheln und Punktreihen gesagt worden ist, und man tritt mit ihnen in den Zusammenhang der allgemeinen Gedankenentwickelung des V. Kap. wieder ein. Denn sie lassen sich so aussprechen:

Der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen von zwei projectivischen Strahlbüscheln in allgemeiner Lage ist ein Kegelschnitt, welcher auch durch die Scheitel (Träger) der beiden Büschel hindurchgeht.

Die Enveloppe der Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Punktreihen in allgemeiner Lage ist ein Kegelschnitt, welcher auch die Träger der beiden Reihen berührt.

Direct werden beide Sätze folgendermaſsen bewiesen.

Sind

$$L_1 - kL_2 = 0,\ L_1' - kL_2' = 0$$

die Gleichungen der beweglichen Strahlen beider Büschel, so wird die Gleichung des bezeichneten Ortes durch Elimination von k zwischen den vorigen Gleichungen gefunden, also in der Form $L_1 L_2' - L_1' L_2 = 0$. Diese Gleichung ist vom zweiten Grade und enthält sechs Glieder, daher fünf unbestimmte Coefficienten; sie kann somit durch die Bedingung, daſs die dargestellte Curve fünf Punkte enthalte, zur Gleichung jeder beliebigen Curve zweiter Ordnung gemacht werden.

Geometrisch bestimmen fünf Punkte zwei projectivische Büschel, da drei von ihnen, mit den beiden übrigen verbunden, drei Paare von entsprechenden Strahlen beider Büschel liefern (§ 83). Der erzeugte Kegelschnitt geht auch durch die Scheitelpunkte beider Büschel hindurch, da seiner Gleichung

Sind

$$\Lambda_1 - \varkappa\Lambda_2 = 0,\ \Lambda_1' - \varkappa\Lambda_2' = 0$$

die Gleichungen der beweglichen Punkte beider Reihen, so wird die Gleichung der bezeichneten Enveloppe durch Elimination von $\varkappa$ zwischen den vorigen Gleichungen gefunden, d. h. als $\Lambda_1\Lambda_2' - \Lambda_1'\Lambda_2 = 0$. Diese Gleichung ist vom zweiten Grade und enthält sechs Glieder, daher fünf unbestimmte Coefficienten; sie kann somit durch die Bedingung, daſs die dargestellte Curve fünf Gerade berühre, zur Gleichung jeder beliebigen Curve zweiter Classe gemacht werden.

Geometrisch bestimmen fünf Gerade zwei projectivische Reihen, da drei von ihnen, mit den beiden übrigen geschnitten, drei Paare von entsprechenden Punkten beider Reihen liefern (§ 83). Der Kegelschnitt berührt auch die Träger beider Reihen, da seiner Gleichung die gleichzeitigen Voraus-

die gleichzeitigen Voraussetzungen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, und ebenso $L_2' = 0$, $L_2' = 0$ genügen. Die Verbindungslinie der Scheitel ist für jedes der beiden Büschel derjenige Strahl, welcher der Tangente des Kegelschnittes im Scheitel des andern Büschels entspricht. Daraus entspringen lineare Constructionen zur Bestimmung dieser Tangenten.

Derselbe Kegelschnitt wird erzeugt durch projectivische Büschel, die in zwei *beliebigen* Punkten derselben ihre Scheitel haben. Sind deren Gleichungen nämlich

$$(L_1 - mL_2) - k(L_1' - mL_2') = 0,$$
$$(L_1 - nL_2) - k(L_1' - nL_2') = 0,$$

so ist die Gleichung der Curve $0 =$

$$\begin{vmatrix} L_1 - mL_2, & L_1' - mL_2' \\ L_1 - nL_2, & L_1' - nL_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & -m \\ 1, & -n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_1, & L_2 \\ L_1', & L_2' \end{vmatrix},$$

also wiederum die obige.

setzungen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, und ebenso $A_1' = 0$, $A_2' = 0$ genügen. Der Schnittpunkt der Träger ist für jede der beiden Reihen derjenige Punkt in ihr, der dem Berührungspunkt des Kegelschnittes mit dem Träger der andern Reihe entspricht. Daraus entspringen lineare Constructionen zur Bestimmung dieser Berührungspunkte.

Derselbe Kegelschnitt wird erzeugt durch projectivische Reihen, die zwei *beliebige* Tangenten derselben zu Trägern haben. Sind deren Gleichungen nämlich

$$(A_1 - \mu A_2) - \varkappa(A_1' - \mu A_2') = 0,$$
$$(A_1 - \nu A_2) - \varkappa(A_1' - \nu A_2') = 0,$$

so ist die Gleichung der Curve $0 =$

$$\begin{vmatrix} A_1 - \mu A_2, & A_1' - \mu A_2' \\ A_1 - \nu A_2, & A_1' - \nu A_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & -\mu \\ 1, & -\nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ A_1', & A_2' \end{vmatrix},$$

also wiederum die obige.

292. **Zerfallende Curven zweiter Ordnung oder Classe.** Wir haben mehrfach gesehen, dafs die Ortsgleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten bei der Einführung von Liniencoordinaten auch eine quadratische Tangentengleichung liefert (§ 163).

Im allgemeinen ist eine Curve zweiter Ordnung auch von der zweiten Classe.

Aber von diesem Gesetz existiren zwei Ausnahmefälle, die wir auch schon berührt haben (§ 59): *Es gibt einen Ort*

zweiter Ordnung, der nicht von der zweiten Classe ist, und eine Enveloppe zweiter Classe, die nicht von der zweiten Ordnung ist.

Wenn die beiden erzeugenden projectivischen Büschel einen Strahl entsprechend gemein haben, z. B. $L_1 \equiv L_1'$, so sind sie perspectivisch (§ 83). Die Gleichungen der beweglichen Strahlen der Büschel nehmen die Form an

$$L_1 - kL_2 = 0,\ L_1 - kL_2' = 0,$$

und die Elimination von k liefert für den Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen die Gleichung

$$L_1(L_2 - L_2') = 0.$$

Der Ort ist ein Linienpaar, bestehend aus dem gemeinsamen Strahl und der Perspectivaxe der Büschel, auf der sich alle übrigen entsprechenden Strahlenpaare derselben schneiden.

Es gibt keine Gleichung in Liniencoordinaten, welche diese beiden Geraden definirt.

Wenn die beiden erzeugenden projectivischen Reihen einen Punkt entsprechend gemein haben, z. B. $A_1 \equiv A_1'$, so sind sie perspectivisch (§ 83). Die Gleichungen der beweglichen Punkte nehmen die Form an

$$A_1 - \varkappa A_2 = 0,\ A_1 - \varkappa A_2' = 0,$$

und die Elimination von $\varkappa$ liefert für die Enveloppe der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte die Gleichung

$$A_1(A_2 - A_2') = 0.$$

Die Enveloppe ist ein Punktepaar, bestehend aus dem gemeinsamen Punkt und dem Perspectivcentrum der Reihen, nach dem die Verbindungsgeraden aller übrigen entsprechenden Punktepaare gehen.

Es gibt keine Gleichung in Punktcoordinaten, welche diese beiden Punkte definirt.

293. **Die Construction des Kegelschnittes aus projectivischen Elementargebilden** geschieht nach der Methode des § 94.

Zwei projectivische Strahlbüschel mit verschiedenen Scheiteln T, T' sind durch die Tripel entsprechender Strahlen a, b, c; a', b', c' bestimmt. Das Strahlbüschel $ab', a'b$; $ac', a'c$; $bc', b'c$ aus T'' ist zu beiden

Zwei projectivische Punktreihen mit verschiedenen Trägern t, t' sind durch die Tripel entsprechender Punkte A, B, C; A', B', C' bestimmt. Die Punktreihe $AB', A'B$; $AC', A'C$; $BC', B'C$ in t'' ist zu beiden

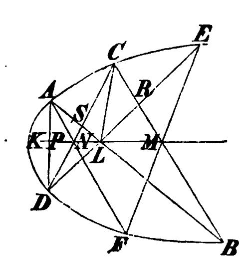
perspectivisch und liefert zu jedem seiner Strahlen ein Paar d, d' (§ 94). Das perspectivische Centrum T'' ist der Berührungspol von T und T', d. h. der Pol des Scheitelstrahles TT'. Der Schnittpunkt dd' durchläuft einen Kegelschnitt.

perspectivisch und liefert zu jedem ihrer Punkte ein Paar D, D' (§ 94). Die perspectivische Axe t'' ist die Berührungssehne von t und t', d. h. die Polare des Trägerschnittpunktes tt'. Die Verbindungsgerade DD' umhüllt einen Kegelschnitt.

Diese projectivischen Constructionen enthalten unmittelbar einfache Beweise des Pascal'schen und des Brianchon-schen Satzes.

Sind A, B, C, D, E, F sechs Punkte des Kegelschnittes und nehmen wir A und E als Scheitel von Strahlbüscheln, so ist $(E\,.\,CDFB) = (A\,.\,CDFB)$, also, wenn man die Reihen der Schnittpunkte der Strahlen mit den Geraden BC, DC betrachtet,

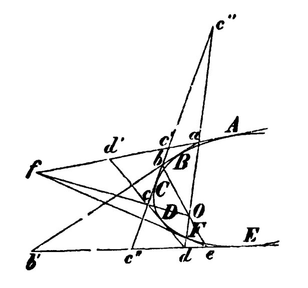
$(CRMB) = (CDNS)$ (§ 57).



Verbindet man dann den Schnittpunkt L von AB, DE mit diesen Reihen, so haben die Büschel die drei Strahlen CL, DE, AB entsprechend gemein; also fallen auch die

Sind A, B, C, D, E, F sechs Tangenten des Kegelschnittes und nehmen wir A und E als Träger von Punktreihen, so ist $(E\,.\,CDFB) = (A\,.\,CDFB)$, also, wenn man die Büschel der Verbindungslinien der Punkte mit den Punkten BC, DC betrachtet,

$(b\,.\,c''deb') = (c\,.\,c'd'fa)$ (§ 57).



Schneidet man dann die Verbindungsgerade ad von AB, DE mit diesen Büscheln, so haben die Reihen die drei Punkte c'', d, a entsprechend gemein; also fallen auch die

vierten Strahlen NL, LM in eine Gerade (§ 59). Somit liegen die Schnittpunkte L, M, N der Gegenseitenpaare in einer Geraden.

vierten Punkte ad, be und ad, cf in einen Punkt (§ 59). Somit gehen die Verbindungsgeraden ad, be, cf der Gegeneckenpaare durch einen Punkt.

B. 1) Für zerfallende Kegelschnitte bestehen die Sätze von Pascal und Brianchon fort, nämlich der erste für das Linienpaar, der zweite für das Punktepaar.

2) Eine sich um den festen Punkt P drehende Gerade schneidet zwei feste Gerade OA, OA' in den Punkten A, A'; von diesen aus sind constante Längen Aa, $A'a'$ auf jede dieser Linien in bestimmtem Sinn aufgetragen; dann ist die Enveloppe der Verbindungsgeraden aa' ihrer Endpunkte ein Kegelschnitt, der jene Linien zu Tangenten hat.

Denn für vier Lagen der sich um P drehenden Geraden ist

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),\ \text{folglich auch}\ (abcd) = (a'b'c'd'),$$
$$\text{wegen}\ (ABCD) = (abcd)\ \text{und}\ (A'B'C'D') = (a'b'c'd').$$

294. **Kegelschnitte durch die Doppelpunkte einer Collineation.** Ist die Collineation durch die homologen Quadrupel A_1, A_2, A_3, E; A_1', A_2', A_3', E' gegeben (§ 96), so sind collineare Büschel an den Scheiteln A_iA_j, $A_i'A_j'$; A_iA_k, $A_i'A_k'$; A_iE, $A_i'E'$ bestimmt. Ihr Erzeugnis ist ein durch A_i, A_i' gehender Kegelschnitt K_i. Sind also T, T' homologe Punkte, so schneiden sich A_iT, $A_i'T'$ in einem Punkt T_i des Kegelschnittes K_i; daher kann man T' zu T mittelst zweier Curven K_1, K_2, nämlich mittelst der Punkte T_1, T_2 finden.

Von den Schnittpunkten je zweier Kegelschnitte K_i ist einer sofort angebbar, von K_1K_2 z. B. der Punkt B_3 oder A_1A_2, $A_1'A_2'$; derselbe liegt sicher nicht auf dem dritten, z. B. K_3. Für jeden der übrigen Schnittpunkte liefert die obige Construction den homologen als mit ihm zusammenfallend. *Daher haben die drei Kegelschnitte K_i drei allen gemeinsame Schnittpunkte X_1, X_2, X_3, die Doppelpunkte der Collineation.* Genau dasselbe gilt überhaupt von allen Kegelschnitten, welche aus den collinearen Büscheln T, T' erzeugt sind. Zwei derselben reichen zur wirklichen Construction dieser Doppelpunkte aus. Dabei ist einer derselben, z. B. X_3

stets reell, weil der überschüssige Schnittpunkt B_3 zugleich mit A_1, A_2 reell ist.

Ist das ganze Tripel der Doppelpunkte reell, so liefert es mit einem weiteren Paare A, A' zusammen die einfachsten Constructionen collinearer Zuordnung, denn dann bilden $(X_1 \,.\, X_2X_3AT) = (X_1' \,.\, X_2'X_3'A'T')$ und $(X_2 \,.\, X_3X_1AT)$ $= (X_2' \,.\, X_3'X_1'A'T')$ zwei Paare homologer Büschel. Nehmen wir X_1, X_2, X_3 als Fundamentalpunkte der Coordinaten (§ 97) und sind $L_i = 0$, $L_i' = 0$ die Gleichungen der Geraden A_jA_k, $A_j'A_k'$, so erzeugen die collinearen Büschel

$$L_2 = \lambda L_3, L_2' = \lambda L_3'; L_3 = \mu L_1, L_3' = \mu L_1'; L_1 = \nu L_2, L_1' = \nu L_2'$$

die Kegelschnitte

$$L_2L_3' - L_2'L_3 = 0, \quad L_3L_1' - L_3'L_1 = 0, \quad L_1L_2' - L_1'L_2 = 0,$$

deren von $L_i = 0$, $L_i' = 0$ verschiedenen Schnittpunkte die Doppelpunkte sind.

Ebenso umhüllen die Verbindungslinien homologer Punkte in collinearen Punktreihen einen *Kegelschnitt, welcher die Doppellinien zu Tangenten hat.* Fallen dann zwei Doppelelemente für eine besondere Collineation zusammen (§ 97), so gehen die als Örter erhaltenen Kegelschnitte durch die Einzelecke, ebenso berühren die als Enveloppen erhaltenen die Einzelseite des Tripels, alle Kegelschnitte aber berühren die Doppelseite in der Doppelecke.

295. **Gattung des Erzeugnisses.** Betrachten wir nur Büschel mit reellen Scheiteln, so sind die nach den Asymptotenrichtungen gehenden Strahlen zugleich mit diesen reell. *Daher ist das Erzeugnis eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die projectivischen Büschel zwei Paare, ein oder kein Paar paralleler homologer Strahlen enthalten.*

Um diese aufzusuchen, hat man nur durch Parallelverschiebung des einen Büschels bis zur concentrischen Lage mit dem andern die Doppelstrahlen dieser vereinigten projectivischen Büschel nach § 95 zu ermitteln. Da diese direct die Asymptotenrichtungen angeben, so ist der Kegelschnitt speciell eine gleichseitige Hyperbel, wenn die Doppelstrahlen reell und orthogonal sind, und ein Kreis, wenn dieselben

absoluter Richtung sind. *Somit erzeugen congruente Büschel eine gleichseitige Hyperbel oder einen Kreis* (vgl. § 105), *je nachdem sie ungleichen oder gleichen Drehungssinn haben.*

Zur analytischen Prüfung hat man nur die zu den gegebenen parallelen Büschel am Nullpunkt der Coordinaten einzuführen, d. h. in L_1, L_2, L_1', L_2' die constanten Glieder gleich Null zu setzen.

Um die Gattung des durch projectivische Reihen in reellen Trägern erzeugten Kegelschnittes zu bestimmen, geht man von der Bemerkung aus, daſs nur bei Centralkegelschnitten umgeschriebene Parallelogramme möglich sind, und daſs dann die Berührungspunkte ihrer Seiten auſserhalb oder innerhalb der Ecken liegen, je nachdem die Curve eine Hyperbel oder eine Ellipse ist. Nun sind, zwei der Seiten als Träger gedacht, die Berührungspunkte die homologen des Schnittpunktes, die andern Ecken die homologen der Richtungen, d. h. die Gegenpunkte der Reihen (§ 92). *Somit ist das Erzeugnis eine Hyperbel oder eine Ellipse, je nachdem die Perspectivaxe der Reihen beide Strecken von ihren Gegenpunkten bis zum Schnittpunkt der Träger äuſserlich oder innerlich teilt.* Für parallele Träger reicht dies Kriterium jedoch nicht, weil in diesen die Gegenpunkte selbst die Berührungspunkte sind. Man übersieht leicht, daſs es in diesem Fall nur darauf ankommt, ob die projectivischen Reihen von gleichem oder entgegengesetztem Sinn sind.

Eine Parabel entsteht, wenn eine Tangente ganz unendlich fern liegt, wenn also die Richtungen irgend zweier Tangenten homolog sind in den projectivischen Punktreihen auf ihnen. Gemäſs § 92 sind letztere dann ähnlich, *also ist das Erzeugnis ähnlicher Punktreihen stets eine Parabel.*

B. Wenn in den festen Geraden $\xi_1 | \eta_1$, $\xi_2 | \eta_2$ zwei projectivische Reihen gegeben sind, so bestimme man analytisch die Enveloppe der Verbindungsgeraden $\xi | \eta$ ihrer homologen Punktepaare.

Denken wir uns die Verbindungslinien eines Paares homologer Punkte mit dem Nullpunkt durch $y = m_1 x$, $y = m_2 x$ ausgedrückt, so muſs, weil das Strahlbüschel über der Reihe in $\xi_1 | \eta_1$ zu dem Büschel über der Reihe in $\xi_2 | \eta_2$ projectivisch ist,

eine Relation von der Form $am_1m_2 + bm_1 + cm_2 + d = 0$ stattfinden, wo die Coefficienten a, b, c, d etwa durch drei Paare homologer Punkte zu bestimmen sind.

Wenn wir aus den für den Punkt $x|y$ der ersten oder zweiten Reihe gleichzeitig geltenden Gleichungen

$$\xi x + \eta y + 1 = 0, \quad \xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0, \quad m_1 x - y = 0,$$

bez. $$\xi x + \eta y + 1 = 0, \quad \xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0, \quad m_2 x - y = 0$$

die Coordinaten x, y eliminiren, so erhalten wir Bestimmungsgleichungen für m_1, m_2, aus denen folgen

$$m_1 = (\xi - \xi_1) : (\eta_1 - \eta), \quad m_2 = (\xi - \xi_2) : (\eta_2 - \eta).$$

Die Einsetzung dieser Werte in die Gleichung der Projectivität gibt

$$a(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)+b(\xi-\xi_1)(\eta_2-\eta)+c(\xi-\xi_2)(\eta_1-\eta)+d(\eta_1-\eta)(\eta_2-\eta)=0,$$

$$a\xi^2+d\eta^2-(b+c)\xi\eta-\{a(\xi_1+\xi_2)-b\eta_2-c\eta_1\}\xi-\{d(\eta_1+\eta_2)-b\xi_1-c\xi_2\}\eta$$
$$+ a\xi_1\xi_2 - b\xi_1\eta_2 - c\xi_2\eta_1 + d\eta_1\eta_2 = 0.$$

Die Enveloppe ist ein Kegelschnitt, der die festen Geraden berührt, weil $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ und $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_2$ der Gleichung genügen; insbesondere eine Parabel, wenn man hat

$$\xi_1(a\xi_2 - b\eta_2) = \eta_1(c\xi_2 - d\eta_2).$$

Mit $a = d = 1$, $b = -c$ geht diese Gleichung über in

$$\xi^2 + \eta^2 - \{\xi_1 + \xi_2 - b(\eta_2 - \eta_1)\}\xi - \{\eta_1 + \eta_2 - b(\xi_1 - \xi_2)\}\eta$$
$$+ \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - b(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) = 0;$$

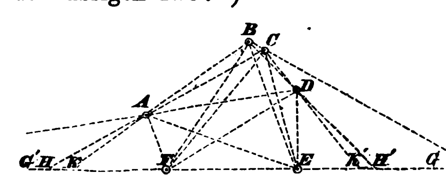
d. h. für gleiche Büschel von gleichem Drehungssinn wird der Anfangspunkt zum Brennpunkt (§ 204, 1).

296. **Beispiele.** Aus den Eigenschaften vom Doppelverhältnis von vier Punkten und von vier Tangenten eines Kegelschnittes gehen zahlreiche Sätze hervor.[81]) Denn von den vier Punkten der Curve können wir einen oder zwei im Unendlichen denken; der Scheitel des Büschels kann selbst unendlich entfernt sein; er kann mit einem der vier Punkte zusammenfallen, so dafs einer der Strahlen zur Tangente des Kegelschnittes in diesem Punkte wird; endlich kann aber das Doppelverhältnis des Büschels auf einer beliebigen Geraden gemessen, diese kann insbesondere parallel zu einem der Strahlen des Büschels gewählt werden, so dafs das

Doppelverhältnis sich auf ein einfaches Verhältnis reducirt. Aehnlich bei dem Doppelverhältnis von vier Tangenten.

Wir zeigen zuerst die beiden Fundamentaleigenschaften als Eigenschaften von Sechsecken und Sechsseiten auf, welche von der Kegelschnittstheorie unabhängig sind. In den folgenden Beispielen über specielle Fälle sodann geben wir nur die Lage des Büschels oder der Reihe, die Transversale oder den Punkt, an welchen das Doppelverhältnis gemessen wird und den resultirenden Satz an, und überlassen die nähere Nachweisung seiner Beziehung zum allgemeinen Grundgesetz dem Leser zur Übung.

B. 1) Wenn von sechs Punkten A, B, C, D, E, F irgend vier C, D, E, F mit den beiden übrigen A, B Büschel von gleichem Doppelverhältnis bestimmen, so tun dies jede vier mit den übrigen zwei.[82])



Wir beweisen zuerst, dafs aus der Voraussetzung $(A.CDEF) = (B.CDEF)$ folgt $(C.ABEF) = (D.ABEF)$.

Nennen wir die Schnittpunkte der den Gruppen $CDEF$, $ABEF$ gemeinsamen Seite EF mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks $ABCD$, nämlich BC, AD; CA, BD; AB, CD bez. G, G'; H, H'; K, K', so folgt aus der Voraussetzung die Relation

$$(HG'EF) = (GH'EF) \quad \text{oder} \quad (HGEF) = (G'H'EF) \quad (\S\ 95)$$

und daher $(C \,.\, ABEF) = (D \,.\, ABEF)$. In derselben Art ergibt sich der Beweis für die übrigen fünf Fälle, in welchen beiden Gruppen zwei Punkte gemeinsam angehören. Für die acht Fälle, in welchen dieselben drei gemeinsame Punkte enthalten, folgt aber der Satz hieraus ohne weiteren Beweis.

2) Wenn von sechs Geraden irgend vier mit den beiden übrigen Punktreihen von gleichem Doppelverhältnis bestimmen, so tun es jede vier mit den übrigen zwei.

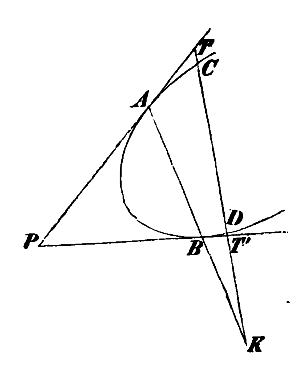
Der Beweis entspricht dem Vorigen genau nach dem Princip der Dualität.

3) $\qquad (A \,.\, ACBD) = (B \,.\, ACBD).$

Da wir unter AA, BB die Tangenten in A, B verstehen müssen, so geben diese Doppelverhältnisse, durch die Segmente der Linie CD gemessen, $(TCKD) = (KCT'D)$. *Wenn also*

eine Sehne CD zwei Tangenten in T, T' und ihre Berührungssehne AB in K schneidet, so ist immer

$$KD \,.\, TK \,.\, CT' = CK \,.\, KT' \,.\, TD.$$



Natürlich ist bei Aufstellung der Doppelverhältnisse sorgfältig darauf zu achten, dafs die entsprechenden Strahlen und die zugehörigen Punkte der Reihen in gleicher Ordnung folgen.

4) Wenn T und T' zusammenfallen, so wird $KT \,.\, CT = - CK \,.\, TD$; d. h. jede durch den Schnittpunkt von zwei Tangenten gehende Sehne wird von der Berührungssehne harmonisch geteilt (§ 159).

5) Ist T' unendlich entfernt oder CD parallel PT', so erhält man $\overline{TK}^2 = TC \,.\, TD$ (§ 159).

6) Ist einer von den vier Punkten des Kegelschnittes unendlich entfernt, so ist $(O \,.\, ABC\infty)$ constant. Mifst man dann dieses Doppelverhältnis auf der Geraden $C\infty$, und schneiden OA, OB dieselbe in A', B', so reducirt sich das Doppelverhältnis auf $A'C : B'C$. Wenn also zwei feste Punkte A, B einer Hyperbel (Parabel) mit einem veränderlichen Punkt O derselben Curve verbunden werden, und die Verbindungslinien eine feste die Curve in C schneidende Parallele zu einer Asymptote (einem Durchmesser) in Punkten A', B' schneiden, so ist das Verhältnis $A'C : B'C$ der von diesen bis zur Curve gemessenen Abschnitte constant.

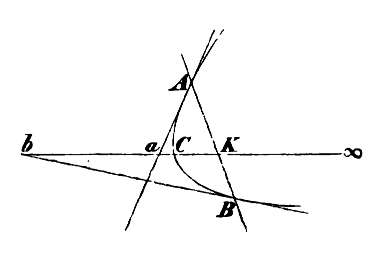
7) Wenn man dasselbe Doppelverhältnis auf einer andern Parallelen mifst, so erfährt man, dafs die Verbindungsgeraden von drei festen Punkten einer Hyperbel oder Parabel mit einem veränderlichen Punkt derselben von einer festen Parallelen zu einer Asymptote oder einem Durchmesser in Punkten A, B, C so geschnitten werden, dafs $AB : AC$ constant ist.

8) Setzen wir in 6) voraus, dafs die Geraden, welche A, B mit einem vierten Punkt O' verbinden, den Strahl $C\infty$ in A'', B'' schneiden, so ist $A'B' : A''B'' = A'C : A''C$; lassen wir nun auch noch den Punkt C so in unendliche Entfernung rücken, dafs die Gerade $C\infty$ eine Asymptote wird, so wird das Verhältnis $A'B' : A''B''$ der Einheit gleich, und wir erhalten den Satz § 188, 2.

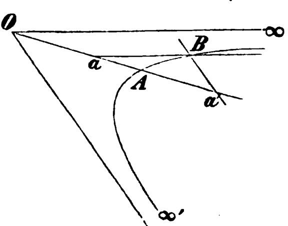
9) $$(A \,.\, ABC\infty) = (B \,.\, ABC\infty).$$

Werden diese Doppelverhältnisse auf der Geraden $C\infty$ gemessen, und schneidet diese in a, b die Tangenten zu A und B, in K

aber die Berührungssehne AB, so ist $aC:KC = KC:bC$. *Wenn also eine Parallele zu einer Asymptote einer Hyperbel oder zum Durchmesser einer Parabel zwei Tangenten und ihre Berührungssehne schneidet, so ist der Abschnitt zwischen Curve und Berührungssehne das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten von der Curve zu den Tangenten.* Oder umgekehrt: Wenn eine Gerade ab von fester Richtung die Seiten eines Dreiecks in Punkten abK schneidet, und ein Punkt C in ihr so bestimmt wird, dafs $\overline{CK}^2 = Ca \, . \, Cb$ ist, so ist der Ort von C eine Parabel, wenn ab der Halbirungslinie der Dreiecksbasis AB parallel ist (§ 220); sonst immer eine Hyperbel, deren eine Asymptote zu ab parallel ist.



10) Sind von den festen Punkten zwei unendlich entfernt, so hat man z. B. $(\infty \, . \, AB\infty\infty') = (\infty' \, . \, AB\infty\infty')$ und die Geraden $\infty\infty$, $\infty'\infty'$ sind die beiden Asymptoten, $\infty\infty'$ aber ist die unendlich ferne Gerade selbst. Mifst man diese Doppelverhältnisse auf dem Durchmesser OA, und wird dieser von den Parallelen zu den Asymptoten $B\infty$, $B\infty'$ in a, a' geschnitten, so ist $AO : aO = a'O : AO$, d. h. *Parallelen zu den Asymptoten, die durch einen beliebigen Punkt einer Hyperbel gezogen werden, bestimmen in einem Halbmesser vom Centrum aus gemessene Segmente, die diesen selbst zur mittleren geometrischen Proportionale haben.*



Wenn daher umgekehrt durch einen festen Punkt O eine Gerade gezogen wird, die zwei festen vom Punkt B ausgehenden Strahlen in den Punkten a, a' begegnet, so ist der Ort eines Punktes A auf ihr, dessen Abstand von O das geometrische Mittel zwischen Oa, Oa' ist, eine Hyperbel, die O zum Centrum und ihre Asymptoten parallel den festen Strahlen Ba, Ba' hat.

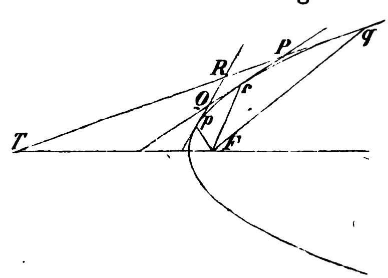
11) $\quad (\infty \, . \, AB\infty\infty') = (\infty' \, . \, AB\infty\infty')$.

Werden die Segmente in den Asymptoten gemessen, so erhält man $aO:bO = b'O:a'O$, oder: das Rechteck der Asymptotenparallelen eines Curvenpunktes ist constant. (§ 188, 1.)

297. Zu den Beispielen des vorigen §, die sich auf das Doppelverhältnis von vier Punkten beziehen, fügen wir spe-

cielle Fälle des Satzes vom Doppelverhältnis der vier Tangenten.

B. 1) Im Fall der Parabel ist eine der Tangenten ganz in unendlicher Entfernung: *Drei feste Tangenten einer Parabel schneiden jede vierte Tangente derselben in Punkten A, B, C so, dass $(A\infty BC) = AB : AC$ constant ist.* (§ 296, 7.) Fällt die veränderliche Tangente der Reihe nach mit jeder der gegebenen Tangenten zusammen, so erhalten wir den Satz



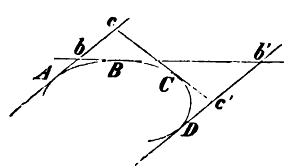
$$pQ : QR = RP : Pq = Qr : rP.$$

2) *Construction des Krümmungscentrums für die Kegelschnitte.* Nach § 191 gilt für die Normalen in den Punkten P P' eines Kegelschnittes, welche die Axen desselben in N_1, N_1' bez. N_2, N_2' schneiden, die Relation $PN_1 : PN_2 = P'N_1' : P'N_2'$. Aus der vorigen Eigenschaft der Parabel folgt daher: *Zwei Normalen eines Kegelschnittes, die ihre Fufspunkte verbindende Sehne und die beiden Axen desselben sind fünf Tangenten einer Parabel.*[83]) Daraus entspringen constructive Lösungen mancher Aufgaben. Ist der Kegelschnitt insbesondere eine Parabel, so sind zwei Normalen, die Sehne ihrer Fufspunkte und die Axe der Parabel Tangenten einer Parabel, die letztere insbesondere die Scheiteltangente derselben.

Läfst man dann die Punkte P, P' zusammenfallen, *so bilden die Axen des Kegelschnittes, die Tangente und Normale in P Tangenten derselben Parabel, und* (§ 238) *der Berührungspunkt derselben in der Normale ist das Krümmungscentrum für den Punkt P.* Jede Art der Anordnung, in welcher man die Normale als ein Paar Nachbarseiten und die Axen, die Tangente und die unendlich ferne Gerade als die vier übrigen Seiten eines Brianchonschen-Sechsseits bezeichnen kann, führt auf eine bequeme Construction des Krümmungscentrums.

3) Für P als einen Punkt der Parabel, N und T als die Schnittpunkte seiner Normale und Tangente mit ihrer Axe ergeben sich folgende Constructionen des Krümmungscentrums K: 1) Man ziehe PO und NO bez. parallel zur Axe und Tangente; OK normal zur Axe. 2) Man ziehe PQ und TQ normal zur Axe und zur Tangente, QK parallel zur Axe. 3) Man ziehe TR und NR normal zur Tangente und zur Axe, RK parallel zur Tangente.

4) Wenn wir zwei von den vier festen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel parallel annehmen, und die veränderliche Tangente nach einander mit beiden zusammenfallen lassen, so wird im ersten Fall das Doppelverhältnis $= Ab : Ac$ und im zweiten $= Dc' : Db'$; daher ist das Rechteck $Ab \,.\, Db'$ constant.

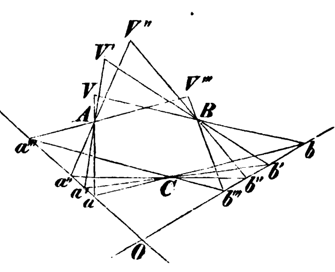


Aus dem Gesetz vom Doppelverhältnisse von vier Punkten leitet man ab, dafs die Geraden, welche die Punkte A, D mit einem beliebigen Punkt O der Curve verbinden, die parallelen Tangenten in Punkten b, b' schneiden, für welche das Rechteck $Ab \,.\, Db'$ gleichfalls constant ist.

5) Wenn man die Asymptoten einer Hyperbel mit zwei beliebigen Tangenten derselben in a, a' und b, b' schneidet, so folgt aus den von ihnen auf den Asymptoten selbst bestimmten Doppelverhältnissen für O als das Centrum die Relation $Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob'$, d. h. das Rechteck der Tangentenabschnitte auf den Asymptoten ist constant. (§ 188.)

298. Wir geben ferner eine Reihe von Problemen, die mit Hilfe der Eigenschaften der projectivischen Büschel und Reihen am Kegelschnitt gelöst werden.

B. 1) Beweis für *Mac Laurin's* Erzeugungsmethode: *Ein Kegelschnitt wird als der Ort der freien Ecke V eines Dreiecks gefunden, dessen Seiten sich um die festen Punkte A, B, C drehen, während zwei seiner Ecken sich in den festen Geraden Oa, Ob bewegen* (vgl. § 46, 2).



Wenn vier solche Dreiecke abV, $a'b'V'$, $a''b''V''$, $a'''b'''V'''$ verzeichnet sind, so ergibt sich aus der Identität der Büschel $(C \,.\, aa'a''a''')$ und $(C \,.\, bb'b''b''')$ die Relation $(aa'a''a''') = (bb'b''b''')$, daher auch

$$(A \,.\, VV'V''V''') = (B \,.\, VV'V''V''').$$

Also liegen die Punkte A, B, V, V', V'', V''' in demselben Kegelschnitt, oder der Ort von V''' ist stets der durch die Punkte A, B, V, V' V'' gehende Kegelschnitt. In Worten: Die Strahlenbüschel aus A und B sind projectivisch mit einander, weil sie beide mit dem Strahlenbüschel aus C perspectivisch sind; daher ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ein durch A und B gehender Kegelschnitt (vgl. § 46, 3).

2) Die zur Mac Laurin'schen duale Erzeugung. Wenn vier Punkte A, D, F, B eines Kegelschnittes und zwei feste Gerade DC, DE aus einem derselben gegeben sind, so soll die Enveloppe der Sehne CE bestimmt werden, welche die ferneren Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve begrenzen.

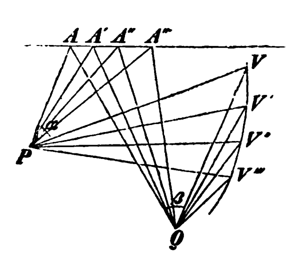
Nehmen wir die Figur § 293, p. 475 l., so bewegen sich die Ecken des Dreiecks CEM in den festen Geraden DC, DE, NL und zwei seiner Seiten gehen durch die festen Punkte B, F; daher umhüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt, der von den Geraden DC, DE berührt wird.

3) Wenn vier Punkte A, B, D, E eines Kegelschnittes und zwei Gerade AF, CD aus zweien derselben gegeben sind, so geht die durch ihre ferneren Schnittpunkte mit der Curve bestimmte Sehne durch einen festen Punkt. (Vgl. § 284.)

Denn das Dreieck CFM derselben Figur hat zwei Seiten, welche durch die festen Punkte B, E gehen, und seine Ecken bewegen sich auf den festen und in einem Punkt sich schneidenden Geraden AF, CD, NL; daher geht CF durch einen festen Punkt. (Dies entspricht nach dem Princip der Dualität dem Satz § 46, 2.)

4) *Chasles*[84]) hat darauf aufmerksam gemacht, dafs der Beweis in 1) noch anwendbar ist, wenn die Seite ab, anstatt durch einen festen Punkt C zu gehen, einen Kegelschnitt berührt, der die Geraden Oa, Ob zu Tangenten hat. Denn dann schneiden irgend vier Lagen der Seite ab diese Tangenten Oa, Ob so, dafs $(a\,a'\,a''\,a''') = (b\,b'\,b''\,b''')$ ist (§ 291), und die Fortsetzung des vorigen Beweises bleibt bestehen.

5) *Newton's Erzeugungsmethode der Kegelschnitte*: Zwei Winkel von constanter Gröfse drehen sich um ihre festen Scheitel P und Q, und der Schnittpunkt des einen Paares ihrer Schenkel durchläuft eine Gerade AA'; dann ist der Ort des Schnittpunktes V ihrer andern Schenkel ein Kegelschnitt, welcher durch die beiden Punkte P und Q hindurchgeht.



Denn sind wieder vier Lagen der sich drehenden Winkel gegeben, so ist

$$(P\,.\,A\,A'\,A''\,A''') = (Q\,.\,A\,A'\,A''\,A''');$$

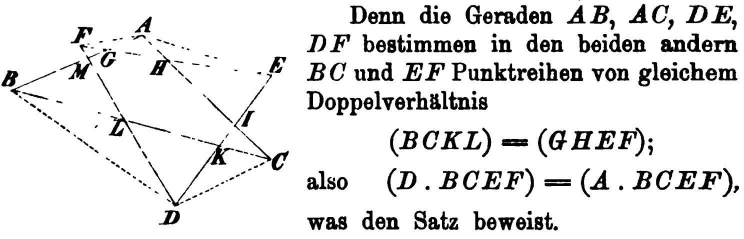
es ist aber, weil die Winkel in dem je vom ersten Schenkel beschriebenen Büschel mit den entsprechenden Winkeln des Büschels je der zweiten Schenkel übereinstimmen, $(P\,.\,V\,V'\,V''\,V''') = (Q\,.\,V\,V'\,V''\,V''')$, und der Ort von V''' ist wie vorher ein durch P, Q, V, V', V'' gehender Kegelschnitt.

6) *Chasles* hat auch diese Methode dadurch erweitert, dafs

er den Punkt A anstatt in einer Geraden in einem durch die Punkte P und Q gehenden Kegelschnitt bewegt denkt; denn auch dann ist immer $(P . A A' A'' A''') = (Q . A A' A'' A''')$.

7) Der Beweis bleibt auch noch derselbe, wenn anstatt der Unveränderlichkeit der Winkel APV, AQV festgesetzt wäre, dafs dieselben in festen Geraden constante Abschnitte bestimmen; denn auch dann gälte die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(P . A A' A'' A''') = (P . V V' V'' V''')$, weil beide Büschel in einer festen Geraden Abschnitte von derselben Länge bestimmen. Wenn also die Basis eines Dreiecks und der von den Seiten desselben in irgend einer festen Geraden bestimmte Abschnitt gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein Kegelschnitt.

8) *Die Ecken von zwei demselben Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiecken ABC, DEF sind sechs Punkte eines Kegelschnittes.*



Denn die Geraden AB, AC, DE, DF bestimmen in den beiden andern BC und EF Punktreihen von gleichem Doppelverhältnis

$$(BCKL) = (GHEF);$$

also $$(D . BCEF) = (A . BCEF),$$

was den Satz beweist.

Ebenso beweist man den Satz: *Die Seiten von zwei demselben Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecken sind sechs Tangenten eines Kegelschnittes.*

Die Aufsuchung und den Beweis anderer den vorher entwickelten Eigenschaften nach dem Princip der Dualität entsprechender Sätze überlassen wir dem Leser.

9) *Das Doppelverhältnis von vier Durchmessern eines Kegelschnittes ist dem der bez. conjugirten Durchmesser gleich.*

Die conjugirten Durchmesser bilden zwei projectivische Büschel aus dem Centrum als dem gemeinsamen Scheitel, oder die Richtungen der Paare conjugirter Durchmesser bilden zwei projectivische Reihen in der unendlich fernen Geraden. Denn das Doppelverhältnis von vier aus einem Punkt der Curve gezogenen Sehnen ist dem Doppelverhältnis ihrer Supplementarsehnen gleich (§ 186).

10) Mittelpunktsort des einem gegebenen Viereck umgeschriebenen Kegelschnittes. (Vgl. § 272, 1.)

Denkt man Durchmesser des Kegelschnittes nach den Mittelpunkten der Seiten des Vierecks gezogen, so ist ihr Doppelverhältnis dem ihrer bez. conjugirten gleich und daher constant, weil diese den zugehörigen Seiten des Vierecks parallel sind. Der fragliche Ort ist daher ein durch die Mittelpunkte der ge-

gebenen Seiten gehender Kegelschnitt. Da aber das betrachtete System drei Kegelschnitte enthält, welche in Linienpaare degeneriren, nämlich die Gegenseitenpaare und das Diagonalenpaar des Vierecks, so sind die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare und der Diagonalen gleichfalls Punkte des Ortes.

299. Involution harmonischer Pole und Polaren.

Die homologen Strahlen a, a'; b, b'; ... projectivischer Büschel an zwei Punkten T, T' des Kegelschnittes werden gemäfs § 94 und § 294 von einer Geraden p durch den Berührungspol T'' in entsprechenden Punkten pa, pa'; pb, pb' involutorischer Reihen geschnitten. Ein Paar der Involution wird von T'' und dem Schnittpunkt mit TT' gebildet. Jeder Doppelpunkt (§ 95) liefert homologe Strahlen d_1, d_1' bez. d_2, d_2', d. h. er ist selbst einer der beiden Schnittpunkte von p mit dem Kegelschnitt. Die Involution ist durch die Doppelpunkte bestimmt, also nur von der Lage ihres Trägers p zum Kegelschnitt abhängig. Ihre Paare sind daher harmonische Pole bezüglich des Kegelschnittes, wie auch daraus hervorgeht, dafs sie die Diagonalpunkte in eingeschriebenen Vierecken wie T, T', aa', bb' sind (§ 158).

Dergestalt bestimmt der Kegelschnitt in jeder Geraden der Ebene eine Involution harmo-

Die homologen Punkte A, A'; B, B'; ... projectivischer Reihen in zwei Tangenten t, t' des Kegelschnittes werden gemäfs § 94 und § 294 aus einem Punkt P der Berührungssehne t'' durch entsprechende Strahlen PA, PA'; PB, PB' eines involutorischen Büschels projicirt. Ein Paar der Involution wird von t'' und dem Strahl nach tt' gebildet. Jeder Doppelstrahl (§ 95) schneidet daher homologe Punkte D_1, D_1' bez. D_2, D_2' aus, d. h. er ist selbst eine der beiden durch P gehenden Tangenten des Kegelschnittes. Die Involution ist durch die Doppelstrahlen bestimmt, also nur von der Lage ihres Scheitels P zum Kegelschnitt abhängig. Ihre Paare sind daher harmonische Polaren bezüglich des Kegelschnittes, wie auch daraus hervorgeht, dafs sie die Diagonalen in Tangentenvierseiten wie t, t', AA', BB' sind (§ 158).

Dergestalt bestimmt der Kegelschnitt in jedem Punkt der Ebene eine Involution harmo-

nischer Pole, welche ihr Schnittpunktepaar definirt. Demnach können zwei conjugirt imaginäre Punkte dadurch als Bestimmungsstücke ersetzt werden, dafs man zwei Paare harmonischer Pole in ihrem reellen Träger angibt, und sie so *darstellt* (§ 96).

Die Polinvolution in p wird aus dem Pol von p durch die Polarinvolution desselben projicirt. Die Angabe einer Polinvolution und die des Poles ihres Trägers ersetzt also zwei imaginäre Punkte *nebst* ihren Tangenten.

nischer Polaren, welche sein Tangentenpaar definirt. Demnach können zwei conjugirt imaginäre Tangenten dadurch als Bestimmungsstücke ersetzt werden, dafs man zwei Paare harmonischer Polaren aus ihrem reellen Schnittpunkt angibt und sie so *darstellt.*

Die Polareninvolution um P schneidet die Polare von P in der Polinvolution derselben. Die Angabe einer Polarinvolution und der Polare ihres Scheitels ersetzt also zwei imaginäre Tangenten *nebst* Berührungspunkten.

Gegebene Involutionen an Pol und Polare characterisiren also die Kegelschnitte eines Doppelberührungsbüschels, auch bei imaginärer Berührung.

Am Centrum des Kegelschnittes besteht insbesondere *die Involution conjugirter Durchmesser.* Dieselbe definirt die Asymptoten als ihre Doppelstrahlen, die Axen als ihr Rechtwinkelpaar (vgl. § 95). Die perspectivische Polinvolution wird von den Richtungen der Durchmesser gebildet. In Bezug auf alle Kreise ist die Involution auf der unendlich fernen Geraden dieselbe als Definition der absoluten Richtungen. Die Durchmesserinvolutionen des Kreises sind Rechtwinkelinvolutionen (§ 96).

Durch jeden Punkt geht ein rechtwinkliges Paar harmonischer Polaren. An einem Brennpunkt des Kegelschnittes bilden die conjugirten Polaren eine Rechtwinkelinvolution (§ 194). Beim Kreis sind im Mittelpunkt auch die Brennpunkte vereinigt.

Auf Tangenten eines Kegelschnittes sind die Polinvolutionen stets parabolisch, denn jeder Punkt derselben ist dem Berührungspunkt als einzigem Doppelpunkt conjugirt (§ 95).

Dasselbe gilt von der Involution conjugirter Richtungen, bez. Durchmesser der Parabel. Auf Parabeldurchmessern und Asymptotenparallelen sind die involutorischen Polreihen speciell symmetrisch (§ 96).

Offenbar treten damit die Paare conjugirt imaginärer Punkte und Tangenten des Kegelschnittes in die Reihe der (Paare von) linearen Bedingungen, aus denen derselbe construirt werden kann. B. 6 f.). Wir denken die Involutionen elliptisch, weil man sonst durch Ermittelung ihrer Doppelelemente auf die Construction aus fünf reellen Punkten oder Tangenten zurückkommt.

B. 1) Wenn man von jedem Punkt einer Geraden aus die beiden Tangenten an einen Kegelschnitt zieht, so begegnen diese irgend einer festen Tangente je in zwei Punkten, die eine Involution bilden, deren Paare den Punkten jener Geraden nach gleichem Doppelverhältnis entsprechen (§ 94). Die in den Schnittpunkten der gegebenen Geraden mit dem Kegelschnitt an diesen gezogenen Tangenten bestimmen in der festen Tangente die Doppelpunkte dieser Involution. Insbesondere bestimmen die Paare der parallelen Tangenten in einer festen Tangente eine involutorische Reihe, die in den Asymptoten ihre Doppelpunkte hat.

2) Wenn man von einem festen Punkt aus Tranversalen nach einem gegebenen Kegelschnitt und von einem beliebigen Punkt des Kegelschnitts aus nach den Endpunkten der bezüglichen Sehnen die Geraden zieht, so bilden diese ein Büschel involutorischer Paare und entsprechen dem Büschel der Transversalen projectivisch. Die Doppelstrahlen gehen nach den Berührungspunkten der von jenem Punkte aus an den Kegelschnitt möglichen Tangenten. Wenn umgekehrt die Schenkel von Winkeln aus einem Punkt eines Kegelschnittes Paare einer Involution sind, so gehen die von ihnen bestimmten Sehnen durch einen Punkt; also insbesondere die von rechten Winkeln, die von solchen, deren Schenkel gegen eine feste Gerade gleich geneigt sind, und allgemein die von solchen Schenkeln, für die die trigonometrischen Tangenten ihrer Winkel gegen eine feste Gerade constantes Product haben.

3) Wenn man durch einen Punkt des Kegelschnittes Strahlen nach den Enden von zwei Sehnen desselben zieht, so bilden sie mit der Tangente desselben und dem nach dem Schnittpunkt der Sehnen gehenden Strahl drei Paare in Involution.

4) Die conjugirten Strahlen eines harmonischen Viererbüschels aus einem Punkt des Kegelschnittes schneiden ihn in Punkten,

deren Verbindungsgeraden harmonische Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt sind.

5) Wenn ein Vierseit einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, so bilden die Schnittpunkte einer beliebigen Tangente desselben mit den Paaren der Gegenseiten, der Berührungspunkt und der Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseitenpaare drei Paare in Involution.

6) Ein Pol P, seine Polare p, nebst der Involution harmonischer Pole in dieser oder harmonischer Polaren von jenem, und ein Punkt A oder eine Tangente a des Kegelschnittes bestimmen denselben. Denn man hat für das erste nur in dem Strahl PA zu A den in Bezug auf P und den Schnitt mit der Polaren ihm harmonisch conjugirten Punkt A^* zu bestimmen, so liefert jedes Paar XX_1 der Involution in p zwei neue Punkte des Kegelschnittes auf einer Geraden durch den Pol in den Schnitten der Geraden AX, A^*X_1 und AX_1, A^*X. Und dual entsprechend im zweiten Falle.

7) Die Polinvolution in einer Geraden p und drei Punkte A, B, C des Kegelschnittes führen zu seiner Construction wie folgt: Sind X und Y die Schnitte von p mit den Geraden AB, BC resp. und X^*, Y^* ihre harmonisch conjugirten in Bezug auf AB, BC, so ist der Schnitt der Geraden X^*X_1 und Y^*Y_1 der Pol P von p. Auch liefern CY_1 und AX_1 sofort B^*, etc. Und dual entsprechend.

8) Die Polinvolutionen in zwei Geraden p, p' und ein Punkt A bestimmen den Kegelschnitt. Denn für XY' als den Schnitt von p und p' ist X_1Y_1' die zugehörige Polare, die die Pole P und P' der Geraden enthält; für ihre Schnittpunkte B_1B^* mit dem Kegelschnitt würden AB und AB^* sowohl in p wie in p' ein Paar der zugehörigen Polinvolutionen liefern, so dafs diese Strahlen das gemeinsame Paar der aus A über diesen gebildeten involutorischen Büschel sein müssen. (§ 300, 3.) Und dual entsprechend.

300. **Projectivität und Involution auf dem Kegelschnitt.** Mit der Erweiterung des Begriffes eines Doppelverhältnisses von den Elementargebilden auf Gebilde zweiten Grades ist auch eine analoge Übertragung des Projectivitätsbegriffes geboten. Man bezeichnet etwa den Kegelschnitt als *Punktreihe zweiter Ordnung* oder als *Strahlbüschel zweiter Classe.*

Man nennt Punkt- oder Tangentensysteme desselben Kegelschnittes projectivisch, wenn bei eindeutiger Zuordnung die homo-

logen Doppelverhältnisse von vier homologen Punkten oder Tangenten gleich sind. Dies fällt unter die Definition der allgemeinen Collineation (§ 89), denn projectivisch sind dann auch die erzeugenden Strahlbüschel an Punkten des Kegelschnittes, welche zu jenen Punktsystemen perspectivisch sind, oder die erzeugenden Punktreihen in Tangenten des Kegelschnittes, welche zu jenen Tangentensystemen perspectivisch sind. Diese Systeme an der Curve besitzen wiederum zwei reelle, imaginäre oder vereinte Doppelpunkte.

Die projectivischen Systeme bilden eine *Punkt- oder Tangenteninvolution am Kegelschnitt*, sobald zwei und damit alle homologen Elemente sich vertauschbar entsprechen (§ 93). Dies tritt vor allem ein, wenn die gegebenen Systeme perspectivisch sind, d. h. homologe Punkte auf Strahlen durch einen Punkt P liegen oder homologe Strahlen durch Punkte einer Geraden p gehen. Die Doppelelemente sind dann die Tangenten aus P oder die Schnittpunkte in p.

Bilden also die Tangenten a, a'; b, b' in den Punkten A, A'; B, B' einer Punktinvolution die Tangenteninvolution, so sind P und p Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt und heifsen auch Pol und Polare der Involution an demselben. Es liegt P auf AA', BB' und ab, $a'b'$, und p enthält aa', bb' und AB, $A'B'$ (§ 159). Diese Bèmerkung liefert sehr praktische Constructionen der Involutionen überhaupt, indem man leicht *Involutionen an einem Hilfskreise* einführt, die zu den gegebenen perspectivisch sind. Die Benutzung des Hilfskreises gibt auch den Constructionen mit imaginären Elementen ihre praktische Form, die in § 96 begründet wurde. B. 4.

Anderseits erkennt man, *dafs der Kegelschnitt auf sich selbst centrisch collinear (involutorisch) bezogen ist, wenn man für einen beliebigen Punkt diesen Pol als Centrum, seine Polare als Axe der Collineation nimmt* (§ 98).

B. 1) Die im Text angedeutete einfache Construction der Axen und Doppelstrahlen eines durch zwei Strahlenpaare A, A'; B, B' bestimmten involutorischen Büschels ist folgende: Man legt durch den Scheitel des Büschels einen Kreis und zieht die Sehnen

AA', BB', sie schneiden sich in einem Punkt P, durch welchen die Sehnen aller Paare der Involution gehen. Das rechtwinklige Paar hat seine Enden in dem durch P gehenden Durchmesser; das Paar der Doppelstrahlen geht nach den Berührungspunkten der Tangenten, die man von P aus an den Kreis ziehen kann. Es ist offenbar, dafs man durch dieselbe Construction die Doppelpunkte einer involutorischen Reihe bestimmen kann.

2) Direct construirt man diese Doppelpunkte einer involutorischen Reihe auf Grund des dualistisch entsprechenden Satzes: An einen die Reihe berührenden Kreis zieht man von den gegebenen Paaren A, A'; B, B' die Tangenten und verbindet ihre Schnittpunkte durch eine Gerade p. Die Tangenten des Kreises in den Punkten der letzteren gehen nach den Doppelpunkten.

3) Derselbe erste Satz löst auch die Aufgabe, das gemeinsame Paar von zwei vereinigten involutorischen Büscheln, und der dualistische zweite die Aufgabe, das gemeinsame Paar von zwei vereinigten involutorischen Reihen zu bestimmen. Die Aufgaben der Bestimmung eines Paares der Involution von Strahlen, welches rechtwinklig ist, oder einen gegebenen Winkel, ein gegebenes Segment harmonisch teilt, die Bestimmung eines zu zwei Paaren von Elementen zugleich harmonischen Paares, etc. sind besondere Fälle dieses Problems. Das gemeinsame Paar ist stets reell, so lange nicht die Doppelelemente *beider* Involutionen reell sind und sich trennen.

5) Zwei imaginäre Gerade in derselben Ebene sind durch ihre reellen Punkte T, T^* und ihre symmetrisch harmonischen Darstellungen $\{aba'\}$ und $\{a^*b^*a^{*\prime}\}$ an denselben gegeben; man bestimme ihren Schnittpunkt. Man lege durch die reellen Scheitel T, T^* einen Hilfskreis, der die Strahlen a, b etc. in A, B, ... schneidet. Um nun die Involutionen $\{aba'\}$ etc. mit Beibehaltung ihres Bewegungssinnes von dem gemeinsamen Strahl TT^* aus harmonisch darzustellen und dann nach § 96 als ihren perspectivischen Durchschnitt die harmonische Darstellung des gesuchten Schnittpunktes zu erhalten, sind folgende Schritte zu thun; für die Involution um T: Man bestimme ihren Pol P im Hilfskreis auf dem Durchmesser von B und in der Geraden AA', daraus den zu T^* entsprechenden Punkt $T^{*\prime}$ und den vierten harmonischen zu T in Bezug auf $T^{*\prime}T^*$, sowie dessen durch P gehende und den Kreis in U, U' schneidende Polare. Sind dann t^*, $t^{*\prime}$, u, u' die Strahlen aus T nach T^*, $T^{*\prime}$, U, U' und liegen u, $t^{*\prime}$, u' und t^* im Sinne von aba', so bilden sie die harmonische Darstellung der ersten imaginären Geraden von t^* aus. Ebenso erhält man die der zweiten und die ihres Schnittpunktes.

5) Zwei imaginäre Punkte sind durch ihre reellen Geraden t, t^* und ihre symmetrisch harmonischen Darstellungen in den-

selben resp. $\{ABA'\}$ und $\{A^*B^*A^{*\prime}\}$ bestimmt. Man construirt ihre Verbindungsgerade, indem man dual entsprechend zu der Construction in 4) ihre harmonischen Darstellungen aus dem Schnittpunkt von t und t^* mittelst eines diese Geraden berührenden Hilfskreises bestimmt und das zu beiden perspectivische Büschel bildet. Die Construction des Schnittpunktes einer reellen mit einer imaginären Geraden und der Verbindungsgeraden eines reellen mit einem imaginären Punkte sind in den Definitionen enthalten.

6) Hiernach bleibt die Construction des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen oder die Vervollständigung der Involution aus zwei Paaren (vgl. 301, 1), der Projectivität aus drei Paaren von Elementen auch dann ausführbar, wenn unter diesen Elementen resp. diesen Paaren derselben imaginäre gegeben sind.

301. *Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden eine beliebige Gerade in Punktepaaren einer Involution.*[85])

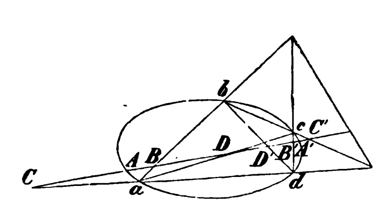
Sind a, b, c, d die Grundpunkte des Büschels und A, A' die Schnittpunkte eines seiner Kegelschnitte mit der Geraden, so ist

$$(a \,.\, AdbA') = (c \,.\, AdbA'),$$

und, in der Transversale AA' gemessen,

$$(ACBA') = (AB'C'A') = (A'C'B'A).$$

Die Punktepaare A, A' gehören somit zu der Involution, die durch die Paare B, B'; C, C' bestimmt ist, in welchen die Transversale zwei Gegenseitenpaare des durch die Grundpunkte bestimmten Vierecks schneidet. (Vgl. § 94.) So schneiden auch Kreise eines Büschels jede Gerade in Punktepaaren einer Involution (§ 125), die Radicalaxe bestimmt den Centralpunkt, die zwei Kreise des Systems, welche die Gerade berühren, geben die Doppelpunkte an.



Nach dem Princip der Dualität entspricht dem vorigen Hauptsatz der andere: *Die Kegelschnitte einer Schaar haben mit einem beliebigen Punkte Tangentenpaare in Involution gemein.* Die drei Punktepaare in der Schaar liefern die Con-

struction der Involution mittels des vollständigen Vierseits in § 94 wieder. Diese Constructionen aus Viereck und Vierseit liefern zu einem durch fünf Punkte resp. fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt neue Punkte auf den Strahlen durch einen derselben resp. neue Tangenten aus den Punkten einer der gegebenen.

B. 1) Eine Involution in der Geraden p sei durch zwei Paare X, X_1 und Y, Y_1 conjugirt imaginärer Punkte mittels ihrer symmetrisch harmonischen Darstellungen $\{ABA'\}$ resp. $\{CDC'\}$ bestimmt; man construirt Z_1 zu Z mittels eines Büschels von Kreisen mit reellen Grundpunkten S_1, S_2 (§ 124). Der Kreis des Büschels durch Z schneidet B zum zweiten mal in Z_1. Die Kreise durch ein willkürlich gewähltes S_1 und X, X_1 resp. Y, Y_1 sind bestimmt aus der Polinvolution in p — Paare $\{ABA'B'\}$ etc. — und der Involution rechtwinkliger Richtungen in der unendlich fernen Geraden nach § 299, 8. Das Rechtwinkelpaar der Involution aus S_1 über $ABA'B'$ gibt die Endpunkte des in B zu p rechtwinkligen Durchmessers für den ersten und das der Involution über $CDC'D'$ die des in D zu p rechtwinkligen Durchmessers für den zweiten Kreis. Ist das eine der gegebenen Paare reell, so vereinfacht sich die Construction. Sie bleibt auch für zwei reelle Paare nützlich, obschon sie nicht linear ist.

2) Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so schneidet eine Transversale diesen und zwei Seiten des Dreiecks, die dritte Seite und die Tangente des Kegelschnittes in der gegenüberliegenden Ecke in sechs Punkten einer Involution.

Denn die Tangente bildet mit dem Dreieck ein eingeschriebenes Viereck.

3) Jede Transversale schneidet einen Kegelschnitt und zwei feste Tangenten desselben in zwei Punktepaaren, welche eine Involution bestimmen, die in der Berührungssehne jener festen Tangenten desselben einen Doppelpunkt hat.

Denn die Berührungssehne bildet als ein Paar von Gegenseiten mit den Tangenten ein eingeschriebenes Viereck.

Man bildet leicht die dualistisch entsprechenden Sätze.

4) In jeder Transversale werden von einer Hyperbel und ihren Asymptoten Segmente bestimmt, die denselben Mittelpunkt haben. — Denn einer der Doppelpunkte ist unendlich fern.

5) Wenn zwei Kegelschnitte demselben Viereck umgeschrieben sind, so sind die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente zu ihren Schnittpunkten mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks harmonisch conjugirt. Denn sie sind die Doppelpunkte der Involution, welche diese bestimmen.

6) Wenn drei Kegelschnitte demselben Viereck umgeschrieben sind, so wird eine gemeinschaftliche Tangente von zweien unter ihnen durch den dritten harmonisch geteilt. (§ 125.)

7) Wenn man durch den Schnittpunkt der Schnittsehnen von zwei Kegelschnitten eine Tangente an den einen derselben legt, so wird diese durch den andern harmonisch geteilt.

Denn jener Punkt ist ein Doppelpunkt, etc. Darum halbirt der Berührungspunkt einer zur Radicalaxe zweier Kreise parallelen Tangente die in ihr gelegene Sehne, und in allen Sehnen des einen von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten, welche Tangenten des andern sind, gibt der Berührungspunkt die Mitte an. (§ 244, 2.)

8) Wenn zwei Kegelschnitte mit einander in doppelter Berührung sind (oder wenn sie eine Berührung dritter Ordnung mit einander haben), so wird jede Tangente des einen in ihren Schnittpunkten mit dem andern und in dem Schnittpunkt mit der Berührungssehne beider Kegelschnitte harmonisch geteilt.

Denn die gemeinschaftlichen Sehnen fallen zusammen, etc. Die Anwendung auf concentrische Kreise, überhaupt ähnliche concentrische und ähnlich gelegene Kegelschnitte ist offenbar.

9) Man soll einen Kegelschnitt durch vier Punkte A, B, C, D construiren, der eine gegebene Gerade berührt.

Der Berührungspunkt ist ein Doppelpunkt der Involution, welche in der Geraden durch die Schnittpunkte mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks $ABCD$ bestimmt ist (§ 300, 2; 308, 6); das Problem hat daher zwei Lösungen.

10) Wenn eine Parallele zu einer Asymptote einen Kegelschnitt in C und die Seiten eines eingeschriebenen Vierecks in den Punkten a, b, c, d schneidet, so ist $Ca \cdot Cc = Cb \cdot Cd$; denn C ist das Centrum des Systems.

11) Man behandle 3) u. f. des § 296 als Fälle der Involution.

In 3) ist K ein Doppelpunkt, in 4) ebenso T, in 5) ist T ein Centrum, etc.

12) Zu einem System von Kegelschnitten durch dieselben vier Punkte gibt es auf jeder beliebigen Geraden zwei reelle oder imaginäre Punkte, welche in Bezug auf alle seine Kegelschnitte harmonische Pole sind.

Es sind die Doppelpunkte der durch dieselben bestimmten Involution. (Vgl. 14.) § 314, 1) bestimmt sie durch einen der Geraden entsprechenden Kegelschnitt.

Wenn ein System von Kegelschnitten vier feste Gerade berührt, so gehen durch jeden Punkt zwei reelle oder imaginäre Strahlen, welche in Bezug auf alle diese Kegelschnitte conjugirt oder harmonische Polaren sind.

13) Alle die Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte gehen, haben ein reelles oder imaginäres Paar von parallelen conjugirten Durchmessern.

Denn man denke die Transversale des Satzes der vorigen Aufgabe unendlich entfernt, etc.

14) Man bestimme unter den durch vier feste Punkte gehenden Kegelschnitten denjenigen, der eine gegebene Strecke EF harmonisch teilt, insbesondere den von gegebenen Axenrichtungen.

15) Der Ort des Pols einer Geraden in Bezug auf die durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte der Diagonalen und der Gegenseitenpaare des Vierecks geht. (§ 272, 1.)

Denn wenn man in Bezug auf zwei Punkte P und Q die Polarenbüschel bildet, so entsprechen die Strahlen derselben einer einem, d. h. projectivisch; also ist der Ort der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen ein Kegelschnitt. Diese Schnittpunkte sind aber die Pole der Geraden PQ in Bezug auf die Kegelschnitte des Systems oder die Scheitel der Polarenbüschel für den in der Geraden PQ fortbewegten Pol. (Vgl. 12.)

16) Das Büschel der Polaren des Punktes P in Bezug auf vier demselben Viereck umgeschriebene Kegelschnitte hat ein von der Lage von P unabhängiges Doppelverhältnis (§ 269). Die Reihen der Berührungspunkte, welche in den gemeinsamen Tangenten von vier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten durch diese gebildet werden, haben dasselbe Doppelverhältnis.

Man kann in Folge dieser Eigenschaften von dem *Doppelverhältnis von vier Kegelschnitten eines Büschels oder einer Schaar* sprechen.

17) Der Satz § 284 spricht aus, dafs die Kegelschnitte eines Büschels von einem Kegelschnitt K durch zwei ihrer gemeinsamen Punkte A, B in einer Involution geschnitten werden, für welche die Verbindungslinien ihrer Paare (§ 299, 2) durch einen Punkt P der Sehne CD gehen, welche die beiden andern gemeinsamen Punkte des Büschels verbindet. (Vgl. § 284, B.) Die von diesem Punkte P an den Kegelschnitt gehenden Tangenten liefern durch ihre Berührungspunkte die Doppelpunkte der Involution und damit *die zwei Kegelschnitte des Büschels, welche den Kegelschnitt K berühren.*[86])

Wenn einer der Doppelpunkte mit A oder B zusammenfällt, so findet zwischen dem zugehörigen Kegelschnitt des Büschels und K in diesem Punkte Osculation statt, und man erhält die *Construction des Problems, durch zwei gegebene Punkte C, D einen Kegelschnitt zu legen, welcher den gegebenen Kegelschnitt K in dem Punkte B osculirt.*

Lassen wir auch D in B fallen, so entsteht die *Construction für den Kegelschnitt durch C, der in B mit K eine Berührung dritter Ordnung hat*: Man schneidet K mit CB in X und zieht XP, welches ihn in X' schneidet, nach einem Punkte P der Tangente von K in B; dann ist BX', CP ein Punkt des gesuchten Kegelschnittes.

18) Man soll durch einen gegebenen Punkt O eine Gerade ziehen, die einen festen Kegelschnitt S in Punkten P, Q schneidet, welche mit einem festen Punkte N desselben und drei festen Punkten A, B, C aufser ihm auf einem Kegelschnitt liegen. Durch die Punkte $ABCN$ geht ein Büschel von Kegelschnitten, von denen jeder den Kegelschnitt S in drei Punkten P, Q, R ferner schneidet; da jeder Punkt P von S nur einen Kegelschnitt dieses Büschels und somit nur ein Dreieck P, Q, R bestimmt, so umhüllen die Seiten dieses Dreiecks einen Kegelschnitt U, und die von O an diesen gehenden Tangenten lösen die Aufgabe. Die drei Paare von Geraden BC, AN; CA, BN; AB, CN. welche zu den Kegelschnitten des Büschels gehören, liefern in BC, CA, AB Tangenten des Kegelschnittes U. Man hat also den Satz: *Jeder einem Dreieck umgeschriebene und einen festen Punkt eines Kegelschnittes enthaltende Kegelschnitt schneidet diesen in drei andern Punkten, deren Verbindungslinien Tangenten eines dem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes sind.*

Sechszehntes Kapitel.

Specielle homogene Gleichungsformen zweiten Grades.

---

302. **Sich selbst duale Gleichungsformen.** Die für die Theorie der Kegelschnitte fundamentale Einführung der projectivischen Büschel und Reihen knüpfte sich an die dualen Gleichungsformen $L_1 L_2' - L_1' L_2 = 0$, $A_1 A_2' - A_1' A_2 = 0$, entwickelte sich aber weiter durch die blofse Anwendung des Begriffes des Doppelverhältnisses.

Die beste analytische Ausdrucksform wird erst erreicht, indem wir *die linearen Functionen selbst als trimetrische oder als projectivische Coordinaten* einführen. Dies weist auf solche Gleichungsformen hin, die nur drei lineare Symbole enthalten. Die einfachsten sind $L_1 L_3 - L_2^2 = 0$, bez. $A_1 A_3 - A_2^2 = 0$, wo $L_1 = 0$, $L_3 = 0$ zwei Tangenten und $L_2 = 0$ die Polare ihres Schnittpunktes, bez. $A_1 = 0$, $A_3 = 0$ zwei Punkte und $A_2 = 0$ den Pol ihrer Verbindungsgeraden (§ 282) darstellen.

Als erzeugende projectivische Büschel bez. Reihen bieten sich unmittelbar $kL_1 - L_2 = 0$, $L_3 - kL_2 = 0$ bez. $\varkappa A_1 - A_2 = 0$, $A_3 - \varkappa A_2 = 0$, so dafs als homologe Elemente erscheinen L_1, L_2; L_2, L_3 bez. A_1, A_2; A_2, A_3, während L_2 bez. A_2 die gemeinsamen Elemente sind.

Nehmen wir nun $A_2 = 0$ als den Pol von $L_2 = 0$, so ist das Dreiseit $L_1 L_2 L_3 = 0$ und das Dreieck $A_1 A_2 A_3 = 0$ identisch. *Diese Gleichungen sind sich also selbst dual,* d. h. gehören in ganz derselben Weise der Untersuchung der Kegelschnitte als Ordnungs- oder Classencurven an.

Dieselbe Eigenschaft werden wir der Gleichungsform

$l_1 L_1^2 + l_2 L_2^2 + l_3 L_3^2 = 0$ (§ 277) zuerkennen (§ 312). Die übrigen symbolischen Gleichungen entsprechen einander zwar dual, aber sind *nicht* im obigen Sinne sich selbst dual, denn das Viereck und das Vierseit in den zuerst erwähnten Gleichungsformen können für denselben Kegelschnitt nicht identisch sein.

Wir bedienen uns zu den weiteren Untersuchungen homogener Coordinaten. Zunächst nehmen wir für Punktcoordinaten das Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$ als das von den beiden Tangenten $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und ihrer Berührungssehne $x_2 = 0$ gebildete Dreieck; für Liniencoordinaten das Dreieck der beiden Berührungspunkte $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = 0$ der Curve und des Schnittpunktes $\xi_2 = 0$ ihrer Tangenten. Dann ist die Gleichung eines Kegelschnittes in projectivischen Punkt- bez. Liniencoordinaten

$$x_1 x_3 = x_2^2, \quad \xi_1 \xi_3 = \xi_2^2,$$

falls der Punkt bez. die Gerade von den Coordinaten Eins demselben angehören, oder falls eine Constante implicite gedacht wird.

Ebenso ist die Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf ein Polardreieck als Fundamentaldreieck, in Punkt- bez. Liniencoordinaten

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0 \text{ bez. } A_{11} \xi_1^2 + A_{22} \xi_2^2 + A_{33} \xi_3^2 = 0.$$

Im allgemeinen beschränken wir uns auf die Behandlung der Gleichungen in Punktcoordinaten, da das Dualitätsprincip die Wiederholung einer solchen in Liniencoordinaten überflüssig macht.

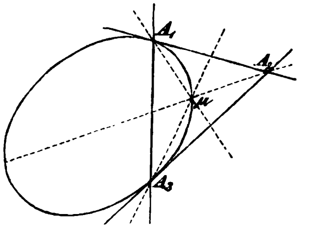
303. **Parameterdarstellung.** Für $x_1 x_3 = x_2^2$ als Gleichung des Kegelschnittes folgt aus der Relation $\mu x_1 = x_2$ durch Einsetzen in die Gleichung der Curve gleichmäſsig $x_3 = \mu x_2$ und $x_3 = \mu^2 x_1$. Also schneidet die vom Punkte $x_1 = x_2 = 0$ ausgehende Gerade $\mu x_1 = x_2$ den Kegelschnitt in einem zweiten Punkte, dessen Verbindungsgeraden mit den beiden andern Fundamentalpunkten durch die Gleichungen $\mu x_2 = x_3$ und $x_3 = \mu^2 x_1$ dargestellt sind. *Die Coordinaten*

eines Curvenpunktes sind also Potenzen eines Parameters proportional

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \mu : \mu^2.^{*)}$$

Wir können demzufolge denselben als den Punkt μ bezeichnen, und die Anwendung unseres Coordinatensystems bietet alle die Vorteile der Rechnung mit einer *einzigen* Veränderlichen dar.

Die Verbindungsgerade von zwei Punkten μ, μ' der Curve ist durch $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu') x_2 + x_3 = 0$ dargestellt (§ 87), da sie durch jede der Voraussetzungen $\mu x_1 = x_2$, $\mu x_2 = x_3$; $\mu' x_1 = x_2$, $\mu' x_2 = x_3$ erfüllt wird. Dem Zusammenfallen der Punkte μ und μ' entspricht die *Gleichung der Tangente im Punkte* μ, nämlich



$$\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0.$$

Also sind die Coordinaten ξ_i der Tangente durch denselben Parameter ähnlich ausgedrückt wie die x_i, nämlich

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \mu^2 : -2\mu : 1.$$

Hieraus erkennt man, dafs die Tangenten durch die Relation verbunden sind $4\xi_1\xi_3 = \xi_2^2$, d. h. dafs dies die Tangentialgleichung des Kegelschnittes $x_1 x_3 = x_2^2$ ist. In der Tat ist sie also von derselben Form, aber nicht etwa $\xi_1\xi_3 = \xi_2^2$ selbst.

B. 1) Durch welche Specialisirungen geht die in § 173 gegebene Parametermethode aus der jetzigen hervor?

2) Die Gerade $\mu\mu'$ trifft $A_1 A_3$ in dem durch $\mu\mu' x_1 + x_3 = 0$ ausgedrückten Punkte; nach ihm gehen auch die Geraden, welche die Schnittpunkte $A_1\mu$, A_2A_3; $A_1\mu'$, A_2A_3 mit den Schnittpunkten $A_3\mu'$, A_1A_2; $A_3\mu$, A_1A_2 bez. verbinden. So auch für zusammenfallende μ, μ'.

3) Die Gleichung der Parabel, welche die Seiten A_1A_2, A_3A_2 in den Punkten A_1, A_3 bez. berührt, wird in Dreiliniencoordinaten aus $kx_1 x_3 = x_2^2$ durch die Bedingung der Berührung mit der unendlich fernen Geraden $\Sigma l_i x_i = 0$ bestimmt, also durch $4l_1 l_3 = k l_2^2$; die Gleichung ist $l_2^2 x_2^2 = 4 l_1 l_3 x_1 x_3$.

---

*) Durch die Einsetzung der Potenzen in $x_1 x_3 = x_2^2$ wird die Gleichung identisch erfüllt.

4) Wenn die Tangente μ den Kegelschnitt umhüllt, so wird ein denselben in A_1, A_3 doppelt berührender Kegelschnitt durch den Punkt erzeugt, in welchem die Verbindungslinien der Ecken des umgeschriebenen Dreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten sich schneiden. Ebenso durch die Harmonicale (§ 64, 1) desselben in Bezug auf das Dreieck.

5) Der Pol x_i' der Sehne der Punkte μ, μ' der Curve wird zufolge der Bedingungsgleichungen

$$\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0, \quad \mu'^2 x_1' - 2\mu' x_2' + x_3' = 0$$

bestimmt als

$$\frac{x_1'}{2(\mu - \mu')} = \frac{x_2'}{\mu^2 - \mu'^2} = \frac{x_3'}{2\mu\mu'(\mu - \mu')} \text{ oder } \frac{x_1'}{2} = \frac{x_2'}{\mu + \mu'} = \frac{x_3'}{2\mu\mu'}.$$

6) Man übertrage die vorigen Entwickelungen auf die Gleichung in Cartesischen Coordinaten $y^2 = (2a_{13} + a_{11}x)x$, welche mit $y = \mu x$ liefert

$$x = \frac{2a_{13}}{\mu^2 - a_{11}}, \quad y = \frac{2a_{13}\mu}{\mu^2 - a_{11}}.$$

Man discutire die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einem Kreise und leite die Sätze des § 236 wieder ab. Ebenso die Relationen zwischen den Parametern der Fufspunkte der Normalen, welche von einem gegebenen Punkte an die Curve gehen.

304. **Enveloppen.** *Umgekehrt berührt eine Gerade, deren Gleichung einen Parameter μ im zweiten Grade enthält, einen Kegelschnitt.* In der Tat kann man die in x_1, x_2, x_3 lineare Gleichung nach μ ordnen und die Coefficienten so bezeichnen, dafs die Form entsteht $\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0$. Diese stellt aber nach dem Vorigen stets eine Tangente des Kegelschnittes $x_1' x_3' = x_2'^2$ dar.

Allgemein repräsentirt die Gleichung einer Geraden, falls sie einen Parameter algebraisch enthält und wir dieser unbestimmten Gröfse alle möglichen Werte geben, eine einfach unendliche Reihe von verschiedenen Geraden, die alle eine gewisse algebraische Curve berühren, welche man als *die Enveloppe des Liniensystems* bezeichnet. Die Gleichung dieser Enveloppe ist bereits für einzelne einfache Fälle ermittelt worden. Die nähere Untersuchung des Problems ist aber von Wichtigkeit, weil sie das *Mittel zum Uebergang von der Darstellung der Curven in Punktcoordinaten zur Darstellung derselben Curven in Liniencoordinaten liefert.*

Wir erläutern die allgemeine Methode zur Bestimmung der Gleichung einer solchen Enveloppe dadurch, dafs wir den Satz dieses Paragraphen unabhängig von § 303 beweisen. Der Schnittpunkt der den Werten μ und $\mu + k$ entsprechenden Geraden ist durch die Gleichungen bestimmt

$$\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0, \quad 2(\mu x_1 - x_2) + k x_1 = 0.$$

Von diesen geht die zweite aus der ersten hervor, indem man $\mu + k$ für μ setzt, dann die infolge der ersten verschwindenden Glieder beseitigt und den Rest durch k dividirt. Je kleiner k ist, desto mehr nähert sich die zweite Linie dem Zusammenfallen mit der ersten, und für den Grenzübergang $k = 0$ finden wir, dafs der Schnittpunkt der ersten Geraden mit einer unendlich nahe benachbarten, d. h. mit der nächstfolgenden Linie des Systems durch die Gleichungen bestimmt ist

$$\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0, \quad \mu x_1 - x_2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen

$$\mu x_1 - x_2 = 0, \quad \mu x_2 - x_3 = 0.$$

Da nun jeder Punkt der Curve als der Schnittpunkt von zwei auf einander folgenden Tangenten derselben angesehen werden darf (§ 76), so ist der Punkt, den eine Linie des Systems mit der Enveloppe gemein hat, eben der, in dem sie auch die nächstfolgende Tangente der Enveloppe schneidet. Die beiden letzten Gleichungen bestimmen also den Punkt der Enveloppe, welcher zur Tangente die Gerade $\mu x_1^2 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ hat; die Elimination von μ zwischen diesen Gleichungen gibt die Gleichung des Ortes aller Punkte der Enveloppe in der Form $x_1 x_3 = x_2^2$.

Analoge Gründe beweisen, dafs für $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ als Gleichungen von Curven die durch

$$\mu^2 X_1 - 2\mu X_2 + X_3 = 0$$

dargestellte Curve stets die Curve $X_1 X_3 = X_2^2$ tangirt.

Zu denselben Ergebnissen führt auch folgendes Verfahren: *Die Gerade $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ ist Tangente einer Curve zweiter Classe* (§§ 110, 156), *da durch jeden Punkt x_i nur zwei Linien des Systems hindurchgehen*, nämlich die, welche

den aus $\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0$ bestimmten Werten von μ entsprechen. Diese beiden Werte von μ fallen aber zusammen, oder der betrachtete Punkt ist der Schnittpunkt von zwei auf einander folgenden Tangenten, wenn seine Coordinaten der Gleichung $x_1 x_3 = x_2^2$ genügen.

Und allgemein wird die Gleichung einer Curve n^{ter} Classe gefunden, indem man die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Parametergleichung der Tangente, welche in μ vom n^{ten} Grade ist, ein Paar gleiche Wurzeln hat.

B. 1) Die Eckpunkte eines Dreiecks bewegen sich in drei festen Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und zwei seiner Seiten gehen durch die beiden festen Punkte x_i', x_i''; man soll die Enveloppe der dritten Seite bestimmen.

Wenn $x_1 + \mu x_2 = 0$ die Gerade ist, welche den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ mit dem längs der Geraden $x_3 = 0$ sich bewegenden Eckpunkt des Dreiecks verbindet, so sind die Gleichungen der durch die festen Punkte gehenden Seiten bez.

$$x_3'(x_1 + \mu x_2) = (x_1' + \mu x_2')x_3, \quad x_3''(x_1 + \mu x_2) = (x_1'' + \mu x_2'')x_3.$$

Die Gleichung der Basis ist

$$(x_1' + \mu x_2')x_3'' x_1 + (x_1'' + \mu x_2'')\mu x_3' x_2 - (x_1' + \mu x_2')(x_1'' + \mu x_2'')x_3 = 0;$$

denn die dieser Gleichung entsprechende Gerade geht sowol durch den Schnittpunkt der ersten Geraden mit $x_1 = 0$, als auch durch den der zweiten mit $x_2 = 0$. Indem man nach Potenzen von μ ordnet, findet man als Gleichung der Enveloppe

$$(x_1 x_2' x_3'' + x_2 x_3' x_1'' - x_3 x_1' x_2'' - x_3 x_1'' x_2')^2$$
$$= 4 x_1' x_2'' (x_1 x_3'' - x_1'' x_3)(x_2 x_3' - x_2' x_3).$$

Man kann dieselbe Aufgabe auch auf Grund der nach Potenzen von a geordneten Gleichung von § 49, 3) auflösen.

2) Der Form der Kegelschnittsgleichung $\xi_1 \xi_3 = k^2 \xi_2^2$ entspricht $\mu^2 \xi_1 - 2\mu k \xi_2 + \xi_3 = 0$ als Gleichung des Berührungspunktes der Tangente μ, welche die Punkte $\mu \xi_1 = k \xi_2$, $\mu k \xi_2 = \xi_3$ mit einander verbindet. In andern Worten: Wenn in irgend einem System der Coordinaten x_i', x_i'' die Coordinaten von zwei Punkten eines Kegelschnittes und x_i''' die Coordinaten des Pols ihrer Sehne sind, so können die Coordinaten eines beliebigen Punktes desselben in der Form

$$\mu^2 x_1' + 2\mu k x_1''' + x_1'', \quad \mu^2 x_2' + 2\mu k x_2''' + x_2'', \quad \mu^2 x_3' + 2\mu k x_3''' + x_3''$$

geschrieben werden, indes die Tangente desselben die beiden Tan-

genten nach den Verhältnissen $\mu : k$, $\mu k : 1$ teilt. Für $k = 1$ ist die Curve eine Parabel.

3) Man soll den Ort eines Punktes (die Enveloppe einer Geraden) bestimmen, welcher (welche) den zwischen zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts gelegenen Abschnitt einer veränderlichen Tangente desselben (den von zwei festen Punkten eines Kegelschnittes an einem veränderlichen Punkte desselben bestimmten Winkel) nach gegebenen Verhältnis (Sinusverhältnis) $m : n$ teilt.

Für $\xi_1 \xi_3 = k \xi_2^2$ als Gleichung des gegebenen Kegelschnittes ist die Gleichung des Teilpunktes

$$\mu^2 \{ m\xi_2 + n\xi_1 \} k + \mu \{ n\xi_1 + m\xi_3 + (m+n) k^2 \xi_2 \} + (n\xi_2 + m\xi_3) k = 0;$$

sein Ort ist also dargestellt durch

$$4k^2 (n\xi_1 + m\xi_2)(n\xi_2 + m\xi_3) = \{ n\xi_1 + m\xi_3 + (m+n) k^2 \xi_2 \}^2.$$

305. Um *die Gleichung der Polare eines Punktes* x_i' bezüglich der Curve zu bestimmen, denken wir die Coordinaten des Punktes als der Gleichung der durch ihn gehenden Tangente genügend; nehmen also an

$$\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0.$$

Nun ist im Berührungspunkte $\mu^2 = x_3 : x_1$, $\mu = x_2 : x_1$, daher befriedigen die Coordinaten des Berührungspunktes die Relation

$$x_3' x_1 - 2x_2' x_2 + x_1' x_3 = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Polare. Wäre der Punkt als Schnittpunkt der Geraden $ax_1 = x_2$, $bx_2 = x_3$ gegeben, so wäre die Gleichung seiner Polare $abx_1 - 2ax_2 + x_3 = 0$.

Liegt der Pol in der Polare, so genügen die x_i' der Gleichung derselben, und man erhält als Bedingung der Lage in der Curve die Gleichung $x_1' x_3' = x_2'^2$ wieder.

B. 1) Wenn man den vorher implicite gedachten Coefficienten in die betrachtete Kegelschnittsgleichung explicite einführt, so ist sie $x_1 x_3 = k^2 x_2^2$. Die Schnittpunkte der Geraden $x_1 = \lambda^2 x_3$ mit dem Kegelschnitt sind $k^2 x_2^2 = \lambda^2 x_3^2$, oder $kx_2 = \pm \lambda x_3$; man erkennt darin die harmonische Teilung der durch den Pol gehenden Sehne in der Polare wieder. Dem Punkte λ entspricht jetzt die Gruppe von Formeln

$$\lambda x_1 = kx_2, \quad x_3 = \lambda k x_2, \quad \text{oder} \quad x_1 : x_2 : x_3 = k : \lambda : \lambda^2 k.$$

Die Gleichung der Sehne zwischen den Punkten λ, λ' wird

$$\lambda\lambda' x_1 - (\lambda + \lambda') k x_2 + x_3 = 0,$$

daher die der Tangente in λ ebenso $\lambda^2 x_1 - 2\lambda k x_2 + x_3 = 0$. Die Coordinaten des Pols der Sehne λ, λ' sind bestimmt durch

$$\frac{x_1'}{2} = \frac{k x_2'}{\lambda + \lambda'} = \frac{x_3'}{2\lambda\lambda'}.$$

Läfst man jene Sehne mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, so erhält man für die trimetrischen Coordinaten des Centrums $x_1' : x_2' : x_3' = 2k^2 l_3 : -l_2 : 2k^2 l_1$.

2) Wenn drei Kegelschnitte von den bez. Seitenpaaren eines Dreiecks in den Endpunkten der jedesmaligen dritten Seite berührt werden und durch einen Punkt gehen, so schneiden die Tangenten derselben in diesem Punkte die Dreiecksseiten, die ihnen bez. als Berührungssehnen entsprechen, in drei Punkten einer Geraden.

306. Die Sehne, welche zwei Punkte $\mu \tan\varphi$ und $\mu : \tan\varphi$ verbindet, wo φ einen beliebigen constanten Winkel bezeichnet, berührt stets einen Kegelschnitt, der mit dem Kegelschnitt $x_1 x_3 = x_2^2$ eine doppelte Berührung hat.

Denn die Gleichung der Sehne ist (§ 305)

$$\mu^2 x_1 - \mu x_2 (\tan\varphi + \cot\varphi) + x_3 = 0,$$

und diese ist wegen $\tan\varphi + \cot\varphi = 2 : \sin 2\varphi$ die Gleichung einer Tangente des Kegelschnittes $x_1 x_3 \sin^2 2\varphi = x_2^2$ im Punkte μ desselben.

Man erkennt in der nämlichen Art, dafs der Ort des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten $\mu \tan\varphi$, $\mu : \tan\varphi$ der Kegelschnitt $x_1 x_3 = x_2^2 \sin^2 2\varphi$ ist.

B. 1) Die Basis eines Dreiecks berührt einen gegebenen Kegelschnitt, während ihre Endpunkte sich in zwei festen Tangenten desselben bewegen, und die beiden anderen Seiten durch feste Punkte P', P'' gehen: der Ort der Spitze ist ein Kegelschnitt durch P', P'' (§ 298, 4).

Sind $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ die festen Tangenten und ist $x_1 x_3 = x_2^2$ der Kegelschnitt, so sind die Coordinaten des Schnittpunktes von $x_1 = 0$ mit der Tangente $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ $0 \mid 1 \mid 2\mu$ und die Gleichung der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem festen Punkte x_i' ist $x_1 x_3' - x_1' x_3 = 2\mu (x_1 x_2' - x_1' x_2)$. Ebenso ist die Gleichung der Verbindungslinie des festen Punktes x_i'' mit dem Punkte $2 \mid \mu \mid 0$, in welchem $x_3 = 0$ die Tangente μ

schneidet, $2(x_2x_3'' - x_2''x_3) = \mu(x_1x_3'' - x_1''x_3)$. Die Elimination von μ zwischen beiden Gleichungen gibt als den Ausdruck für den Ort des Scheitels

$$(x_1x_3' - x_1'x_3)(x_1x_3'' - x_1''x_3) = 4(x_1x_2' - x_1'x_2)(x_2x_3'' - x_2''x_3).$$

2) Wenn in 1) die Basisecken in irgend einem Kegelschnitt liegen, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat und die gegebenen Punkte enthält, so ist immer noch der Ort der Spitze ein Kegelschnitt.

Sind $x_1x_3 - x_2^2 = 0$, $x_1x_3\sin^2 2\varphi - x_2^2 = 0$ die Gleichungen der Kegelschnitte, so schneidet eine Tangente μ des zweiten den ersten in Punkten $\mu\tan\varphi$ und $\mu\cot\varphi$; wenn die festen Punkte μ', μ'' sind, so sind die Gleichungen der Seiten

$$\mu\mu'\tan\varphi\, x_1 - (\mu' + \mu\tan\varphi)\, x_2 + x_3 = 0,$$
$$\mu\mu''\cot\varphi\, x_1 - (\mu'' + \mu\cot\varphi)\, x_2 + x_3 = 0,$$

und die Elimination von μ liefert die Gleichung des Ortes

$$(x_3 - \mu'x_2)(\mu''x_1 - x_2) = \tan^2\varphi\,(x_3 - \mu''x_2)(\mu'x_1 - x_2).$$

307. Für die Anwendungen ist es nützlich, zu bemerken, dafs die Elimination von x_2 zwischen den Gleichungen von zwei Tangenten μ, μ' für die Gleichung der Verbindungslinie des Schnittpunktes dieser Tangenten mit dem Eckpunkt A_2 des Fundamentaldreiecks A_2 $\mu\mu'x_1 = x_3$ liefert. Wenn also das Product a zweier Werte von μ gegeben ist, so liegt der Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten in der festen Geraden $ax_1 = x_3$. Substituirt man in demselben Falle a für $\mu\mu'$ in die Gleichung der Sehne zwischen zwei Punkten, so erkennt man, dafs diese Sehne durch den festen Punkt $ax_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ hindurchgeht. *Ferner liegen die Punkte* $+\mu$ *und* $-\mu$ *in einer durch* A_2 *gehenden Geraden*, da die Gleichung der Geraden, welche den Punkt μ mit A_2 verbindet, $\mu^2x_1 = x_3$ ist.

B. 1) Ein Dreieck bleibt einem festen Kegelschnitt umgeschrieben, und zwei seiner Ecken bewegen sich in festen Geraden; der Ort der dritten Ecke ist ein Kegelschnitt, der jenen in der Polare des Schnittpunktes der festen Geraden doppelt berührt.

Wir denken die beiden Tangenten des Kegelschnittes aus dem Schnittpunkt der festen Geraden und ihre Berührungssehne als Fundamentallinien, und setzen die Gleichungen der festen Geraden in der Form $ax_1 - x_3 = 0$, $bx_1 - x_3 = 0$ voraus, die Gleichung des Kegelschnittes aber als $x_1x_3 = x_2^2$. Für zwei sich

in $ax_1 - x_3 = 0$ schneidende Tangenten des letzteren ist das Product der μ gleich a; wenn also die eine der Dreiecksseiten im Punkte μ berührt, so berühren die beiden anderen in den Punkten $a : \mu$ und $b : \mu$, und es sind $a^2 x_1 - 2a\mu x_2 + x_3 = 0$, $b^2 x_1 - 2b\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$ ihre Gleichungen. Die Elimination von μ zwischen diesen Gleichungen gibt für den Ort des Scheitels die Gleichung

$$(a + b)^2 x_1 x_3 = 4ab x_2^2.$$

Das Resultat bleibt auch noch giltig, wenn der Schnittpunkt innerhalb des Kegelschnittes liegt (vgl. § 312).

2) Die Enveloppe der Grundlinie eines Dreiecks, welches einem festen Kegelschnitt eingeschrieben ist, und dessen beide Scheitelseiten durch zwei feste Punkte gehen, ist ein Kegelschnitt, der jenen in der Verbindungslinie der festen Punkte doppelt berührt.

Wir setzen die Verbindungslinie der festen Punkte als $x_2 = 0$, die Gleichung des festen Kegelschnittes als $x_1 x_3 = x_2^2$, die Gleichungen der Geraden, welche die festen Punkte mit dem Punkt $x_1 = x_3 = 0$ verbinden, als $ax_1 + x_3 = 0$, $bx_1 + x_3 = 0$ voraus. Nun entsprechen den Endpunkten einer durch $ax_1 + x_3 = 0$, $x_3 = 0$ gehenden Sehne Werte von μ, deren Product gleich a ist; wenn also μ dem Scheitel entspricht, so müssen die Basisecken durch $a : \mu$ und $b : \mu$ dargestellt sein, und die Gleichung der Basis ist $abx_1 - (a + b)\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$. Dieselbe berührt daher (§ 304) stets den Kegelschnitt $4abx_1 x_3 = (a + b)^2 x_2^2$.

308. *Das Doppelverhältnis von vier Tangenten eines Kegelschnittes ist dem Doppelverhältnis ihrer Berührungspunkte gleich*, nämlich

$$(\mu \cdot \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) = \{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4\} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}.$$

Zunächst ist dies der Ausdruck des Doppelverhältnisses der vier Strahlen, welche die gegebenen Punkte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ mit einem beliebigen fünften μ verbinden. Denn die Gleichungen derselben (§ 303) können geschrieben werden $\mu_i(\mu x_1 - x_2) + (x_3 - \mu x_2) = 0$ etc., wo die μ_i den Teilverhältnissen proportional sind (§ 82).

Ferner stimmt das Doppelverhältnis der Punktreihe, welche in der Tangente μ von den Tangenten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ausgeschnitten sind, überein mit dem Doppelverhältnis des

zu ihr perspectivischen Strahlenbüschels aus A_2. Die Gleichungen dieser Strahlen sind aber (§ 307)

$$\mu_1 \mu x_1 = x_3, \quad \mu_2 \mu x_1 = x_3, \quad \mu_3 \mu x_1 = x_3, \quad \mu_4 \mu x_1 = x_3;$$

also ist das Büschel zu dem über den Berührungspunkten aus dem Punkte μ beschriebenen Büschel projectivisch oder doppelverhältnisgleich (§ 83).

Der obige Parameterausdruck des Doppelverhältnisses hat nun nach § 92 die Eigenschaft, dann und nur dann unveränderten Wert zu behalten, wenn man jeden Parameter μ durch eine lineare gebrochene Function je eines neuen Parameters μ' ersetzt. Demnach gehören die Parameterwerte

$$\mu' \text{ und } \mu = -\frac{a\mu' + d}{a\mu' + b} \qquad (\mu' = -\infty \cdots\cdots + \infty)$$

zu homologen Elementen in projectivischen Punkt- oder Tangentensystemen an dem gegebenen Kegelschnitt (§ 300). *In dieser Parameterdarstellung definirt also die allgemeine bilineare Gleichung* $a\mu\mu' + b\mu + c\mu' + d = 0$ *die Projectivität, die symmetrische Gleichung* $a\mu\mu' + b(\mu + \mu') + d = 0$ *die Involution auch in Punktreihen zweiter Ordnung und Strahlenbüscheln zweiter Classe.* Offenbar gilt das erste selbst dann, wenn die homologen Parameter in verschiedenen Kegelschnitten interpretirt werden.

B. 1) Wenn vier Strahlen durch einen Punkt A_2 gezogen werden, so ist das Doppelverhältnis von vieren ihrer Schnittpunkte μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 dem Doppelverhältnis der übrigen gleich.

Denn deren Parameter sind dann $-\mu_1$, $-\mu_2$, $-\mu_3$, $-\mu_4$.

2) Die Seiten eines Dreiecks drehen sich um feste Punkte A, B, C, und die Endpunkte a, b der um C sich drehenden Seite rücken auf einem die Punkte A und B enthaltenden Kegelschnitt; der Ort der freien Ecke V ist ein Kegelschnitt durch A und B.

Denn für vier Lagen des beweglichen Dreiecks ist nach 1)

$$(a\,a'\,a''\,a''') = (b\,b'\,b''\,b'''), \text{ oder } (A \cdot a\,a'\,a''\,a''') = (B \cdot b\,b'\,b''\,b'''),$$

daher auch

$$(A \cdot V\,V'\,V''\,V''') = (B \cdot V\,V'\,V''\,V''').$$

3) *Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung mit einander haben, so ist das Doppelverhältnis von vier Punkten, in welchen vier Tangenten des einen den andern schneiden, dem*

Doppelverhältnis ihrer vier andern Schnittpunkte und dem der vier Berührungspunkte gleich.[87])

Denn der Ausdruck für das Doppelverhältnis bleibt ungeändert, wenn man jedes μ entweder mit $\tan\varphi$ oder mit $\cot\varphi$ multiplicirt (§ 306).

309. *Das Erzeugnis projectivischer Punkt- oder Tangentensysteme eines Kegelschnittes ist ein doppelt berührender Kegelschnitt.* Man kann den Satz auch so aussprechen: Wenn drei Punktepaare (Tangentenpaare) A, A'; B, B'; C, C' eines Kegelschnittes gegeben sind, so umhüllt die Verbindungsgerade (durchläuft der Schnittpunkt) DD', wenn gemacht wird $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$, einen Kegelschnitt, der den gegebenen in den Doppelelementen berührt*).

Aus der bilinearen Relation $a\mu\mu' + b\mu + c\mu' + d = 0$, deren Coefficienten von den Parametern der gegebenen Elemente abhängen, und der Gleichung $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu')x_2 + x_3 = 0$ der Sehne eliminirt man μ' und erhält, geordnet,

$$\mu^2(bx_1 + ax_2) + \mu\,\{dx_1 + (c-b)\,x_2 - ax_3\} - (dx_2 + cx_3) = 0.$$

Diese Gerade berührt aber (§ 303) den Kegelschnitt

$$4\,(bc - ad)\,(x_1x_3 - x_2^2) + \{dx_1 + (b+c)\,x_2 + ax_3\}^2 = 0.$$

Derselbe hat seiner Gleichungsform zufolge (§ 275) mit $x_1x_3 - x_2^2 = 0$ eine doppelte Berührung in der Sehne $dx_1 + (b+c)\,x_2 + ax_3 = 0$, welche in der Tat die durch $a\mu^2 + (b+c)\,\mu + d = 0$ (§ 95) definirten Doppelpunkte der projectivischen Reihen ausschneidet.

Diese Gerade liefert aber auch das Mittel zur Construction homologer Punkte der projectivischen Reihen, nach dem Satze: *Die Schnittpunkte der kreuzweisen Verbindungsgeraden AB', $A'B$ zweier Paare homologer Punkte liegen in der Verbindungsgeraden p der Doppelpunkte D_1D_2; und ebenso: Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte ab', $a'b$ zweier Paare homologer Tangenten gehen durch den Schnittpunkt P der Doppelstrahlen*

*) Umgekehrt bilden die beiden Tangenten, die von Punkten eines ersten Kegelschnittes an einen zweiten gelegt werden, an diesem projectivische Büschel zweiter Ordnung nur dann, wenn die Kegelschnitte sich doppelt berühren.

d_1, d_2. Denn die Gleichungen der Sehnen μ_1, μ_2' und μ_2, μ_1' ergeben eine von μ_1 und μ_2 unabhängige Differenz. Daher ist p einfach die Pascal'sche Linie bez. P der Brianchon'sche Punkt der aus irgend drei homologen Elementenpaaren in der Reihenfolge $AB'CA'BC'$ gebildeten Sechsecks bez. Sechsseits. In der Figur des § 293 können als homologe Tripel genommen werden ACE und DFB und K ist ein Doppelpunkt, d. h. $\{KACE\} = \{KDFB\}$, weil auch ist

$$(KPNL) = (D \cdot KACE) = (A \cdot KDFB).$$

Im Falle der Involution dagegen bilden die Verbindungsgeraden homologer Punkte ein Strahlbüschel, die Schnittpunkte homologer Tangenten eine Punktreihe (§ 300). Denn bei $b = c$ wird die bilineare Gleichung zu einer linearen Relation zwischen $\mu\mu'$ und $\mu + \mu'$, den Coefficienten der Gleichung der Sehne $\mu\mu'$ (§ 49). Man erkennt den Punkt $0|0|1$ als den Scheitel des Büschels, dessen Strahlen nun die Involution $\mu + \mu' = 0$ ausschneiden ($a = d = 0$). *Also gibt es auf dem Kegelschnitt keine anderen Involutionen, als centrische Collineationen des Kegelschnittes mit sich selbst.* Alsdann ist evident, dafs die Sehnen μ_1, μ_2 und $-\mu_1$, $-\mu_2$ sich auf der Berührungssehne $x_2 = 0$ als Collineationsaxe schneiden.

B. 1) In § 308, 2 kann die Basis des Dreiecks, statt durch einen festen Punkt C zu gehen, als Tangente eines Kegelschnittes vorausgesetzt werden, der mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat.

2) Wenn ein Winkel von constanter Gröfse sich um seinen Scheitel dreht (§ 92), so bestimmt er in einem durch den letzteren gehenden Kegelschnitt eine Sehne, deren Enveloppe ein ihn doppelt berührender Kegelschnitt ist; die imaginären Berührungspunkte sind von der Gröfse des Winkels unabhängig.

3) Sind zwei Kegelschnitte S, S' ähnlich, concentrisch und ähnlich gelegen, so haben die Tangentenpaare aus den Punkten des einen S an den andern die Richtungen der Strahlen von zwei concentrischen projectivischen Büscheln, deren Doppelstrahlen den Asymptoten beider Kegelschnitte parallel sind (§ 276).

4) Wenn ein Polygon, dessen Seiten alle bis auf eine durch feste Punkte gehen, einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so ist die Enveloppe jener Seite ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

Denn denken wir vier beliebige Lagen des Polygons, dessen Ecken der Reihe nach A, B, C, etc. seien, so ist

$$\{AA'A''A'''\} = \{BB'B''B'''\} = \{CC'C''C'''\} = \text{etc.}$$

und das Problem ist damit auf das Problem des Textes zurückgeführt, gibt also auch dasselbe Resultat.

5) Wenn man die entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Systemen auf demselben Kegelschnitt mit zwei beliebigen festen Punkten P, P' des nämlichen Kegelschnittes verbindet, so ist der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen ein durch P, P' gehender Kegelschnitt.

6) Man construire homologe Elemente und die Doppelstrahlen concentrischer Büschel mittelst eines durch den Scheitel gehenden Hilfskreises; ebenso die dualistische Aufgabe.

7) Man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden mit dem durch fünf Punkte A, B, C, D, E gegebenen Kegelschnitt.

Wenn man die Punkte A, B mit den drei Punkten C, D, E verbindet, so erhält man drei Paare entsprechender Strahlen von zwei projectivischen Büscheln. Dieselben bestimmen in der Geraden zwei projectivische Reihen, deren Doppelpunkte die gesuchten Punkte sind. Man construirt sie nach der vorigen Aufgabe.

8) Man construire die von einem gegebenen Punkte ausgehenden Tangenten eines durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnittes.

9) Man bestimme die Asymptotenrichtungen für einen durch fünf Punkte gehenden Kegelschnitt.

310. **Collineare Kegelschnitte** sind mittelst der Parameterdarstellung in voller Allgemeinheit zu behandeln (§ 308). Denn irgend zwei Kegelschnitte K, K' haben gemeinsame Tangenten, deren zwei wir als Fundamentallinien $x_1 = 0, x_3 = 0$ nehmen können, sobald sie reell sind. Die Gleichungsformen sind dann, wenn y_2 eine lineare homogene Function des x_i ist,

$$x_1 x_3 = x_2^2, \quad x_1 x_3 = y_2^2.$$

Die aus ihnen fließenden Ergebnisse werden sich in § 312 auch für den Fall als gültig erweisen, wo $x_1 x_3 = 0$ ein imaginäres Tangentenpaar darstellt.

Nun ist eine einfachste Collineation zweier Kegelschnitte K, K' augenscheinlich durch den Umstand gegeben, daß die Relation $\mu^2 x_1 = x_3$ von der Berührungssehne nicht abhängt. Dies sagt aus, daß die Verbindungsgerade der Punkte $\pm\mu$ des einen Kegelschnittes mit den Punkten $\pm\mu$ des andern durch den Schnittpunkt A_2 der gemeinsamen Tangenten geht.

Wir wollen sagen, in Analogie zu den Sätzen über die ähnliche Lage von Kreisen (§ 135), dafs der Punkt $+\mu$ des einen Kegelschnittes dem Punkte $+\mu$ des andern *direct* und dem Punkte $-\mu$ desselben *invers* (indirect) entspreche. *Die Kegelschnitte sind durch die Parameteridentität direct centrisch-collinear aufeinander bezogen* (durch $\mu' = -\mu$ invers) (§ 99).

In der Tat ist die Collineationsaxe eine der Schnittsehnen $x^2 - y^2 = 0$. Denn die direct entsprechenden Sehnen $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu') x_2 + x_3 = 0$, $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu') y_2 + x_3 = 0$ schneiden sich in der Geraden $x_2 - y_2 = 0$, die inversen in $x_2 + y_2 = 0$. Umgekehrt folgt hieraus auch die Doppelverhältnisgleichheit homologer Elemente $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$, denn, sind auch O, O' homolog, so ist $(O \cdot ABCD) = (abcd) = (O' \cdot A'B'C'D')$.

Durch die centrische Collineation $\mu' = \mu$ können wir also zwei beliebige Kegelschnitte K, K' in einander überführen, somit insbesondere *jeden allgemeinen Kegelschnitt in einen Kreis verwandeln*; um aber die allgemeinste Projectivität der Punkt- oder Tangentensysteme derselben zu erhalten, haben wir nur noch den einen Kegelschnitt K' collinear auf sich selbst zu beziehen, gemäfs § 309. Zu bemerken ist, dafs in dieser allgemeinen Projectivität die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte *nicht* notwendig wiederum einen Kegelschnitt umhüllen.

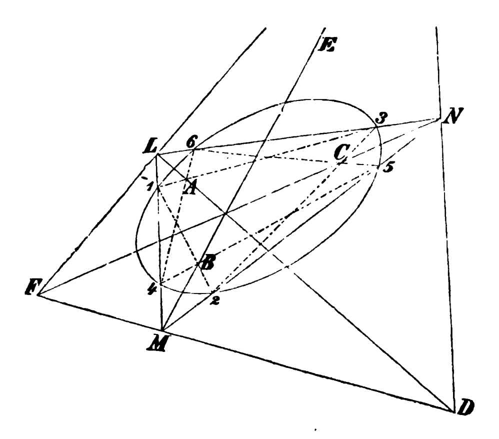
B. 1) Die Basis eines Dreiecks geht durch den Schnittpunkt C von zwei gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte K, K', von ihren Endpunkten A, A' liegt der eine in K, der andere in K', während seine Seiten durch feste Punkte B, B' gehen, von denen einer K, der andere K' angehört. Der Ort des Scheitels ist ein durch die Punkte B, B' gehender Kegelschnitt.

2) In zwei Kegelschnitten werden durch die Tangenten eines dritten, der mit beiden in doppelter Berührung ist, projectivische Punktreihen bestimmt.

311. **Schliefsungsprobleme.** Unter den Anwendungen der vorhergehenden Projectivitätsbetrachtungen haben die sog. Schliefsungsprobleme Interesse, welche verlangen, einem Kegelschnitt geschlossene Polygone ein- oder umzuschreiben, deren Seiten oder Ecken noch weiteren Bedingungen genügen.

Man soll einem Kegelschnitt ein Polygon einschreiben, dessen Seiten in bestimmter Reihenfolge durch feste Punkte der Ebene gehen.[88]) Denken wir einen Punkt A des Kegelschnittes als Ecke des Polygons willkürlich gewählt und bilden einen polygonalen Zug $AA_1A_2\ldots$ so, dafs AA_1 durch P_1, A_1A_2 durch P_2 etc. gehen, so fällt im allgemeinen der zweite Schnittpunkt A' von P_nA_{n-1} nicht mit A zusammen. Führen wir aber diese Construction viermal aus, so ist nach § 308 $\{ABCD\} = \{A_1B_1C_1D_1\} = \cdots \{A'B'C'D'\}$ und das Polygon ist geschlossen, sobald D' auf D fällt. Man erhält also D als einen der Doppelpunkte projectivischer Reihen, die durch homologe Tripel A, B, C; A', B', C' bestimmt sind. *Das Problem hat daher im allgemeinen zwei Lösungen.*

Eine analytische Lösung für den *Fall des eingeschriebenen Dreiecks mit den Drehpunkten* A, B, C liefert folgende Betrachtung. Seien 1 2 3 und 4 5 6 die beiden Lösungen, also BC die Pascal'sche Linie von 1 2 3 4 5 6. Dann ist im Viereck 1 3 4 6 die Diagonale AL die Polare des auf BC gelegenen Punktes 3 4, 6 1, also sind A und L conjugirte Pole, auch geht AL durch den Pol D von BC. Daher sind 1 4, 2 5, 3 6 die Schnittpunkte der Seiten eines Dreiecks LMN, dessen Ecken erhalten werden, indem man zu ABC das polare Dreieck DEF bildet und die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken AD, BE, CF (§§ 118. 320, 1) mit den Gegenseiten des Dreiecks DEF schneidet. Die Gleichung von MN ergibt sich daher folgendermafsen: Sei BC als $x_2 = 0$ gewählt und A, B, C durch



$$cx_1 = x_2,\ dx_2 = x_3;\ -ax_1 = x_3,\ x_2 = 0;\ -bx_1 = x_3,\ x_2 = 0$$

gegeben, so sind ihre Polaren EF, FD, DE (§ 305)

$$cdx_1 - 2cx_2 + x_3 = 0, \quad ax_1 - x_3 = 0, \quad bx_1 - x_3 = 0$$

und die Geraden AD, BE, CF $cdx_1 - x_3 = 0$,

$$2c(a+b)x_2 = (b+cd)(ax_1+x_3),$$
$$2c(a+b)x_2 = (a+cd)(bx_1+x_3),$$

also die Verbindungsgerade von BE, FD und CF, ED

$$c(a+b)x_2 = abx_1 + cdx_3.$$

Diese Gleichung wird identisch Null, die Construction versagt, wenn ABC mit DEF zusammenfällt. *Es gibt also unendlich viele dem Kegelschnitt eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten durch die Ecken eines Polardreiecks gehen.* (Vgl. § 299, 6.)

B. 1) Man leite die Dreiecke des Textes nach § 307, 2) ab.

2) Liegen die Drehpunkte eines Polygons von ungerader Seitenzahl z. B. eines Dreiecks auf einer Geraden g, so ist die projectivische Zuordnung auf dem Kegelschnitt involutorisch.

Denn die Schnittpunkte G, G' von g sind vertauschbar als Endpunkte des ganz in g enthaltenen Polygonalzuges.

3) Liegen die Drehpunkte eines Polygons von gerader Seitenzahl in einer Geraden g, so existiren im allgemeinen keine eigentlichen Polygone; wenn aber *eines* existirt, kann *jeder* Punkt des Kegelschnittes als eine Ecke gewählt werden.

Denn G und G' sind dann die Doppelpunkte, da sie als Ecken des in g enthaltenen Polygonalzuges anzusehen sind.

4) *Man soll einem Kegelschnitt ein Polygon einschreiben, von dessen Seiten jede einen Kegelschnitt berührt, der mit dem gegebenen doppelte Berührung hat.* Der Beweis des Textes gilt auch für das allgemeinere Problem.

5) Man construire einen Kegelschnitt zu drei gegebenen Tangenten, welcher einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berührt (§ 309).

312. *Die Normalform der homogenen Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf ein Polardreieck als Fundamentaldreieck,*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \text{ oder } \Sigma a_{ii}x_i^2 = 0$$

gewährt wiederum den Vorzug, einen Punkt der Curve von einem einzigen Parameter abhängig zu machen. Denn, unter der Annahme, dafs $a_{11} = a_1^2$, $a_{22} = a_2^2$, $a_{33} = -a_3^2$, können wir wie in § 173 setzen

$$a_1x_1 : a_2x_2 : a_3x_3 = \cos\varphi : \sin\varphi : 1.$$

Dann lautet die Gleichung der Sehne der Punkte φ, φ'

$$a_1 x_1 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + a_2 x_2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = a_3 x_3 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi'),$$

und die der Tangente vom Berührungspunkte φ

$$a_1 x_1 \cos \varphi + a_2 x_2 \sin \varphi = a_3 x_3.$$

Daher ist die Gleichung der Tangente in x_i' allgemein

$$a_{11} x_1' x_1 + a_{22} x_2' x_2 + a_{33} x_3' x_3 = 0 \text{ oder } \Sigma a_{ii} x_i x_i = 0,$$

und ebenso lautet die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes x_i (§ 155). Umgekehrt lehrt der Vergleich derselben mit der allgemeinen Gleichung der Geraden ξ_i, dafs der Pol dieser Geraden die Coordinaten $\xi_1 : a_{11} \mid \xi_2 : a_{22} \mid \xi_3 : a_{33}$ hat.

Da der Pol einer Tangente ihr Berührungspunkt ist, so ist *die Tangentialgleichung des Kegelschnittes*, wiederum in Normalform

$$a_{22} a_{33} \xi_1^2 + a_{33} a_{11} \xi_2^2 + a_{11} a_{22} \xi_3^2 = 0 \text{ oder } \Sigma \frac{1}{a_{ii}} \xi_i^2 = 0.$$

Sobald also $\xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ die Curve berührt, so sind die vier Geraden $\xi_1 \mid \pm \xi_2 \mid \pm \xi_3$ Tangenten derselben; geradeso wie stets gleichzeitig vier Punkte $x_1' \mid \pm x_2' \mid \pm x_3'$ die Berührungspunkte sind. *Daher bilden die Diagonalen eines Tangentenvierseits die Seiten eines Polardreiecks, dessen Ecken die Diagonalpunkte des Vierecks der Berührungspunkte sind und umgekehrt* (vgl. § 68, § 278, 3).

Dieselbe Gleichung der Enveloppe erhalten wir nach der Methode des § 306, indem wir statt φ einen algebraischen Parameter μ einführen. Setzen wir

$$\tan \tfrac{1}{2} \varphi = \mu, \quad \cos \varphi = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2\mu}{1 + \mu^2}$$

oder

$$a_1 x_1 : a_2 x_2 : a_3 x_3 = (1 - \mu^2) : 2\mu : (1 + \mu^2),$$

so können wir die Gleichung der Tangente schreiben

$$\mu^2 (a_3 x_3 - a_1 x_1) + 2\mu a_2 x_2 + (a_3 x_3 + a_1 x_1) = 0,$$

deren Discriminante die Form hat

$$(a_3 x_3 - a_1 x_1)(a_3 x_3 + a_1 x_1) = a_2^2 x_2^2.$$

Zugleich erkennt man den Zusammenhang der Normal-Gleichungsform $x_1'^2 + x_3'^2 = x_2'^2$ mit der früheren $x_1 x_3 = x_2^2$ vermittelst der Substitution $x_1 : x_2 : x_3 = (x_1' + i x_3') : x_2' : (x_1' - i x_3')$. Sind also $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ conjugirt imaginäre Tangenten, so definiren $x_1' = 0$, $x_3' = 0$ conjugirt harmonische Polaren, die mit $x_2 = x_2' = 0$ ein reelles Polardreieck bilden. Reelle Coordinatenverhältnisse $x_1 : x_2$, $x_3 : x_2$ liefern also conjugirt imaginäre $x_1' : x_2'$, $x_3' : x_2'$ für einen reellen Punkt und umgekehrt. Aber immer kann $x_1 x_3 = x_1'^2 + x_3'^2$ gesetzt werden, so daſs alle Kegelschnittsgleichungen der Form des § 303 gleichzeitig durch die normalen reell vertreten werden.

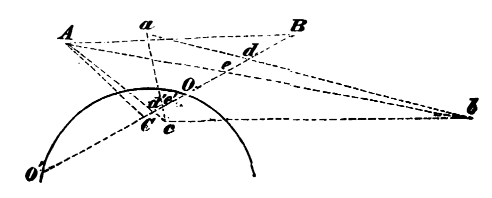
B. 1) Soll die Normalgleichung einen Kreis darstellen, so muſs die Gerade, welche sein Centrum mit einem Eckpunkt des Fundamentaldreiecks verbindet, auf der Gegenseite des Polardreiecks rechtwinklig sein, d. h. sein Centrum ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks (§ 118). Daher ist also z. B. $a_{22} l_3 x_2 - a_{33} l_2 x_3 = 0$ rechtwinklig auf $x_1 = 0$, so daſs $a_{11} : a_{22} : a_{33} = l_1 \cos A_1 : l_2 \cos A_2 : l_3 \cos A_3$ sein muſs. Die Gleichung des Kreises in Bezug auf ein Polardreieck ist also

$$\Sigma x_i^2 l_i \cos A_i = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma x_i^2 \sin 2A_i = 0;$$

derselbe ist somit nur für ein stumpfwinkliges Dreieck reell.

2) Die Ecken von zwei Polardreiecken ABC, abc des nämlichen Kegelschnittes liegen auf einem Kegelschnitt.

Sind d, e die Schnittpunkte von BC mit ab und Ab, ebenso d', e' die von BC mit Ac und ac, und O, O' die Schnittpunkte der Geraden BC mit dem Kegelschnitt, so sind d, B, e bez. die Pole von Ac, AC, Ae', d. h. OO' ist durch dd', BC und ee' harmonisch oder in Punktepaaren einer Involution geteilt. In Folge dessen gilt die Kette von Relationen

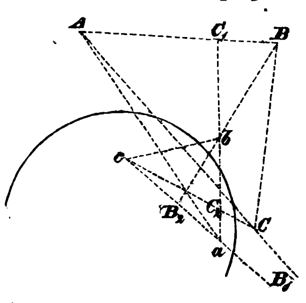


$$(a \cdot BbCc) = (BdCe') = (Cd'Be) = (BeCd') = (A \cdot BbCc),$$

somit liegen a, A, B, b, C, c auf dem nämlichen Kegelschnitt.

3) Sind ABC und abc zwei einander polar conjugirte Dreiecke, so ist das Sechseck $AbCaBc$ einem Kegelschnitt umgeschrieben.

Sind B_1, B_2 die Schnittpunkte von ac mit AC, Bb bez., so sind B_1, B die Pole von Bb, B_1B_2 bez., also ist BB_1B_2 ein Polardreieck; ebenso CC_1C_2, wenn C_1, C_2 die Schnittpunkte von ab mit AB, Cc bez. bezeichnen. Daher liegen $BB_1B_2CC_1C_2$ auf demselben Kegelschnitt nach dem Satze von 2); dann aber gehören nach dem Satze von Pascal die Schnittpunkte von BC_1, CB_1; BB_2, CC_2; B_1B_2, C_1C_2 einer Geraden an, und es gehen daher Aa, Bb, Cc durch einen Punkt, oder $AbCaBc$ ist ein Brianchon'sches Sechsseit.



4) Die Enveloppe einer Geraden, für welche das Product ihrer senkrechten Abstände von zwei festen Punkten constant ist, hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Wenn die Verbindungslinie der festen Punkte und die Mittelnormale der Strecke als Coordinatenaxen gewählt werden, so dafs die Coordinaten der festen Punkte $\pm c \,|\, 0$ sind, so gilt für $y - mx - n = 0$ als Gleichung der beweglichen Geraden als Ausdruck des Problems die Relation

$$(n+mc)(n-mc)=b^2(1+m^2) \quad \text{oder} \quad n^2=b^2+b^2m^2+c^2m^2;$$

also wegen
$$n^2=y^2-2mxy+m^2x^2$$

auch
$$m^2(x^2-b^2-c^2)-2mxy+y^2-b^2=0.$$

5) Die Enveloppe einer Geraden, für welche die Summe der Quadrate der normalen Abstände von zwei festen Punkten constant ist, hat die Gleichung

$$\frac{2x^2}{b^2-2c^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1.$$

6) Die Enveloppe, aus der Differenz der Quadrate dieser normalen Abstände bestimmt, ist eine Parabel.

7) Um einen festen Punkt O dreht sich eine Gerade OP und schneidet eine feste Gerade in P; man soll die Enveloppe der Geraden PQ finden, welche mit der drehenden Geraden den constanten Winkel OPQ bildet.

Wir nehmen an, OP bilde den Winkel ϑ mit der auf die feste Gerade gefällten Normalen, und ihre Länge sei also gleich $p \sec\vartheta$; die von O auf PQ gefällte Normale bilde mit OP den festen Winkel β und habe daher die Länge $p \sec\vartheta \cos\beta$. Da

diese mit der Normalen der festen Geraden den Winkel $\vartheta + \beta$ bildet, so ist für letztere als Axe die Gleichung von PQ

$$x \cos(\vartheta + \beta) + y \sin(\vartheta + \beta) = p \sec\vartheta \cos\beta, \quad \text{oder}$$

$$x \cos(2\vartheta + \beta) + y \sin(2\vartheta + \beta) = 2p \cos\beta - x\cos\beta - y\sin\beta,$$

eine Gleichung von der Form $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = x_3$.

Die Enveloppe derselben ist daher

$$x^2 + y^2 = (x\cos\beta + y\sin\beta - 2p\cos\beta)^2$$

d. h. eine Parabel, die den Punkt O zu ihrem Brennpunkt hat.

313. Die Normal-Gleichungsform wird mit Vorteil bei der *Untersuchung der Eigenschaften der Brennpunkte* verwendet (§ 210). Denn, wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Normalgleichungen von zwei an einander rechtwinkligen Geraden durch den Brennpunkt, $x_3 = 0$ die der zugehörigen Directrix darstellen, so bilden die drei Geraden ein Polardreieck der Curve (§ 194), in Bezug auf welches ihre Gleichung lautet

$$x_1^2 + x_2^2 = e^2 x_3^2 \quad \text{bez.} \quad e^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \xi_3^2.$$

Der Parameter φ drückt dann, da $x_1 = ex_3 \cos\varphi$, $x_2 = ex_3 \sin\varphi$, also $x_2 = x_1 \tan\varphi$ ist, den Winkel des von $0 \mid 0 \mid 1$ ausgehenden Vectors gegen die Fundamentallinie $x_2 = 0$ aus.

Die Gestalt der Gleichung zeigt deutlich einerseits die Definition des Kegelschnittes aus Brennpunkt und Directrix (§ 197), anderseits die Definition des Brennpunktes als Schnittpunkt zweier Tangenten absoluter Richtung, oder als Scheitel einer rechtwinkligen Involution harmonischer Polaren (§ 195). Diese projectivische Anschauung[89]) liefert neue Beweise für eine Reihe der Focaleigenschaften des X. Kapitels. So bilden die Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte an confocale Kegelschnitte eine Involution, zu der auch die Strahlen nach den in der Schaar enthaltenen Punktepaaren d. h. die Strahlen nach den Brennpunkten und die Strahlen absoluter Richtung als Paare gehören (§ 301). Dieselbe ist daher eine symmetrische Involution (§ 202) und die rechtwinkligen Doppelstrahlen sind die Tangenten und Normalen der durch den Punkt gehenden confocalen Kegelschnitte (§ 247).

B. 1) *Die Brennpunkte des durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnittes* (§ 210, 2).

Damit die Geraden $x - x' \pm (y - y')i = 0$ die Curve berühren, setzen wir den reellen und den nicht-reellen Teil getrennt gleich Null; dann zeigen sich die Brennpunkte als die Schnittpunkte der beiden Örter

$$A_{33}(x^2 - y^2) + 2A_{23}y - 2A_{13}x + A_{11} - A_{22} = 0,$$
$$A_{33}xy - A_{23}x - A_{13}y + A_{12} = 0,$$

d. i. von zwei gleichseitigen, mit dem gegebenen Kegelschnitt concentrischen Hyperbeln. Für die Parabel, d. h. für $A_{33} = 0$, werden beide Gleichungen linear und liefern

$$x(A_{23}^2 + A_{13}^2) = A_{23}A_{12} + \tfrac{1}{2}A_{13}(A_{11} - A_{22}),$$
$$y(A_{23}^2 + A_{13}^2) = A_{13}A_{12} + \tfrac{1}{2}A_{23}(A_{22} - A_{11}).$$

Im allgemeinen Falle schreiben wir die Gleichungen in der Form

$$(A_{33}x - A_{13})^2 - (A_{33}y - A_{23})^2 = A_{13}^2 - A_{11}A_{33} - (A_{23}^2 - A_{22}A_{33}) = \mathsf{D}(a_{11} - a_{22}),$$

$$(A_{33}x - A_{13})(A_{33}y - A_{23}) = A_{23}A_{13} - A_{33}A_{12} = \mathsf{D}a_{12};$$

dann erhalten wir die Coordinaten der Brennpunkte

$$(A_{33}x - A_{13})^2 = \tfrac{1}{2}\mathsf{D}(R + a_{11} - a_{22}), \quad (R \text{ vergl. § 166})$$
$$(A_{33}y - A_{23})^2 = \tfrac{1}{2}\mathsf{D}(R + a_{22} - a_{11}).$$

2) *Die Tangenten einer Parabel aus einem Punkte der Directrix sind rechtwinklig zu einander* (§ 227).

Denn die Tangenten der Curve aus dem Punkte $x_1 = x_3 = 0$ sind offenbar durch $ex_3 \pm x_1 = 0$ dargestellt. Für die Parabel ist $e = 1$, und diese Tangenten sind die innere und äufsere Halbirungslinie des Winkels zwischen x_1, x_3.

3) Enveloppe einer Sehne, die am Brennpunkte einen constanten Winkel spannt (§ 210, 4). Für constante Differenz $\varphi - \varphi'$ berührt die Sehne

$$x_1 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x_2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = ex_3 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

nach § 313 immer den Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 = e^2x_3^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')$.

4) *Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkte von zwei Tangenten ist rechtwinklig auf der Geraden, welche vom Brennpunkte nach dem Schnittpunkte der Directrix mit der Berührungssehne gezogen wird.*

Die Gleichung der Linie vom Brennpunkt nach dem Schnittpunkt der Tangenten φ, φ' geht hervor aus der Subtraction ihrer Gleichungen als

$$x_1 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') - x_2 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 0,$$

halbirt also den Winkel der Vectoren der Berührungspunkte (§ 228). Die Gerade vom Brennpunkt nach dem Schnittpunkt der Directrix und der Berührungssehne ist aber

$$x_1 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x_2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 0.$$

5) Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten, deren Berührungspunkte mit dem Brennpunkt den constanten Winkel 2δ bestimmen, ist ein Kegelschnitt, der denselben Brennpunkt, dieselbe Directrix und die Excentricität $e : \cos\delta$ hat.

Durch eine Elimination findet man die Gleichung des Ortes in der Form $(x_1^2 + x_2^2)\cos^2\delta = e^2 x_3^2$. Ist die Curve eine Parabel, so ist in dem Falle unserer Aufgabe der Winkel zwischen den Tangenten gegeben. Denn die Tangente von der Gleichung $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi - x_3 = 0$ halbirt den von $x_3 = 0$ und $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = 0$ gebildeten Winkel. Der Winkel der Tangenten ist daher der halbe Winkel zwischen den Linien $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = 0$ und $x_1 \cos\varphi' + x_2 \sin\varphi' = 0$ oder gleich $\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')$; oder der Winkel zwischen zwei Tangenten einer Parabel ist die Hälfte des Winkels, welchen ihre Berührungspunkte mit dem Brennpunkt bestimmen. Man erhält den Satz § 229, 5.

6) *Die Brennpunkte sind die Doppelpunkte der in der grofsen Axe durch die Paare zusammengehöriger Tangenten und Normalen des Kegelschnittes bestimmten Involution* (§ 195).

7) *Das zwischen zwei festen Tangenten gelegene Stück der Tangente eines Kegelschnittes spannt am Brennpunkt desselben einen Winkel von constanter Gröfse* (§ 204, 1).

Denn die von dem Punkte ausgehenden Tangenten sind Doppelstrahlen der beiden projectivischen Büschel von Geraden, die von ihm nach den Schnittpunkten der beweglichen Tangenten mit den beiden festen Tangenten gehen; zugleich sind sie die Geraden absoluter Richtung; darum ist (§ 96) der Winkel der Paare entsprechender Strahlen von constanter Gröfse. *Darin liegt die Construction des durch einen Brennpunkt und drei Tangenten bestimmten Kegelschnittes.*

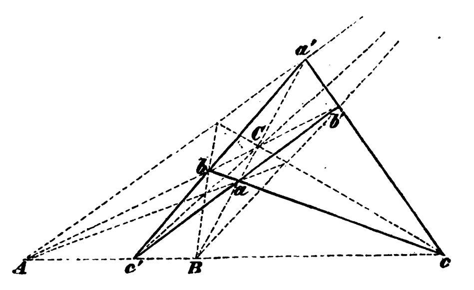
8) *Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels.*

Die Aufgabe in allgemeinerer Fassung verlangt den Ort der Schnittpunkte der Tangenten, die an die Kegelschnitte eines vier Bedingungen unterworfenen Systems von zwei festen Punkten O, O' aus gehen, oder die ihnen mit einem festen Kegelschnitt U gemeinsam sind. Sei n die Anzahl der Kegelschnitte des Sytems, welche eine feste Gerade g berühren, so bestimmen wir die Zahl der Schnittpunkte des fraglichen Ortes für die festen Punkte O, O' mit einer durch O gehenden Geraden g. An die sie berührenden n Kegelschnitte gehen von O' aus $2n$ Tangenten, welche

g in $2n$ Punkten des Ortes schneiden; die Gerade OO' ist überdies Tangente von n Kegelschnitten des Systems, an welche von O aus n andere Tangenten gehen, die in O einen $n$fachen Punkt des Ortes erzeugen. Somit ist der fragliche Ort von der Ordnung $3n$, insbesondere für die durch vier feste Punkte gehenden Kegelschnitte mit $n = 2$ (§ 269) eine Curve sechster Ordnung mit Doppelpunkten in O und O'. Fallen O, O' mit den absoluten Kreispunkten zusammen, so ist der betrachtete Ort der Ort der Brennpunkte, eine Curve sechster Ordnung, welche jene Kreispunkte zu Doppelpunkten hat und daher bicircular heifst.

Eine Methode für die Entwickelung ihrer Gleichung erläutern wir am folgenden Beispiel und bemerken hier nur, dafs der Ort sich auf die Ordnung vier reducirt, wenn die vier gemeinsamen Punkte ein Parallelogramm bilden.

9) *Der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schaar* (§ 282) *ist eine die absoluten Kreispunkte* ω, ω' *enthaltende bicirculare Curve dritter Ordnung.* Dies folgt für $n = 1$ aus dem Vorigen, es ergeben sich aber folgende nähere Daten.



Unter den dem Vierseit $aba'b'$ eingeschriebenen Kegelschnitten sind drei Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' und eine Parabel. Jene sechs Punkte gehören der Curve an. Die Parabel hat einen endlichen Brennpunkt F und einen unendlich fernen F' in der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Geraden. Da das Dreieck $F\omega\omega'$ mit jedem der Dreiecke bca', cab', abc', $a'b'c'$ der Parabel umgeschrieben ist, so sind dieselben Paare von Dreiecken auch je einem Kegelschnitt eingeschrieben (§ 298, 8), d. h. F ist der gemeinschaftliche Punkt der vier den Dreiecken umgeschriebenen Kreise. So kennt man bereits *neun Punkte* der Curve. Sie geht aber auch durch die Fufspunkte der Höhen des Diagonaldreiecks ABC. Denn für den Fufspunkt l der Höhe in aa' sind $l\omega$, $l\omega'$ Tangenten eines Kegelschnittes der Schaar und gehören somit zu einer Involution, welche aa' und lA zu Doppelstrahlen hat, das letztere, weil A der Pol von aa' für alle Kegelschnitte der Schaar ist; somit ist lA die Tangente des durch l gehenden Kegelschnittes der Schaar. Als Doppelstrahlen der Involution sind aber endlich laa' und lA harmonisch conjugirt zu $l\omega$, $l\omega'$, d. h. zu einander rechtwinklig.

Wenn man die Brennpunkte eines Kegelschnittes der Schaar als ein *Paar* in unserer Ortscurve bezeichnet, so ergibt sich nach der allgemeinen Brennpunktsdefinition der Satz: Die Verbindungslinien eines Punktes der Brennpunktscurve mit allen Paaren derselben bilden Paare einer Rechtwinkel-Involution. Ferner: Die Involutionen aus den Punkten eines Paares sind projectivisch (§ 392), und ihr Scheitelstrahl entspricht sich selbst. Oder: *Die Ortscurve ist das Erzeugnis zweier projectivischer Rechtwinkel-Involutionen mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl.*[90])

Um endlich die Gleichung des Ortes zu bilden, setzen wir, nach der Form der Gleichung der Kegelschnitte einer Schaar $\Sigma - \varkappa\Sigma' = 0$ (§ 282), in den Gleichungen von 1) $A_{11} - \varkappa A_{11}'$ für A_{11}, etc. und eliminiren $\varkappa$ zwischen denselben. Das Resultat ergibt sich in der Form

$$\begin{aligned}\{A_{33}(x^2-y^2)+2A_{23}y-2A_{13}x+A_{11}-A_{22}\}\times\\ \{A_{33}'xy-A_{23}'x-A_{13}'y+A_{12}'\}\\ =\{A_{33}'(x^2-y^2)+2A_{23}'y-2A_{13}'x+A_{11}'-A_{22}'\}\times\\ \{A_{33}xy-A_{23}x-A_{13}y+A_{12}\}.\end{aligned}$$

Der Ort ist eine Curve dritter Ordnung, weil die Glieder von höheren Geraden aus der Gleichung verschwinden.

Wenn jedoch $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ Parabeln ausdrücken, so ist $\Sigma - \varkappa\Sigma' = 0$ eine Schaar von Parabeln, A_{33}, A_{33}' sind Null, und der Ort der Brennpunkte reducirt sich auf einen Kreis. Wenn die Kegelschnitte concentrisch sind, so dafs die vier gegebenen Geraden ein Parallelogramm bilden, so werden für das Centrum im Nullpunkt A_{23}, A_{23}', A_{13}, A_{13}' sämmtlich Null, und der Ort der Brennpunkte ist eine gleichseitige Hyperbel.

314. **Zwei Normal-Gleichungen.** Zwei beliebige Kegelschnitte besitzen nach § 271 ein gemeinsames Polardreieck. Nehmen wir dieses als Fundamentaldreieck der Coordinaten, so sind die Gleichungen beider Kegelschnitte gleichzeitig in den Normalformen zu schreiben

$$\Sigma a_{ii}x_i^2 = 0,\ \Sigma a_{ii}'x_i^2 = 0 \ \text{ bez. } \ \Sigma\frac{1}{a_{ii}}\xi_i^2 = 0,\ \Sigma\frac{1}{a_{ii}'}\xi_i^2 = 0.$$

Überhaupt sind dann die Gleichungen aller dem Viereck der Schnittpunkte jenes umgeschriebenen bez. dem Vierseit der gemeinschaftlichen Tangenten jener eingeschriebenen Kegelschnitte von der Form

$$\Sigma(a_{ii}-\lambda a_{ii}')x_i^2 = 0 \ \text{ bez. } \ \Sigma\left(\frac{1}{a_{ii}}-\lambda\frac{1}{a_{ii}'}\right)\xi_i^2 = 0.$$

Dafs jenes Dreieck das Diagonaldreieck des Vierecks und des Vierseits*) zugleich ist, bestätigt die Elimination z. B. von x_3, die die Gleichung

$$(a_{11}a_{33}' - a_{11}'a_{33})x_1^2 - (a_{33}a_{22}' - a_{33}'a_{22})x_2^2 = 0$$

für ein Paar der Schnittsehnen liefert, etc. Auch ist dies dadurch offenbar, dafs nur in einer gemeinsamen Sehne in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Involution harmonischer Pole, nur an einem Schnittpunkt gemeinsamer Tangenten dieselbe Involution harmonischer Polaren vorhanden sein kann.

Aber im Büschel und in der Schaar ist das gemeinsame Polardreieck nur reell, wenn alle gemeinsamen Elemente der Kegelschnitte gleichartige Realitätsverhältnisse aufweisen. Sind nur zwei reelle Schnittpunkte und gemeinsame Tangenten vorhanden, z. B. in der Seite $x_3 = 0$ und an der Ecke $\xi_3 = 0$, so können wir jene als neue reelle Fundamentalelemente zu letzteren hinzunehmen, also $x_1 x_2$ statt $x_1^2 + x_2^2$ einführen (§ 312).

Aber nicht nur ein Büschel und eine Schaar haben ein gemeinsames Polardreieck. Für allgemeinere Systeme, die ein solches besitzen, gilt an Stelle von § 301 der Satz: *Wenn ein System von Kegelschnitten ein gemeinschaftliches Polardreieck besitzt, so bilden in jeder Geraden, die durch eine Ecke des Dreiecks geht, die Schnittpunktepaare der Kegelschnitte, und an jedem Punkt, der in einer Seite des Dreiecks liegt, ihre Tangentenpaare eine Involution.*

Denn, da jede Ecke in allen Kegelschnitten dieselbe Polare hat, so sind ihre Schnittpunktepaare in den Geraden harmonisch getrennt durch dieselben zwei Punkte, nämlich die gewählte Ecke und den Schnittpunkt mit der Gegenseite; dies sind also die Doppelpunkte der Involution jener; ebenso dualistisch.

So wird z. B. eine Schaar von jeder Geraden, die durch einen Diagonalpunkt des umgeschriebenen Vierseits geht, in

*) Beim Büschel geben je zwei Kegelschnitte ein anderes Tangentenvierseit, bei der Schaar aber je ein anderes Schnittpunktviereck.

einer Involution geschnitten, in welcher die Gegenseitenpaare des Vierseits conjugirte Punkte enthalten. Analoges gilt von den Tangenten eines Büschels aus einem Punkte in einer Diagonale des eingeschriebenen Vierecks.

B. 1) Der Ort des Pols einer Geraden $\Sigma\xi_i x_i = 0$ in Bezug auf einen Kegelschnitt, der die vier festen Punkte $x_1' \mid \pm x_2' \mid \pm x_3'$ enthält, ist (§ 301, 15) $\xi_1 x_1'^2 x_2 x_3 + \xi_2 x_2'^2 x_3 x_1 + \xi_3 x_3'^2 x_1 x_2 = 0$.

2) Der Ort des Pols einer Geraden $\Sigma\xi_i x_i = 0$ in Bezug auf einen Kegelschnitt, der vier feste Gerade $a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm a_3 x_3 = 0$ berührt, ist $a_1^2 \xi_2 \xi_3 x_1 + a_2^2 \xi_3 \xi_1 x_2 + a_3^2 \xi_1 \xi_2 x_3 = 0$.

Diese Beispiele geben auch den Ort des Centrums als den des Poles der unendlich fernen Geraden und die Bedingung der Parabel als die der Berührung mit derselben.

3) Man soll den Ort der Spitze für ein Dreieck bestimmen, dessen Basisecken längs des Kegelschnittes $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = a_{33} x_3^2$ sich bewegen, während zugleich seine Seiten einen andern Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ berühren.[91])

Wie in § 112, 1 sind die Coordinaten des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten φ_1, φ_3

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \mid \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \mid \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

und die Bedingungen des Problems liefern zuerst die Gleichung

$$a_{11} \cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) + a_{22} \sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) = a_{33} \cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

oder
$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) + (a_{11} - a_{22} - a_{33}) \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + (a_{22} - a_{33} - a_{11}) \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 = 0.$$

Ebenso
$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) + (a_{11} - a_{22} - a_{33}) \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + (a_{22} - a_{33} - a_{11}) \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 = 0,$$
also

$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = (a_{22} + a_{33} - a_{11}) \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \cos\varphi_3,$$
$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = (a_{11} + a_{33} - a_{22}) \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \sin\varphi_3.$$

Da die Coordinaten des Punktes, dessen Ort wir suchen, hier als Coefficienten auftreten, so folgt durch Quadriren und Addiren die Gleichung des Ortes

$$\frac{x_1^2}{(a_{22} + a_{33} - a_{11})^2} + \frac{x_2^2}{(a_{33} + a_{11} - a_{22})^2} = \frac{x_3^2}{(a_{11} + a_{22} - a_{33})^2}.$$

4) Ein Dreieck ist dem Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ eingeschrieben, und zwei seiner Seiten berühren den Kegelschnitt $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = a_{33} x_3^2$; dann ist die Enveloppe der dritten Seite

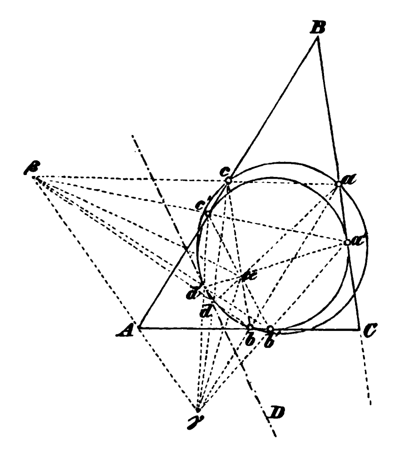
$$(a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22} - a_{22} a_{33})^2 x_1^2 + (a_{11} a_{22} + a_{22} a_{33} - a_{33} a_{11})^2 x_2^2 = (a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} - a_{11} a_{22})^2 x_3^2.$$

5) Wenn zwei Kegelschnitte U und V ihre gemeinschaftlichen Tangenten A, B, C, D in den Punkten a, b, c, d; a', b', c', d' berühren, so hat ein Kegelschnitt S, der durch die Punkte a, b, c geht und D in d' berührt, zur zweiten Schnittpunktsehne mit V die Gerade, welche die Schnittpunkte von A mit bc, B mit ca, C mit ab verbindet.

Wenn der Kegelschnitt V die Linie ab in α, β schneidet, so gehören nach dem Satze des Textes, da ab einen Diagonalenschnittpunkt von $ABCD$ enthält, ab, $\alpha\beta$ zu einer Involution, in welcher die Schnittpunkte von ab mit C und D conjugirte Punkte sind. Nach § 301 schneiden aber die gemeinschaftlichen Sehnen von S und V die Linie ab in Punkten, welche zu einer Involution gehören, in der die Schnittpunkte von ab mit S und V, d. h. a, b; α, β entsprechende Punkte sind. Ist daher D die eine der gemeinschaftlichen Sehnen, so mufs die andere durch den Schnittpunkt von C mit ab gehen.

6) Wenn in ein Dreieck ABC eine Ellipse eingeschrieben wird, die seine Seiten in ihren Mittelpunkten a, b, c berührt, wenn a', b', c' die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises sind, und wenn die vierte gemeinschaftliche Tangente D des Kreises und der Ellipse jenen in d' berührt, so berührt der durch die Mittelpunkte der Seiten gehende Kreis den eingeschriebenen Kreis in d'.

Nach 5) berührt ein durch a, b, c gehender Kegelschnitt den Kreis in d', wenn er auch durch die Punkte geht, in welchen der Kreis von der Verbindungslinie der Schnittpunkte von BC mit bc, CA mit ca, AB mit ab geschnitten wird. Diese Gerade ist aber in unserem Falle unendlich entfernt, der berührende Kegelschnitt also auch ein Kreis. So ergibt sich der Feuerbach'sche Satz von der Berührung des Kreises durch die Seitenmitten (§ 70,3) mit den die Seiten des Dreiecks berührenden Kreisen als ein specieller Fall[92]) von 5).



Der Punkt d' und die Gerade D können ohne Verzeichnung der Ellipse construirt werden. Denn da die Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks und des entsprechenden umgeschriebenen Vierseits sich in einem Punkte schneiden, so gehen die Geraden ab, cd, $a'b'$, $c'd'$ und die beiden Verbindungslinien von BC, D und A, von B und AC, D durch den nämlichen Punkt. Sind

also α, β, γ die Ecken des Dreiecks, welches von den Schnittpunkten von bc, $b'c'$; ca, $c'a'$; ab, $a'b'$ gebildet wird, so schneiden sich die Geraden $a'\alpha$, $b'\beta$, $c'\gamma$ in d'. Oder in andern Worten: das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist mit abc, $a'b'c'$ für die Centra der Homologie d, d' perspectivisch. In derselben Weise ist das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ mit ABC perspectivisch für die Linie D als Axe.

315. **Kegelschnitte durch drei Punkte.** Neben den bisherigen sind noch einige specielle Gleichungsformen von Wichtigkeit. Zunächst gehören hierher die Gleichungen der einem Dreieck umgeschriebenen und der ihm eingeschriebenen Kegelschnitte, wobei die Gleichungen der ersteren in Punktcoordinaten natürlich unmittelbar mit denen der letzteren in Liniencoordinaten übereinstimmen.

Die Gleichung eines durch die Schnittpunkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehenden Kegelschnittes ist

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{a_{23}}{x_1} + \frac{a_{31}}{x_2} + \frac{a_{12}}{x_3} = 0,$$

wie augenscheinlich ist. Schreibt man die Gleichung in der Form $x_3(a_{23}x_2 + a_{31}x_1) + a_{12}x_1x_2 = 0$, so erkennt man, dafs $x_3 = 0$ die Curve in den getrennten, $a_{23}x_2 + a_{31}x_1 = 0$ also in den zusammenfallenden Schnittpunkten derselben mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ schneidet. Auf diesem Wege gelangt man zur Erzeugung der Curve aus projectivischen Büscheln oder zur Parameterdarstellung. Werden zwei Dreieckseiten als homologe Strahlen genommen, so entspricht der dritten die Tangente in einem ihrer Endpunkte.

Daher sind die Gleichungen der Tangenten in den Ecken des Dreiecks

$$\frac{x_2}{a_{31}} + \frac{x_3}{a_{12}} = 0, \quad \frac{x_3}{a_{12}} + \frac{x_1}{a_{23}} = 0, \quad \frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{31}} = 0.$$

Ihre Schnittpunkte mit den Gegenseiten liegen offenbar in einer Geraden (§ 286), nämlich

$$\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{31}} + \frac{x_3}{a_{12}} = 0.$$

Die Verbindungsgeraden der Ecken mit entsprechenden Eckpunkten des Tangentendreiecks

$$\frac{x_2}{a_{31}} - \frac{x_3}{a_{12}} = 0, \quad \frac{x_3}{a_{12}} - \frac{x_1}{a_{23}} = 0, \quad \frac{x_1}{a_{23}} - \frac{x_2}{a_{31}} = 0$$

schneiden sich in einem Punkte (§ 118).[93]

Die Gleichung der Verbindungsgeraden zweier Punkte x_i', x_i'' der Curve kann geschrieben werden[94])

$$\frac{a_{23}}{x_1'x_1''}x_1 + \frac{a_{31}}{x_2'x_2''}x_2 + \frac{a_{12}}{x_3'x_3''}x_3 = 0,$$

weil sie sich für $x_i = x_i'$ oder $x_i = x_i''$ auf die Curvengleichung reducirt. Daher hat die Tangente im Punkte x_i' die Coordinaten

$$\xi_1 = \frac{a_{23}}{x_1'^2}, \quad \xi_2 = \frac{a_{31}}{x_2'^2}, \quad \xi_3 = \frac{a_{12}}{x_3'^2},$$

und die Tangentialgleichung des umgeschriebenen Kegelschnittes lautet in einer leicht zu rationalisirenden Form

$$(a_{23}\xi_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{31}\xi_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{12}\xi_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Unter den Kegelschnitten dieses Systems befinden sich unendlich viele gleichseitige Hyperbeln, die ein Büschel bilden (§ 179, 3), und unendlich viele Parabeln, aber ein einziger Kreis. Die Gleichungen dieser Curven können leicht dargestellt werden, sobald wir die x_i als Dreiliniencoordinaten auffassen, wie in den Beispielen.

B. 1) Die Gleichungen der umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln genügen für A_i als Gegenwinkel der Seiten $x_i = 0$ der Bedingung $a_{23} \cos A_1 + a_{31} \cos A_2 + a_{12} \cos A_3 = 0$ (vgl. §§ 70, 272, 2).

2) Die umgeschriebenen Parabeln haben Gleichungen, für welche $(a_{23} \sin A_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{31} \sin A_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{12} \sin A_3)^{\frac{1}{2}} = 0$.

3) *Die Gleichung des umgeschriebenen Kreises lautet*

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0.$$

Setzen wir in die Gleichungsform des Textes für x_i ein $x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i$, ordnen nach x, y und wenden die Kriterien des § 102 an, so mufs

$$a_{23} \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots = 0, \quad a_{23} \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots = 0 \quad \text{sein,}$$

also ist a_{23}, a_{31}, a_{12} zu $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$, $\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ oder $\sin A_1$, $\sin A_2$, $\sin A_3$ proportional (§ 61).

Die geometrische Bedeutung der Gleichung liegt in dem Satze: *Die Fufspunkte P, Q, R der von einem Punkte des umgeschriebenen Kreises auf die Dreiecksseiten gefällten Normalen liegen in einer Geraden.* Denn für beliebige Lage von O ist $x_1 x_2 \sin A_3$ offenbar das Doppelte vom Inhalt des Dreiecks POQ, dessen Winkel $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi - A_3$ ist; ebenso $x_3 x_1 \sin A_2 = 2 \cdot ROP$,

$x_2 x_3 \sin A_1 = 2 \cdot QOR$, also deren Summe $= 2 \cdot PQR$. Diese verschwindet, d. h. PQR ist eine Gerade, wenn O auf dem Kreise $A_1 A_2 A_3$ liegt. $x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = \text{constant}$ ist ferner die Gleichung eines mit dem umgeschriebenen concentrischen Kreises (§ 72).

4) Die Tangente des Kreises in einer Ecke eines eingeschriebenen Dreiecks macht mit der einen Seite denselben Winkel, wie die Gegenseite mit der andern.

Denn die Tangente in A_3 ist $x_1 \sin A_2 + x_2 \sin A_1 = 0$, und $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 = 0$ ist eine Parallele zu $x_3 = 0$ (§ 65).

5) Man soll die Enveloppe der Geraden $\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu'} = 1$ darstellen, wenn die unbestimmten Gröſsen μ, μ' in der Gleichung derselben durch die Relation $\mu + \mu' = C$ verbunden sind.

Indem man für μ' den Wert $(C - \mu)$ einsetzt und die Brüche beseitigt, findet man nach § 304 für die Gleichung der Enveloppe

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC = 0,$$

oder

$$\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} = 0.$$

Wenn z. B. der Winkel an der Spitze und die Summe der Seiten eines Dreiecks gegeben sind, so ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ für } a + b = c;$$

die Enveloppe ist also

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0,$$

d. h. eine die Seiten $x = 0$, $y = 0$ berührende Parabel.

Oder wenn zur Bestimmung einer Ellipse die Lage von zwei conjugirten Durchmessern und die Summe ihrer Quadrate gegeben sind, wenn also $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ und $a'^2 + b'^2 = c^2$ sind, so ist die Enveloppe dieser Ellipse durch $x \pm y \pm c = 0$ dargestellt, d. h. dieselbe berührt stets vier feste Gerade.

6) Gleichung eines dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kegelschnittes in Dreipunktcoordinaten. Aus

$$A_1^2 \xi_1^2 + A_2^2 \xi_2^2 + A_3^2 \xi_3^2 - 2A_2 A_3 \xi_2 \xi_3 - 2A_3 A_1 \xi_3 \xi_1 - 2A_1 A_2 \xi_1 \xi_2 = 0$$

folgt, daſs die Tangente im Punkte $\xi_1 = 0$ durch $\xi_1 = 0$ und $A_2 \xi_2 - A_3 \xi_3 = 0$ dargestellt ist. Da sie für den umgeschriebenen Kreis die Relation $l_2^2 \xi_2 - l_3^2 \xi_3 = 0$ erfüllen muſs, so ist dessen Gleichung

$$l_1^4 \xi_1^2 + l_2^4 \xi_2^2 + l_3^4 \xi_3^2 - 2 l_2^2 l_3^2 \xi_2 \xi_3 - 2 l_3^2 l_1^2 \xi_3 \xi_1 - 2 l_1^2 l_2^2 \xi_1 \xi_2 = 0$$

oder

$$\pm l_1 \xi_1^{\frac{1}{2}} \pm l_2 \xi_2^{\frac{1}{2}} \pm l_3 \xi_3^{\frac{1}{2}} = 0.$$

316. **Kegelschnitte an drei Tangenten.** Dualistisch entsprechend mufs die Gleichung des einem Dreieck $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ eingeschriebenen Kegelschnittes in Liniencoordinaten lauten

$$a_1 \xi_2 \xi_3 + a_2 \xi_3 \xi_1 + a_3 \xi_1 \xi_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_1}{\xi_1} + \frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} = 0.$$

Die Gleichung des Schnittpunktes zweier Tangenten ξ_i', ξ_i'' ist

$$\frac{a_1}{\xi_1' \xi_1''} \xi_1 + \frac{a_2}{\xi_2' \xi_2''} \xi_2 + \frac{a_3}{\xi_3' \xi_3''} \xi_3 = 0.$$

Für zwei aufeinanderfolgende Tangenten $\xi_i' = \xi_i''$ definirt sie den Berührungspunkt, dessen Coordinaten

$$x_1 = \frac{a_1}{\xi_1'^2}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\xi_2'^2}, \quad x_3 = \frac{a_3}{\xi_3'^2}$$

demnach die Ortsgleichung erfüllen

$$(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

In rationaler Form erhalten wir daher die Gleichung der Kegelschnitte zu drei Tangenten als

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - 2 a_3 a_1 x_3 x_1 - 2 a_1 a_2 x_1 x_2 = 0.$$

Man bestätigt dies direct dadurch, dafs für Nullsetzung einer Variabeln die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Quadrat wird, also $x_i = 0$ die Curve in zusammenfallenden Punkten schneidet. Die Wahl der Vorzeichen ist, wenn die a_i positiv oder negativ genommen werden, dadurch bedingt, dafs jede unrichtige Wahl die ganze linke Seite zum Quadrat einer linearen Function machen würde.

Schreibt man die Gleichung in der Form des § 303

$$a_3 x_3 (2 a_1 x_1 + 2 a_2 x_2 - a_3 x_3) = (a_1 x_1 - a_2 x_2)^2,$$

so erweisen sich $x_3 = 0$ und $2 a_1 x_1 + 2 a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$ als Tangenten mit der Berührungssehne $a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$. Wir können also ebenso wie dort einen Parameter $a_1 x_1 - a_2 x_2 = \lambda$ einführen und erhalten

$$a_1 x_1 : a_2 x_2 : a_3 x_3 = (\lambda + 1)^2 : (\lambda - 1)^2 : 4.$$

Unter den Kegelschnitten dieses Systems sind ausgezeichnet die Schaar der Parabeln und die *vier* dem Dreieck eingeschriebenen Kreise.

B. 1) In dem umgeschriebenen Dreieck ist $1:a_1 \mid 1:a_2 \mid 1:a_3$ der Brianchonpunkt und $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ die zugehörige Pascallinie.

2) Die Gleichung der Sehne x_i', x_i'' des eingeschriebenen Kegelschnittes ist[95])

$$x_1 \left\{(a_1x_2'x_3'')^{\frac{1}{2}} + (a_1x_2''x_3')^{\frac{1}{2}}\right\} + \cdots = 0.$$

Denn die Einsetzung von x_i' statt x_i gibt die Form

$$\left\{(x_1'x_2'x_3'')^{\frac{1}{2}} + \cdots\right\}\left\{(a_1x_1')^{\frac{1}{2}} + \cdots\right\} - (x_1'x_2'x_3')^{\frac{1}{2}}\left\{(a_1x_1'')^{\frac{1}{2}} + \cdots\right\} = 0.$$

3) Welches ist die Gleichung des Kegelschnittes, der fünf Gerade $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $\Sigma\alpha_ix_i = 0$, $\Sigma\alpha_i'x_i = 0$ berührt?

Sie ist $\quad (a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$

mit den Bedingungen für a_1, a_2, a_3

$$\frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{a_2}{\alpha_2} + \frac{a_3}{\alpha_3} = 0, \quad \frac{a_1}{\alpha_1'} + \frac{a_2}{\alpha_2'} + \frac{a_3}{\alpha_3'} = 0. \quad \text{Also ist}$$

$$a_1 : a_2 : a_3 = \left(\frac{1}{\alpha_2\,\alpha_3'} - \frac{1}{\alpha_2'\alpha_3}\right) : \left(\frac{1}{\alpha_3\,\alpha_1'} - \frac{1}{\alpha_3'\alpha_1}\right) : \left(\frac{1}{\alpha_1\,\alpha_2'} - \frac{1}{\alpha_1'\alpha_2}\right).$$

4) Die Gleichung des Kegelschnittes, welcher die Seiten des Fundamentaldreiecks in ihren Mittelpunkten berührt, lautet in Dreiliniencoordinaten

$$(l_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (l_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (l_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

5) *Die Gleichung des dem Dreieck innerlich eingeschriebenen Kreises lautet*

$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cdot \sqrt{x_1} + \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cdot \sqrt{x_2} + \cos\tfrac{1}{2}A_3 \cdot \sqrt{x_3} = 0.$$

Auf dem in § 315, 3 angegebenen Wege erhält man in Dreiliniencoordinaten zwei Bedingungen, umformbar in

$$a_2\sin A_3 + a_3\sin A_2 = \pm(a_3\sin A_1 + a_1\sin A_3) = \pm(a_1\sin A_2 + a_2\sin A_1),$$

wo die vierfach mögliche Zeichencombination zeigt, dafs es vier berührende Kreise des Dreiecks gibt. Wählt man die positiven Zeichen, so lauten die Auflösungen (mit cyclischer Verschiebung)

$$a_1 : \sin A_1 = 2R = \sin A_2 + \sin A_3 - \sin A_1 = 4\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3$$

oder $\quad a_1 = 8\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \cdot \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3$, etc.

Die Gleichung des in $x_1 = 0$ äufserlich berührenden Kreises geht aus der vorigen hervor, indem man das Vorzeichen von x_1 ändert und A_2, A_3 durch ihre Supplemente ersetzt; sie lautet also

$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cdot \sqrt{(-x_1)} + \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cdot \sqrt{x_2} + \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cdot \sqrt{x_3} = 0.$$

6) Die Gleichung des eingeschriebenen Kreises entsteht folgendermaßen[96]) aus der des umgeschriebenen.

Sind die Seiten des von den Berührungspunkten des $x_1 x_2 x_3 = 0$ eingeschriebenen Kreises gebildeten Dreiecks $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3' = 0$ und seine Winkel A_1', A_2', A_3', so ist seine Gleichung nach § 315, 3 $x_2' x_3' \cos A_1' + \cdots = 0$. Aber nach § 116 lautet die Kreisgleichung, bezogen auf die Dreiecke $A_1 A_2' A_3'$, $A_2 A_3' A_1'$, $A_3 A_2' A_1'$, $x_1'^2 = x_2 x_3$, $x_2'^2 = x_3 x_1$, $x_3'^2 = x_1 x_2$. Die Substitution dieser Werte und von $A_i' = \frac{1}{2}(\pi - A_i)$ gibt $x_1^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A_1 + \cdots = 0$.

7) Man entwickele die Gleichungen der Berührungskreise des Fundamentaldreiecks und die Gleichung des ihm umgeschriebenen Kreises in Dreipunktcoordinaten.

Aus der Gleichungsform eines eingeschriebenen Kegelschnittes folgen seine Berührungspunkte mit den Seiten des Dreiecks mittelst

$$A_{12}\xi_2 + A_{31}\xi_3 = 0, \quad A_{23}\xi_3 + A_{12}\xi_1 = 0, \quad A_{31}\xi_1 + A_{23}\xi_2 = 0.$$

Für den eingeschriebenen Kreis ergeben sich, für $2l$ als den Umfang des Fundamentaldreiecks mit den Seitenlängen l_i, die Gleichungen der Berührungspunkte in der Form

$$(l - l_i)\,\xi_k + (l - l_k)\,\xi_i = 0,$$

und damit die Gleichung des umgeschriebenen Kreises

$$(l - l_1)\,\xi_2\xi_3 + (l - l_2)\,\xi_3\xi_1 + (l - l_3)\,\xi_1\xi_2 = 0;$$

den äußerlich berührenden Kreisen entsprechen die Gleichungen

$$-\,l\xi_2\xi_3 + (l - l_3)\,\xi_3\xi_1 + (l - l_2)\,\xi_1\xi_2 = 0, \text{ etc.}$$

317. **Pleonastische Vierercoordinaten.** Die Gleichung des einem Viereck umgeschriebenen Kegelschnittes (§ 289) gestattet, manche Probleme durch Relationen zwischen den Abständen s_i von den Seiten des Vierecks auszudrücken, wie die Beispiele 1—5 zeigen.

Zwischen irgend vier linearen Functionen besteht nun aber eine lineare homogene Relation (§ 64). Sie sind daher nicht unabhängige homogene Coordinaten, sondern durch eine Identität unter einander verbundene Variable. Sie bilden so ein erstes Beispiel für pleonastische Coordinatensysteme, d. h. für solche, die überzählige Variabeln enthalten. Um die Verwendung zu vereinfachen, nehmen wir x_1, x_2, x_3, x_4 *als ein System von Vierercoordinaten*[97]) *mit der symmetrischen Identität*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

d. h. die Gleichungen der aufeinanderfolgenden Seiten ab, ba', $a'b'$, $b'a$ eines Vierecks sollen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ sein, wo aber in den x_i geeignete constante Factoren implicite zu denken sind. An die früheren trimetrischen Coordinaten (§ 85) knüpft diese Auffassung dadurch an, dafs $x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ die Einheitlinie im Fundamentaldreieck der übrigen darstellt.

Alle homogenen Gleichungen zwischen den vier x_i' können ohne Änderung der Bedeutung dadurch umgeformt werden, dafs man ein Vielfaches einer Potenz der Coordinatensumme hinzufügt. So ist die Gleichung einer beliebigen Geraden

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

oder

$$(\xi_1 - \xi_4) x_1 + (\xi_2 - \xi_4) x_2 + (\xi_3 - \xi_4) x_3 = 0.$$

Man erhält für die Tangente im Punkte x_i' des Kegelschnittes $x_1 x_3 - k x_2 x_4 = 0$, indem man zuerst durch Elimination von x_i auf § 154 zurückgeht, die Gleichung

$$x_3' x_1 + x_1' x_3 - k(x_4' x_2 + x_2' x_4) = 0$$

mit der Bedingung $x_1' x_3' - k x_2' x_4' = 0$, also durch Elimination von k die Gleichung der Tangente eines Punktes in Bezug auf vier feste Punkte $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$.

Soll sie mit einer willkürlichen Geraden zusammenfallen, so mufs

$$(\xi_1 + k) x_1' = -(\xi_2 + k) x_2' = (\xi_3 + k) x_3' = -(\xi_4 + k) x_4' = c,$$

d. h. constant sein. Eliminirt man x_2' durch

$$(\xi_2 - \xi_4) x_2' = -(\xi_1 - \xi_4) x_1' - (\xi_3 - \xi_4) x_3',$$

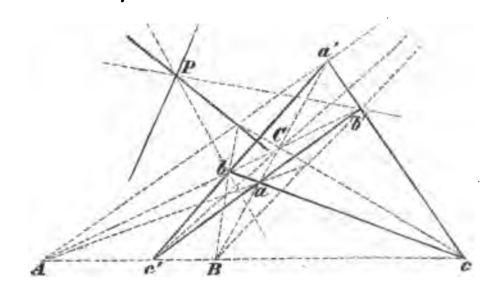
so liefert die Determinante der ersten drei Gleichungen, für k und c als Unbekannte, nach leichten Umformungen

$$(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_4) x_1'^2 - (\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4) x_3'^2 = 0$$

als die Gleichung der zwei Geraden, welche die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte des Systems $aba'b'$ in der Tangente mit dem Punkt c, dem Schnittpunkt von ab und $a'b'$ verbinden.

Denkt man die Ordnung von x_3 und x_1 vertauscht, so hat

man im Vorigen die analoge Entwickelung für das System der Kegelschnitte $bb'cc'$ für c' als Schnittpunkt von $a'b$ und ab'. Man hat also den Satz: *Wenn der Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte mit den Be-*



rührungspunkten einer gemeinschaftlichen Tangente durch Gerade verbunden wird, so entsteht ein harmonisches Büschel. Er folgt auch aus dem Satze von der Involution in der Transversale eines Kegelschnittbüschels, wenn man das Sehnenpaar als einen seiner Kegelschnitte betrachtet. (§ 301.)

Insbesondere ist die Tangente von $x_1 x_3 - k x_2 x_4 = 0$ im Punkte $x_1 = x_2 = 0$ durch $x_1 + k x_2 = 0$ ausgedrückt und bildet also mit den anstofsenden Seiten und der Diagonale $x_1 + x_2 = 0$ des Vierecks ein harmonisches Büschel für $k = -1$. Den vier Geraden entsprechen also in den Ordnungen $x_1 x_2 x_3 x_4$, $x_2 x_3 x_1 x_4$, $x_3 x_1 x_2 x_4$ die drei Kegelschnitte

$$x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0, \quad x_2 x_1 + x_3 x_4 = 0, \quad x_3 x_2 + x_1 x_4 = 0$$

als solche, deren Tangenten in den Ecken des Vierseits mit den Seiten und der Diagonale ein harmonisches Büschel bilden.

B. 1) Ort der Centra der Kegelschnitte einer Schaar.[98]) Sind $s_i = -(x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i) = 0$ die Normalgleichungen der gemeinsamen Tangenten in rechtwinkligen Coordinaten, so sei ϑ der Winkel der Hauptaxe eines der Kegelschnitte gegen die x-Axe, $\alpha_i - \vartheta$ also gegen die Normalen. Dann gilt für $x \mid y$ als die Coordinaten des Centrums nach § 181, 1

$$s_i^2 = a^2 \cos^2 (\alpha_i - \vartheta) + b^2 \sin^2 (\alpha_i - \vartheta),$$

$$b = (a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta) \cos^2 \alpha_i + 2 (a^2 - b^2) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \alpha_i \sin \alpha_i$$
$$+ (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta) \sin^2 \alpha_i.$$

Vier Gleichungen dieser Form erlauben die Elimination der Unbekannten a^2, b^2, ϑ, oder der Aggregate

$$a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta,\quad (a^2 - b^2)\cos\vartheta\sin\vartheta,\quad a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta.$$

Das Eliminationsresultat ist

$$\begin{vmatrix} s_1^2, & \cos^2\alpha_1, & \cos\alpha_1\sin\alpha_1, & \sin^2\alpha_1 \\ s_2^2, & \cos^2\alpha_2, & \cos\alpha_2\sin\alpha_2, & \sin^2\alpha_2 \\ s_3^2, & \cos^2\alpha_3, & \cos\alpha_3\sin\alpha_3, & \sin^2\alpha_3 \\ s_4^2, & \cos^2\alpha_4, & \cos\alpha_4\sin\alpha_4, & \sin^2\alpha_4 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt $A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + A_3 s_3^2 + A_4 s_4^2 = 0$ für A_i als bekannte Constanten. Diese Gleichung ist aber nur scheinbar vom zweiten Grade; denn die s_i^2 geben entwickelt als Coefficienten von x^2 die $\cos^2\alpha_i$, so dafs, weil diese mit einer Verticalreihe der Determinante übereinstimmen, das Glied x^2 verschwindet. Auf analoge Weise verschwinden die Coefficienten von xy und y^2. Der fragliche Ort ist daher eine Gerade (§ 282).

Ihre geometrische Bestimmung hängt von dem Umstande ab, dafs die Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt durch $A_1 s_1' s_1 + A_2 s_2' s_2 + A_3 s_3' s_3 + A_4 s_4' s_4 = 0$ dargestellt wird (vgl. § 320) und somit die Polare von $s_1 | s_2$ durch $s_3 | s_4$ geht. Wenn aber ein Kegelschnitt durch das Verschwinden der höchsten Glieder seiner Gleichung in eine Gerade übergeht, so ist die Polare eines Punktes eine zu ihr parallele Gerade in der doppelten Entfernung von dem Punkte. Die durch die erhaltene Gleichung dargestellte Gerade halbirt daher die Verbindungslinien der Punktepaare $s_1 | s_2$, $s_3 | s_4$; $s_1 | s_3$, $s_2 | s_4$; $s_1 | s_4$, $s_2 | s_3$.

Wenn umgekehrt in irgend einer Form die Gleichungen $s_i = 0$ von vier Geraden gegeben sind, so kann die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen ihres Vierseits zumeist am leichtesten gebildet werden, indem man die Contanten so bestimmt, dafs $A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + A_3 s_3^2 + A_4 s_4^2 = 0$ eine Gerade darstellt.

2) Jeder Kegelschnitt, welcher zwei von den Diagonalen eines Vierseits harmonisch teilt, teilt auch die dritte so.

Sind s_i die linken Seiten der Gleichungen der vier Geraden, so ist $\Sigma A_i s_i^2 = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, für welchen die Polare eines beliebigen Punktes in der Form $\Sigma A_i s_i s_i' = 0$ erscheint. Die Polare von $s_1 | s_2$ geht also durch $s_3 | s_4$, oder die Gegeneckenpaare des Vierseits $s_1 s_2 s_3 s_4$ sind durch den fraglichen Kegelschnitt harmonisch getrennt.[99])

Durch Verfügung über die Constanten A_i kann ein Kegelschnitt dieser Art durch drei beliebige Punkte gelegt werden.

Wenn durch specielle Wahl derselben drei Punkte der harmonisch conjugirten Paare der Diagonalen in eine Gerade fallen, $E_1 = 0$, so liegen die andern in einer Geraden $E_2 = 0$, so dafs $\Sigma A_i s_i^2 = E_1 E_2$ ist. Liegen jene Punkte unendlich fern, so sind diese die Mitten der Diagonalen.

3) Der Ort des Centrums für einen Kegelschnitt, für welchen die drei Tangenten und die Summe der Quadrate der Axen gegeben sind, ist ein Kreis.

Mit drei Gleichungen von der Form derjenigen in 1) ist

$$a^2 + b^2 = k^2 = (a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta) + (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)$$

als vierte zu verbinden; das Resultat der Elimination ist

$$\begin{vmatrix} s_1^2, & \cos^2 \alpha_1, & \cos \alpha_1 \sin \alpha_1, & \sin^2 \alpha_1 \\ s_2^2, & \cos^2 \alpha_2, & \cos \alpha_2 \sin \alpha_2, & \sin^2 \alpha_2 \\ s_3^2, & \cos^2 \alpha_3, & \cos \alpha_3 \sin \alpha_3, & \sin^2 \alpha_3 \\ k^2, & 1 \;, & 0 \;, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder $$A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + A_3 s_3^2 + A_4 = 0.$$

Man erkennt wie in 1), dafs der Coefficient von xy verschwindet, und dafs die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich sind. Der Ort ist somit ein Kreis. Wenn aber die Gleichung $A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + A_3 s_3^2 = 0$ einen Kreis darstellt, bezogen auf ein Polardreieck, dessen Höhenschnittpunkt sein Mittelpunkt ist (vgl. § 312, 1), so stellt obige Gleichung einen Kreis dar, dessen Centrum der Höhenschnittpunkt des Tangentendreiecks ist.

4) Die Centra der beiden gleichseitigen Hyperbeln, die demselben Vierseit eingeschrieben sind (§ 179, 4), sind die Punkte, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen und den vier Kreisen gemeinsam sind, welche aus den Höhenschnittpunkten der vier von den Tangenten gebildeten Dreiseite so beschrieben werden, dafs die Ecken derselben die Pole der Gegenseiten sind. Jene Höhenschnittpunkte liegen daher in einer Geraden.

5) Ort eines Brennpunktes für die Kegelschnitte eines Büschels.

Die Entfernung eines der gegebenen Punkte vom Brennpunkte genügt der Relation $r_i = Ax_i + By_i + C$ (vgl. § 197). Zwischen vier solchen Gleichungen können A, B, C linear eliminirt werden, und man erhält

$$\begin{vmatrix} r_1, & x_1, & y_1, & 1 \\ r_2, & x_2, & y_2, & 1 \\ r_3, & x_3, & y_3, & 1 \\ r_4, & x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder durch Entwickelung $Lr_1 + Mr_2 + Nr_3 + Pr_4 = 0$. Betrachten wir die geometrische Bedeutung der Werte von L, M, N, P (§ 87), so erhalten wir den Satz[100])

$$OA \cdot BCD + OC \cdot ABD = OB \cdot ACD + OD \cdot ABC$$

für O als den Brennpunkt und BCD, etc. als Flächeninhalt des Dreiecks der Punkte B, C, D etc. (vgl. § 104). Man erkennt so, daſs $L + M + N + P = 0$ sein muſs. Substituirt man für r_i ihre Werte $\sqrt{\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\}}$, so kommt durch die Entfernung der Wurzelgröſsen die Gleichung des Ortes auf den sechsten Grad (§ 313, 8).

6) Wenn die Grundpunkte des Büschels in einem Kreise liegen, so daſs nach § 104

$$Lr_1^2 + Mr_2^2 + Nr_3^2 + Pr_4^2 = 0$$

ist, so zerfällt der Ort der Brennpunkte in zwei Curven dritter Ordnung.[101]) Denn dann ist

$$(L + M)(Lr_1^2 + Mr_2^2) = (N + P)(Nr_3^2 + Pr_4^2)$$

und also $$(Lr_1 + Mr_2)^2 = (Nr_3 + Pr_4)^2,$$

woraus durch Subtraction $LM(r_1 - r_2)^2 = NP(r_3 - r_4)^2$, welche Gleichung offenbar in Factoren zerfällt. Jeder Factor gibt mit

$$Lr_1 + Mr_2 + Nr_3 + Pr_4 = 0$$

verbunden, ein Resultat von der Form $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, das eine Curve dritter Ordnung darstellt.

7) Man findet die Gleichungen der Geraden der Figur:

$aa' : x_2 + x_3 = 0$ oder $x_1 + x_4 = 0$; $cC : x_1 - x_3 = 0$; $c'C : x_2 - x_4 = 0$;
$bb' : x_1 + x_2 = 0$ oder $x_3 + x_4 = 0$; $bB : x_1 - x_2 = 0$; $b'B : x_3 - x_4 = 0$;
$cc' : x_1 + x_3 = 0$ oder $x_2 + x_4 = 0$; $aA : x_1 - x_4 = 0$; $a'A : x_2 - x_3 = 0$.

Daher schneiden sich $c'C$ und bB in $a'A$; cC und $a'A$ in bB; cC und $b'B$ in aA; $c'C$ und $a'A$ in $b'B$.

8) Die Tangenten des Punktes P oder x_i' in Bezug auf $aba'b'$ und in Bezug auf $bb'cc'$ sind bez.

$$\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0, \quad \frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} - \frac{x_3}{x_3'} + \frac{x_4}{x_4'} = 0;$$

sie bilden mit den Geraden

$$\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} = 0, \quad \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$$

ein harmonisches Büschel, d. h. mit den Geraden Pb, Pb'.

9) Seien zwei Kegelschnitte, welche sich in vier reellen Punkten schneiden, $x_1 x_3 = k x_2 x_4$, $x_1 x_3 = l x_2 x_4$. Ist x_i' der

Berührungspunkt des zweiten Kegelschnittes mit einer gemeinschaftlichen Tangente beider Kegelschnitte, so berührt die Gerade $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$ den ersten Kegelschnitt, und die Relation $\Sigma x_i = 0$ bestimmt den Berührungspunkt, indem man zunächst x_3 und x_4 eliminirt,

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_2'} - \frac{x_2}{x_2'}, & \frac{1}{x_3'}, & -\frac{1}{x_4'} \\ 0 \quad, & x_1, & -kx_2 \\ x_1 + x_2, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und die Discriminante dieser Gleichung bildet:

$$\left(\frac{k}{x_1'} - \frac{k}{x_3'} - \frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_4'}\right)^2 + 4k\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_4'}\right)\left(\frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_3'}\right) = 0$$

oder diese mittelst $x_1'x_3' = lx_2'x_4'$ umgeformt in

$$4kl(x_2' + x_3')^2 + \{k(x_1' - x_3') + l(x_2' - x_4')\}^2$$

oder $kl(x_1' - x_3' + x_4' - x_2')^2 = \{k(x_1' - x_3') + l(x_4' - x_2')\}^2$

oder endlich $k(x_1' - x_3')^2 - l(x_4' - x_2')^2 = 0.$

Darnach liegen die vier Punkte x_i' in zwei Geraden, die durch den Schnittpunkt von $x_1 = x_3$ und $x_2 = x_4$ gehen und mit diesen ein harmonisches Büschel bilden, oder in zwei Geraden durch C, welche mit cC und $c'C$ ein harmonisches Büschel bilden. Dieselbe Gleichung erhält aber auch die Form

$$k(x_1' - x_3')^2 - l(2x_2' + x_1' + x_3')^2 = 0$$

oder $k(x_1' - x_3')^2 + 4lx_2'x_4' - l(x_1' + x_3')^2$

oder $k(x_1' - x_3')^2 + 4x_1'x_3' - l(x_1' + x_3')^2 = 0,$

und zeigt, dafs die vier Punkte x_i' in zwei Geraden aus dem Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ oder c liegen; sie liegen nach der Symmetrie der Relationen auch ebenso in zwei Geraden aus c'.

Man hat also den Satz: Wenn die dem einen Kegelschnitt angehörigen Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten eines Paares von Kegelschnitten, die sich in reellen Punkten schneiden, durch sechs Gerade verbunden werden, so fallen die drei Schnittpunkte derselben mit den Schnittpunkten der drei Paare gemeinsamer Sehnen zusammen.

10) Der Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ hat mit den drei Kegelschnitten je eine doppelte Berührung, welche zu den drei Vierecken aus vier Geraden so bezogen sind, dafs die Tangenten in den Ecken die vierten harmonischen Geraden zu den beiden Seiten und der betreffenden Diagonalen bilden, und zwar sind die Berührungslinien die Diagonalen des Vierecks.

Der Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ kann auch durch $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$ dargestellt werden, weil $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 0$ subtrahirt werden kann.

Diese Form ist aber mit $x_2x_3 + x_1x_4 + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = 0$ oder mit $x_2x_3 + x_1x_4 - (x_2 + x_3)^2 = 0$ äquivalent und zeigt, dafs der betrachtete Kegelschnitt mit $x_2x_3 + x_1x_4 = 0$ in der Geraden $x_2 + x_3 = 0$ eine doppelte Berührung hat. Ebenso ergeben sich als mit der obigen Grundform äquivalente Formen

$$x_3x_4 + x_2x_1 - (x_1 + x_2)^2 = 0 \text{ und } x_3x_1 + x_2x_4 - (x_1 + x_3)^2 = 0.$$

11) Die zwölf Kegelschnitte

$$x_1^2 = x_2x_4,\ x_1^2 = x_3x_4,\ x_1^2 = x_2x_3;\ x_2^2 = x_1x_3,\ x_2^2 = x_1x_4,\ x_2^2 = x_3x_4;$$
$$x_3^2 = x_1x_4,\ x_3^2 = x_2x_4,\ x_3^2 = x_1x_2;\ x_4^2 = x_1x_2,\ x_4^2 = x_1x_3,\ x_4^2 = x_2x_3$$

enthalten je drei Punkte des Vierecks, berühren zu zweien in jedem dieser Punkte die Nachbarseiten des Vierecks und gehen zu dreien durch die acht Punkte, welche die Seiten des Vierecks mit dem Kegelschnitt $\Sigma x_i^2 = 0$ gemein haben. Die Seite $x_4 = 0$ schneidet den letzteren in Punkten, für welche zugleich $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ sind, die also den Gleichungen $x_1^2 = x_2x_3$, $x_2^2 = x_3x_1$, $x_3^2 = x_1x_2$ entsprechen.

12) Die Gleichung des Kegelschnittes, der die vier Fundamentallinien und die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ berührt, ist[102])

$$(a_1 - a_4)^2(a_2 - a_3)^2(x_1x_4 + x_2x_3) + (a_2 - a_4)^2(a_3 - a_1)^2(x_2x_4 + x_3x_1)$$
$$+ (a_3 - a_4)^2(a_1 - a_2)^2(x_3x_4 + x_1x_2) = 0.$$

Setzen wir α_1, α_2, α_3 für $(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)$, etc. und berücksichtigen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 = 0$, so erhalten die Berührungspunkte der vier Fundamentallinien die Coordinaten

$$0,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1;\ \alpha_3,\ 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ 0,\ \alpha_3;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ 0.$$

Die Coordinaten des Berührungspunktes mit der Geraden a_i sind

$$x_1 = (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_4 - \alpha_2),\ x_2 = -(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_3),$$
$$x_3 = (\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4),\ x_4 = -(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1).$$

Siebenzehntes Kapitel.

Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades.

318. **Allgemeine Gleichung.** Es giebt keinen Kegelschnitt, dessen Gleichung nicht in der Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ oder

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

geschrieben werden kann. Denn diese allgemeine Gleichung, welche hier stets unter dem Symbol $S = 0$ verstanden werden soll, ist vom zweiten Grade, und weil sie fünf unabhängige Constanten ($a_{ik} = a_{ki}$) enthält, so können wir diese so bestimmen, dafs die Curve, welche sie darstellt, durch fünf gegebene Punkte geht und daher mit einem beliebigen gegebenen Kegelschnitt zusammenfällt.

Die so geschriebene Gleichung in projectivischen Punktcoordinaten enthält die Gleichung in Cartesischen Coordinaten als einen speciellen Fall, den wir erhalten, wenn wir x_1 und x_2 durch x und y ersetzen und die Seite $x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks im Unendlichen, d. h. $x_3 = 1$, annehmen (§ 73).

Andererseits kann die dualistisch entsprechende Gleichung

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{31}\xi_3\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 = 0$$

in projectivischen Liniencoordinaten, symbolisch $\Sigma = 0$, jeden beliebigen Kegelschnitt darstellen, weil sie für fünf willkürlich gewählte Tangenten eines solchen erfüllt werden kann. Wenn die dualistische Interpretation im Folgenden der Kürze wegen zumeist unterlassen ist, so sollte sich der Leser doch diese Übertragung zur selbstverständlichen Gewohnheit machen.

In gleicher Weise kann jede Curve von einer gegebenen

Ordnung mittelst einer homogenen Function von demselben Grade in x_1, x_2, x_3 dargestellt werden; denn man erkennt leicht, daſs die Zahl der Glieder in der vollständigen Gleichung n^{ten} Grades zwischen zwei Unbekannten übereinstimmt mit der Zahl der Glieder in der homogenen Gleichung n^{ten} Grades zwischen drei Veränderlichen. Diese beiden Gleichungen sind gleich fähig, irgend eine besondere Curve darzustellen, da sie dieselbe Zahl von Constanten enthalten.

319. **Tangente.** Da die Coordinatenwerte irgend eines in der Verbindungsgeraden von x_i' und x_i'' liegenden Punktes von der Form $lx_i' + mx_i''$ sind (§ 69), so können die Punkte, in welchen jene Gerade irgend eine Curve schneidet, dadurch bestimmt werden, daſs man diese Werte an Stelle der Veränderlichen in ihre Gleichung substituirt und die aus der resultirenden Gleichung entspringenden Werte des Verhältnisses $l:m$ ermittelt.

So werden (vgl. § 160) die Schnittpunkte jener Geraden mit dem Kegelschnitt $S=0$ durch die quadratische Gleichung[103])

$$\begin{aligned}l^2(a_{11}x_1'^2+a_{22}x_2'^2+a_{33}x_3'^2+2a_{23}x_2'x_3'+2a_{31}x_3'x_1'+2a_{12}x_1'x_2')\\+2lm\,\{a_{11}x_1'x_1''+a_{22}x_2'x_2''+a_{33}x_3'x_3''+a_{23}(x_2'x_3''+x_2''x_3')\\+a_{31}(x_3'x_1''+x_3''x_1')+a_{12}(x_1'x_2''+x_1''x_2')\}+m^2(a_{11}x_1''^2+a_{22}x_2''^2\\+a_{33}x_3''^2+2a_{23}x_2''x_3''+2a_{31}x_3''x_1''+2a_{12}x_1''x_2'')=0\end{aligned}$$

bestimmt, die wir mit leicht verständlichen Abkürzungen in der Form schreiben wollen

$$l^2S'+2lmP+m^2S''=0.$$

Wenn der Punkt x_i' in der Curve liegt, so verschwindet S', und die quadratische Gleichung reducirt sich auf eine lineare. Ihre Auflösung für $l:m=-S'':2P$ gibt für die Coordinaten des Punktes, in welchem der Kegelschnitt durch die Gerade von einem seiner Punkte x_i' nach einem willkürlich auſser ihm gewählten Punkte x_i'' geschnitten wird, die Werte $S''x_i'-2Px_i''$. Dieselben reduciren sich auf x_i', sobald $P=0$ ist. Wenn also die Coordinaten x_i'' die Gleichung

$$\begin{aligned}P\equiv a_{11}x_1x_1'+a_{22}x_2x_2'+a_{33}x_3x_3'\\+a_{23}(x_2x_3'+x_2'x_3)+a_{31}(x_3x_1'+x_3'x_1)+a_{12}(x_1x_2'+x_1'x_2)=0\end{aligned}$$

erfüllen, so schneidet die Verbindungsgerade der Punkte x_i' und x_i'' die Curve in zwei in x_i' zusammenfallenden Punkten, oder mit andern Worten, der Punkt x_i'' liegt in der Tangente des Kegelschnittes im Punkte x_i'. Somit ist $P=0$ *die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes.*

320. **Polare.** Auf Grund der vollständigen Symmetrie der betrachteten Gleichung nach den Gröfsen x_i und x_i' erkennen wir (§ 155), dafs diese Gleichung *die Polare des Punktes* x_i darstellt, sobald derselbe *nicht* in der Curve liegt. Wir können den nämlichen Schlufs aus der Bemerkung (§ 160) begründen, dafs $P=0$ die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Verbindungsgerade der Punkte x_i' und x_i'' durch die Curve harmonisch geteilt wird.

Die Gleichung der Polare des Punktes x_i' kann in der Form

$$x_1'(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+x_2'(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)$$
$$+x_3'(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)=0$$

geschrieben werden. Der in derselben auftretende trinomische Factor von x_i' ist aber je die Hälfte des nach x_i genommenen Differentialquotienten der Gleichung des Kegelschnittes, welche Hälfte wir abkürzend durch S_i bezeichnen wollen. So geht sie über in

$$P\equiv \Sigma x_i' S_i = x_1'S_1+x_2'S_2+x_3'S_3=0.$$

Insbesondere ist für $x_2'=0$, $x_3'=0$ die Polare des Fundamentalpunktes A_1 durch $S_1=0$ dargestellt*); die Gleichung der Polare des Fundamentalpunktes A_i wird gebildet, indem man den nach x_i genommenen Differentialquotienten S_i der Gleichung des Kegelschnittes gleich Null setzt.

Da die Gleichung der Polare bei der Vertauschung der x_i mit den x_i' ungeändert bleibt, so kann sie auch in der Form geschrieben werden

$$P\equiv \Sigma x_i S_i' = x_1S_1'+x_2S_2'+x_3S_3'=0.$$

*) Die Darstellung von $S=0$ in der Form

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)x_2^2+2(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})x_2x_3$$
$$+(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)x_3^2=0,$$

in der die letzten drei Glieder durch ihr Verschwinden zwei Gerade durch A_1 darstellen, gibt auch (§ 274) $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$ als die Polare von A_1 und begründet damit das Folgende ihrerseits.

Diese Vertauschbarkeit der x_i und x_i' begründet aber die Sätze des § 157. Wir können die S_i' geradezu als die Coordinaten der Polare von x_i' nehmen.

B. 1) Perspectivische Lage der polar-conjugirten Dreiecke. Dem Fundamentaldreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ist polar-conjugirt das Dreieck $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken sind $a_{23} S_1 = a_{31} S_2 = a_{12} S_3$, die Schnittpunkte entsprechender Seiten $A_{23} \Sigma_1 = A_{31} \Sigma_2 = A_{12} \Sigma_3$ (§ 64, 4).

2) Ein Polardreieck x_i', x_i'', x_i''' ist bestimmt durch x_1', x_2', x_3'; x_1'', x_2'', x_3'' (§ 159) vermöge $x_3'' S_3' = - x_1'' S_1' - x_2'' S_2'$ und

$$x_1''' : x_2''' : x_3'''$$
$$= (S_2' S_3'' - S_2'' S_3') : (S_3' S_1'' - S_3'' S_1') : (S_1' S_2'' - S_1'' S_2').$$

321. **Discriminante.** Wenn eine Curve zweiter Ordnung in ein Linienpaar degenerirt, so geht die Polare eines jeden Punktes ihrer Ebene durch den Schnittpunkt der beiden Geraden. Aus der Formel des letzten § geht auch hervor, dafs die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf das Linienpaar $x_1 x_2 = 0$ durch $x_2' x_1 + x_2 x_1' = 0$ dargestellt wird, die bezüglich desselben harmonisch conjugirte Gerade zu der Verbindungslinie $x_1' x_1 - x_2 x_1' = 0$ des Schnittpunktes von $x_1 = x_2 = 0$ mit dem gegebenen Punkte. Wenn daher die allgemeine Gleichung $S = 0$ ein Linienpaar darstellt, so sind die Polaren der Fundamentalpunkte $1|0|0$, $0|1|0$, $0|0|1$ bez. $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ oder

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0, \quad a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0,$$
$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 = 0,$$

drei Gerade durch einen Punkt. Indem wir wie in § 32 die Bedingung dafür durch die Elimination von x_1, x_2, x_3 zwischen diesen Gleichungen ausdrücken, erhalten wir die früher durch andere Methoden gefundene Coefficientenrelation, welche erfüllt sein mufs, damit die allgemeine Gleichung zweiten Grades ein Linienpaar darstelle.

In der Form einer symmetrischen Determinante der a_{ik}, entwickelt wie in §§ 59, 163, ergibt sich die Discriminante D und die Bedingung des Zerfallens $\mathsf{D} = 0$. Auch im Folgenden werden wir die Unterdeterminanten von D stets mit A_{ik} be-

zeichnen. Es sei erinnert, dafs dann die aus den A_{ik} gegebildete symmetrische Determinante den Wert $\mathbf{D}^2$ und ihre Unterdeterminanten $\mathbf{A}_{ik}$ die Werte $\mathbf{D}a_{ik}$ erhalten. Die Coordinaten des Doppelpunktes des Linienpaares $S=0$ lauten dann

$$x_1' : x_2' : x_3' = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

322. **Tangentialgleichung.** Die Auflösung linearer Gleichungen wenden wir ferner an auf die Frage nach der *Bestimmung der Coordinaten des Poles einer Geraden* ξ_i oder $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $S = 0$. Sind x_i' die gesuchten Coordinaten, so gelten die drei linearen Gleichungen

$$S_1' = \xi_1, \quad S_2' = \xi_2, \quad S_3' = \xi_3.$$

Indem wir sie für x_i' auflösen, erhalten wir nach der soeben festgesetzten Bezeichnung der Discrimante

$$\mathbf{D}x_1' = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3,$$
$$\mathbf{D}x_2' = A_{12}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3,$$
$$\mathbf{D}x_3' = A_{13}\xi_1 + A_{23}\xi_2 + A_{33}\xi_3.$$

Die Coordinaten des Poles sind also stets reell, so lange die Gerade es ist, und umgekehrt.

Da insbesondere der Pol einer Tangente des Kegelschnittes ihr Berührungspunkt, also ein Punkt dieser Tangente selbst ist, so erhalten wir durch Einsetzen obiger Coordinatenwerte x_i an Stelle der Veränderlichen in die Gleichung der Geraden die Bedingung, unter welcher die Gerade ξ_i den durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt berührt, d. h. in der Form

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{13}\xi_3\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 = 0,$$

die Gleichung $\Sigma = 0$ *des Kegelschnittes in Liniencoordinaten.*

Diese Entstehung der Tangentialgleichung kann auch dadurch ausgedrückt werden, dafs man sagt, sie sei das Resultat der Elimination von x_1', x_2', x_3' und ϱ zwischen den vier Gleichungen, denen die Coordinaten des Poles genügen müssen,

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = \varrho\xi_1, \quad a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = \varrho\xi_2,$$
$$a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' = \varrho\xi_3, \quad \xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' = 0.$$

Dann erhält man sie nach § 88 in der Form einer gleich Null gesetzten symmetrischen Determinante

$$-\Sigma \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die man als *die mit Liniencoordinaten gesäumte Discriminante* bezeichnen kann. Man findet auch für die Bedingung, unter welcher zwei Gerade ξ_i, ξ_i' sich auf dem Kegelschnitt schneiden, das Verschwinden der zweifach, nämlich mit den ξ_i und ξ_i' gesäumten Discriminante.

Im Folgenden soll immer $\Sigma = 0$ *die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten ausdrücken, dessen Gleichung in Punktcoordinaten* $S = 0$ ist.

Man sieht sofort, dafs die Coordinaten des Poles der Geraden ξ_i in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma = 0$ bis auf einen gemeinschaftlichen Factor durch die in Bezug auf die ξ_i gebildeten Differentialquotienten von Σ ausgedrückt sind, also entsprechend (§ 320) durch Σ_i bezeichnet werden. Nun befinden sich unter den Strahlen $\lambda\xi_i + \mu\xi_i$ eines Büschels Tangenten, wenn die Substitution dieser Binome in $\Sigma = 0$ die Gleichung für bestimmte Verhältnisse $\lambda : \mu$ befriedigt. Das Resultat kann man wiederum schreiben

$$\lambda^2\Sigma' + 2\lambda\mu\Pi + \mu^2\Sigma' = 0$$

wo $\Pi \equiv \xi_1\Sigma_1' + \xi_2\Sigma_2' + \xi_3\Sigma_3' \equiv \xi_1'\Sigma_1 + \xi_2'\Sigma_2 + \xi_3'\Sigma_3$

ist. Daher ist $\Pi = 0$ *die Gleichung des Poles von* ξ_i' *in Liniencoordinaten* oder überhaupt *die Bedingung, damit zwei Gerade* ξ_i, ξ_i' *in Bezug auf* $\Sigma = 0$ *conjugirte Polaren sind.*

B. 1) Man soll die Coordinaten des Poles der Geraden ξ_i in Bezug auf den Kegelschnitt $(a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ (§ 316) bestimmen. In diesem Falle ist nach dem a. O. die Tangentialgleichung

$$a_1\xi_2\xi_3 + a_2\xi_3\xi_1 + a_3\xi_1\xi_2 = 0;$$

die Coordinaten des Poles sind also

$$x_1' = a_2\xi_3 + a_3\xi_2, \quad x_2' = a_3\xi_1 + a_1\xi_3, \quad x_3' = a_1\xi_2 + a_2\xi_1.$$

2) Den Ort des Poles der Geraden ξ_i in Bezug auf einen Kegelschnitt zu bestimmen, für welchen drei Tangenten und eine andere Bedingung gegeben sind.[104])

Wenn wir die vorhergehenden Gleichungen für a_1, a_2, a_3 auflösen, so finden wir a_1, a_2, a_3 den Gröſsen $\xi_1(\xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' - \xi_1 x_1')$, $\xi_2(\xi_3 x_3' + \xi_1 x_1' - \xi_2 x_2')$, $\xi_3(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' - \xi_3 x_3')$ proportional.

Die Gleichung bezeichnet aber einen Kegelschnitt, der die drei Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berührt; eine vierte Bedingung, welcher der Kegelschnitt genügen muſs, begründet eine weitere Relation zwischen a_1, a_2, a_3, aus welcher durch Einsetzen der eben angegebenen Werte die Gleichung des Ortes hervorgeht, den der Pol von ξ_i beschreibt. Schreiben wir für ξ_i die Seitenlängen l_i des Fundamentaldreiecks, so erhalten wir in derselben Gleichung den Ort des Centrums. So schlieſsen wir aus dem Nachweis, daſs der Kegelschnitt die Gerade ξ_i' berührt, wenn $\Sigma(a_i : \xi_i') = 0$, daſs der Ort des Pols der Geraden ξ_i in Bezug auf den die *vier* Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $\Sigma \xi_i' x_i = 0$ berührenden Kegelschnitt die durch

$$\frac{\xi_1(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1)}{\xi_1'} + \frac{\xi_2(\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)}{\xi_2'} + \frac{\xi_3(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3)}{\xi_3'} = 0$$

dargestellte Gerade ist. (§ 317, 1 speciell für den Fall des Centrums.)

Oder, weil der Kegelschnitt durch den Punkt x_i' geht, wenn die Bedingung $\Sigma\sqrt{(a_i x_i')} = 0$ erfüllt ist, so ist der Ort des Poles der Geraden ξ_i in Bezug auf die Kegelschnitte, welche die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren und den Punkt x_i' enthalten, durch

$$\{\xi_1 x_1' (\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1)\}^{\frac{1}{2}} + \{\xi_2 x_2' (\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)\}^{\frac{1}{2}} + \{\xi_3 x_3' (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3)\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

ausgedrückt. Dieser Ort ist also ein Kegelschnitt, welcher die Geraden $\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1 = 0$, $\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 = 0$, $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 = 0$ berührt. Wenn man den Ort des Centrums sucht, d. h. die ξ_i durch die l_i ersetzt, so sind diese Geraden die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Seiten des von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gebildeten Dreiecks.

3) Man soll die Coordinaten des Pols der Geraden ξ_i in Bezug auf den durch die Fundamentalpunkte gehenden Kegelschnitt $a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2 = 0$ bestimmen.

Nach § 315, 6 ist die Tangentialgleichung

$$a_{23}^2 \xi_1^2 + a_{31}^2 \xi_2^2 + a_{12}^2 \xi_3^2 - 2a_{31}a_{12}\xi_2\xi_3 - 2a_{12}a_{23}\xi_3\xi_1 - 2a_{23}a_{13}\xi_1\xi_2 = 0;$$

die Coordinaten des Poles sind daher

$$x_1' = a_{23}(a_{23}\xi_1 - a_{31}\xi_2 - a_{12}\xi_3), \quad x_2' = a_{31}(a_{31}\xi_2 - a_{12}\xi_3 - a_{23}\xi_1),$$
$$x_3' = a_{12}(a_{12}\xi_3 - a_{23}\xi_1 - a_{31}\xi_2).$$

Man hat also $a_{31}x_3' + a_{12}x_2' = -2a_{23}a_{13}a_{12}\xi_1$, und ebenso $a_{12}x_1' + a_{23}x_3' = -2a_{23}a_{13}a_{12}\xi_2$, $a_{23}x_2' + a_{13}x_1' = -2a_{23}a_{13}a_{12}\xi_3$, und findet wie in 2) a_{23}, a_{31}, a_{12} bez. proportional zu

$$x_1'(\xi_2x_2' + \xi_3x_3' - \xi_1x_1'),\quad x_2'(\xi_3x_3' + \xi_1x_1' - \xi_2x_2'),\quad x_3'(\xi_1x_1' + \xi_2x_2' - \xi_3x_3').$$

Da nun die Bedingung, unter welcher ein dem Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ umgeschriebener Kegelschnitt durch einen vierten Punkt x_i hindurchgeht, durch $\frac{a_{23}}{x_1'} + \frac{a_{13}}{x_2'} + \frac{a_{12}}{x_3'} = 0$ dargestellt ist, so ist der Ort des Poles von ξ_i in Bezug auf einen durch vier Punkte gehenden Kegelschnitt

$$\frac{x_1}{x_1'}(\xi_2x_2 + \xi_3x_3 - \xi_1x_1) + \frac{x_2}{x_2'}(\xi_3x_3 + \xi_1x_1 - \xi_2x_2) + \frac{x_3}{x_3'}(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 - \xi_3x_3) = 0.$$

Für den Ort des Centrums ergibt sich daraus ein durch die Seitenmitten des Fundamentaldreiecks gehender Kegelschnitt (§ 298, 10).

Die Bedingung, unter welcher der Kegelschnitt eine Gerade berührt, liefert den Ort des Poles der Geraden ξ_i in Bezug auf einen durch die drei Fundamentalpunkte gehenden und jene Gerade berührenden Kegelschnitt, als

$$\{a_1x_1(\xi_2x_2 + \xi_3x_3 - \xi_1x_1)\}^{\frac{1}{2}} + \{a_2x_2(\xi_3x_3 + \xi_1x_1 - \xi_2x_2)\}^{\frac{1}{2}} + \{a_3x_3(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 - \xi_3x_3)\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dieser Ort ist im allgemeinen eine Curve vierter Ordnung.[105])

4) Man beweise folgende Sätze: Wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so liegen die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten mit den Polen der Berührungssehnen in einer Geraden und bilden mit ihnen eine harmonische Gruppe (vgl. § 278).

Wenn drei Kegelschnitte zwei zu allen gemeinschaftliche Tangenten haben, so liegen die Schnittpunkte der übrigen, jedem Paare gemeinsamen Tangenten in einer Geraden. (Vgl. § 279.)

5) Wenn man von einem Punkte aus, welcher auf einer festen Geraden fortrückt, an eine Curve zweiten Grades die Tangenten zieht und zu diesen und der festen Geraden in jedem Falle einen vierten Strahl so bestimmt, dafs er mit jenen ein constantes Doppelverhältnis hat, so umhüllen alle Lagen desselben einen Kegelschnitt, der den gegebenen doppelt berührt.

Sind a und b die zwei Werte $\lambda : \mu$, welche in $\lambda\xi_i + \mu\xi_i'$ eingesetzt die Coordinaten der Tangenten liefern und ist das gegebene Doppelverhältnis durch d bezeichnet, so ist entweder $a : b = d$ oder $b : a = d$, so dafs $(a - bd)(b - ad) = 0$ oder $ab(1 + d^2) = (a^2 + b^2)d$, daher auch $ab(1 + d)^2 = (a + b)^2 d$ ist.

Setzt man für das Product und für die Summe der Wurzeln

ihre Werte aus $\lambda^2\Sigma + 2\lambda\mu\Pi + \mu_2\Sigma' = 0$, so ergibt sich als Gleichung der Enveloppe

$$\Sigma\Sigma'(1+d)^2 - 4d\Pi^2 = 0.$$

Denkt man ξ_i' als bekannt, so ist Σ' eine Constante und kann mit den übrigen Constanten zusammen in einem Zeichen ν vereinigt werden, so dafs dann $\Sigma + \nu\Pi^2 = 0$ die Gleichung der Enveloppe ist. Sie stellt ein System von Kegelschnitten dar, welche mit dem festen Kegelschnitt $\Sigma = 0$ eine doppelte Berührung haben, für die der Punkt $\Pi = 0$ der Pol der Berührungssehne ist. (Vgl. § 275.)

6) Man soll ein Polygon construiren, welches einem festen Kegelschnitt umgeschrieben ist und dessen Ecken in gegebenen Geraden liegen. (Vgl. § 311.)

323. **Unbestimmtheit polarer Zuordnung.** Die vorige Untersuchung wird hinfällig, wenn es eintritt, dafs die *eindeutige* Zuordnung des Pols zu einer gegebenen Polare eine Ausnahme erleidet. Es entspringt so die Frage: *Wann hat in Bezug auf einen Kegelschnitt eine Gerade unendlich viele Pole?*

Eine Unbestimmtheit des Pols ist offenbar an die Bedingung $\mathbf{D} = 0$ geknüpft. Die im allgemeinen zur Bestimmung dienenden Gleichungen werden jetzt zu Bedingungen

$$\Sigma A_{1k}\xi_k = 0, \quad \Sigma A_{2k}\xi_k = 0, \quad \Sigma A_{3k}\xi_k = 0,$$

welche von der Polare erfüllt werden müssen, damit ihr unendlich viele Pole entsprechen.

Anderseits kann aber $\mathbf{D} = 0$ als das Resultat der Elimination von drei unbekannten Gröfsen z_1, z_2, z_3 zwischen drei linearen Gleichungen $\Sigma a_{ik} z_k = 0$ oder

$$S_1' = 0, \quad S_2' = 0, \quad S_3' = 0$$

angesehen werden. Dann ist aber $\Sigma x_i S_i'$ identisch Null für den Punkt z_i, d. h. *es existirt ein Punkt z_i, dessen Polare völlig unbestimmt ist.* Seine Coordinaten ergeben sich in drei Formen $z_1 : z_2 : z_3 = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3}$. Alsdann hat man auch

$$z_1^2 : z_1 z_2 : z_1 z_3 = A_{11} : A_{12} : A_{13},$$

$$z_1 z_2 : z_2^2 : z_2 z_3 = A_{21} : A_{22} : A_{23}, \quad z_1 z_3 : z_2 z_3 : z_3^2 = A_{31} : A_{32} : A_{33}.$$

Für $\mathbf{D} = 0$ sind also die adjungirten Elemente den Quadraten und Producten von drei Gröfsen proportional

$$A_{ik} = m z_i z_k.$$

Substituirt man nun diese Werte in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen, so gehen sie über in

$$0 = z_1 \Sigma \xi_i z_i = z_2 \Sigma \xi_i z_i = z_3 \Sigma \xi_i z_i, \text{ d. h. } \Sigma \xi_i z_i = 0.$$

Also haben nur solche Gerade als Polaren unendlich viele Pole, welche durch den ausgezeichneten Punkt z_i gehen. Aber dieser ist selbst ein Punkt des Kegelschnittes, denn die Substitution der z_i in $S = 0$ gibt das Polynom $\Sigma a_{ik} A_{ik}$, dessen Wert im allgemeinen $3D$ (§ 86), hier also Null ist.

Verbinden wir ferner z_i mit einem beliebigen Punkte x_i des Kegelschnittes durch eine Gerade, so erweist sich diese als ein Teil desselben. Denn die Substitution $lz_i + mx_i$ für z_i in $S = 0$ liefert die Gleichung $l^2 S' + 2lmP + m^2 S = 0$. Diese ist aber identisch erfüllt, d. h. läſst $l:m$ völlig unbestimmt, weil sowol $S = 0$, $S' = 0$ als auch $P = 0$ ist nach den Voraussetzungen. Somit besteht der singuläre Kegelschnitt aus zwei Geraden, die sich im Punkt z_i schneiden.

Endlich erfüllen die unendlich vielen Pole einer durch z_i gehenden Geraden ebenfalls eine Gerade durch z_i. Denn ist $\Sigma \xi_i S_i = 0$ die Gleichung eines Poles x_i von ξ_i, so ist auch $lz_i + mx_i$ ein solcher, weil identisch $\Sigma \xi_i S_i' = 0$ ist.

Die Geraden, in die der Kegelschnitt zerfällt, werden bestimmt, wie folgt. Sind ihre Coordinaten a_i, b_i, d. h. ist $S \equiv a_x . b_x$, so ist

$$a_{ik} = \tfrac{1}{2}(a_i b_k + a_k b_i), \quad A_{ik} = \tfrac{1}{4}(a_i b_j - a_j b_i)(a_k b_j - a_j b_k) = m z_i z_k.$$

Anderseits kann aber für den Schnittpunkt $a_x = 0$, $b_x = 0$

$$z_i = \tfrac{1}{2}(a_i b_k - a_k b_i), \text{ also } m = -1$$

gesetzt werden. Dann besteht das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} a_1 b_1 = a_{11}\;\;, & a_2 b_1 = a_{12} - z_3, & a_3 b_1 = a_{13} + z_2, \\ a_1 b_2 = a_{12} + z_3, & a_2 b_2 = a_{22}\;\;, & a_3 b_2 = a_{23} - z_3, \\ a_1 b_3 = a_{13} - z_2, & a_2 b_3 = a_{23} + z_1, & a_3 b_3 = a_{33}. \end{array}$$

Zugleich ergibt sich für die Bestimmung der Coordinaten ξ_i' einer Polare zu einem gegebenen Pol x_i'

$$S_i' = b_i \Sigma a_k x_k' + a_i \Sigma b_k x_k' \quad \text{oder} \quad \xi_i' = b_i a_{x'} + a_i b_{x'}.$$

Derselbe Gang der Untersuchung beleuchtet den dualen Ausnahmefall der zerfallenden Curven zweiter Classe. *In Bezug*

auf ein Punktepaar gehört zu jedem Punkte ihrer Verbindungsgeraden ξ_i' als Pol eine unbestimmte Polare, deren verschiedene Lagen einen zweiten Punkt derselben Geraden ξ_i umhüllen. Dieser Geraden selbst entspricht ein in der Ebene völlig willkürlicher Pol.

324. **Rückübergang von Σ zu S.** Offenbar können wir den Übergang des § 322 von der Ortsgleichung $S = 0$ zur Tangentialgleichung $\Sigma = 0$ auch umkehren, indem wir die Betrachtung dualistisch durchführen. *Also repräsentirt eine Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten einen Kegelschnitt, dessen Ortsgleichung erhalten wird, indem man die Discriminante der gegebenen mit den x_i „säumt“.*

Das Resultat ist aber mit umgekehrtem Zeichen

$$\Sigma \mathbf{A}_{ik} x_i x_k \equiv \mathbf{D} \Sigma a_{ik} x_i x_k \equiv \mathbf{D} \,.\, S = 0.$$

Also ist der ausgesprochene Satz nur so lange richtig, als $\mathbf{D}$ von Null verschieden ist. Dies bedeutet: *Nur nicht-zerfallende Curven zweiter Ordnung sind auch von der zweiten Classe und umgekehrt.* Das Linienpaar ist in der Tat von der ersten Classe, das Punktepaar von der ersten Ordnung (§ 292).

Dagegen ist unter der Voraussetzung $\mathbf{D} = 0$ auch $\mathbf{A}_{ik} = 0$, insbesondere

$$A_{ii} A_{kk} - A_{ik}^2 = 0, \text{ also } A_{ik} = \sqrt{A_{ii}} \,.\, \sqrt{A_{kk}}.$$

Daher ist die Tangentialgleichung eines Linienpaares

$$-\Sigma \equiv (\xi_1 \sqrt{A_{11}} + \xi_2 \sqrt{A_{22}} + \xi_3 \sqrt{A_{33}})^2 = 0$$

das Quadrat der Gleichung seines Doppelpunktes. Multipliciren wir nämlich $-\Sigma$ mit A_{ii}, so entsteht die Gleichung

$$(A_{i1} \xi_1 + A_{i2} \xi_2 + A_{i3} \xi_3)^2 = 0.$$

Ebenso geht die Enveloppengleichung eines Punktepaares dualistisch in das Quadrat der Ortsgleichung seines Trägers über.

B. Wenn ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte geht, und mit einem festen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, so geht die Berührungssehne desselben mit diesem letzteren stets durch einen festen Punkt (§ 278).

Denn, wenn $S = 0$ den festen und $S = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2$ den anderen Kegelschnitt darstellt, so liefert die Substitution der Coordinaten der beiden gegebenen Punkte

$$S' = (\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^2, \qquad S'' = (\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'')^2,$$

also auch

$$(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')\sqrt{S''} = \pm (\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'')\sqrt{S'}.$$

Diese Gleichung drückt aber aus, dafs die Sehne ξ_i durch einen oder den andern von zwei festen Punkten geht, weil S', S'' bekannte Constanten sind.

325. **Allgemeine Parametermethode.** Betrachten wir den Kegelschnitt als Erzeugnis projectivischer Büschel, so kann man diese, falls sie nicht perspectivisch sind, immer so gegeben denken, dafs die Gleichungen lauten (§ 302)

$$a_x + k b_x = 0, \quad b_x + k c_x = 0.$$

Die Gleichung des Erzeugnisses ist dann

$$a_x \,.\, c_x - b_x^2 = 0,$$

wo $a_x = 0$, $c_x = 0$ die Tangenten in den Endpunkten der Sehne $b_x = 0$ sind. Eliminirt man aus den Büschelgleichungen mittelst $\xi_x = 0$ die Coordinaten x_i, so erhält man zur Bestimmung derjenigen Werte von k, welche den beiden Schnittpunkten der Geraden ξ_i mit der Curve entsprechen, die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \;, & \xi_2 \;, & \xi_3 \\ a_1 + k b_1, & a_2 + k b_2, & a_3 + k b_3 \\ b_1 + k c_1, & b_2 + k c_2, & b_3 + k c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir bezeichnen nun das System der adjungirten Elemente der nach der Voraussetzung nicht verschwindenden Determinante

$$r = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} = r^2.$$

Dann ist die Entwickelung des Eliminationsresultates

$$C_\xi + k B_\xi + k^2 A_\xi = 0,$$

falls die linearen Symbole gebraucht werden

$$A_\xi = \Sigma A_i \xi_i, \quad B_\xi = \Sigma B_i \xi_i, \quad C_\xi = \Sigma C_i \xi_i.$$

Dabei definiren $A_\xi = 0$, $C_\xi = 0$ die Berührungspunkte der Tangenten $c_x = 0$, $a_x = 0$, und $B_\xi = 0$ deren Schnittpunkt.

Soll nun die Gerade ξ_i eine Tangente der Curve sein, so mufs die Gleichung für k gleiche Wurzeln haben:

$$4 A_\xi \,.\, C_\xi - B_\xi^2 = 0.$$

Diese Tangentialgleichung der Curve kann wiederum angesehen werden als das Eliminationsresultat von k aus

$$B_\xi - 2kA_\xi = 0, \quad C_\xi - 2kB_\xi = 0.$$

Diese Gleichungen stellen aber projectivische Reihen in den Tangenten $a_x = 0$, $c_x = 0$ dar. Sie sind auch zu den Büscheln projectivisch, und zwar entsprechen den Tangenten ihre Berührungspunkte $C_\xi = 0$, $A_\xi = 0$ für $k = 0$, $k = \infty$ bez.[106])

Demnach ist das Erzeugnis zweiter Ordnung zweier projectivischer Strahlbüschel auch ein Erzeugnis zweiter Classe zweier projectivischer Punktreihen (vgl. § 291 f.).

Aber diese Erzeugung liefert unmittelbar auch *die allgemeinste Parametermethode.* Denn nach § 303 können wir je zwei homogene Parameter einführen mittelst der Definitionen

$$\nu a_x = \lambda^2 = \nu' C_\xi, \quad \nu b_x = \lambda\mu = -\frac{\nu'}{2} B_\xi, \quad \nu c_x = \mu^2 = \nu' A_\xi.$$

Durch Auflösung ergeben sich aus denselben

$$\nu r x_i = A_i \lambda^2 + B_i \lambda\mu + C_i \mu^2,$$
$$\nu' r \xi_i = a_i \mu^2 - 2b_i \lambda\mu + c_i \lambda^2.$$

Diese x_i, ξ sind aber vollkommen allgemeine quadratische Functionen der Parameter λ, μ. *Daher stellen umgekehrt drei quadratische Formen zweier unabhängiger Variabeln, deren Werte als Punkt- oder Liniencoordinaten interpretirt werden, Punkte oder Tangenten einer Curve zweiten Grades dar.*[106])

Die obigen Definitionen, deren kleine Unterschiede zu beachten sind, sind so gewählt, dafs *dieselben Parameterwerte je Punkt und zugehörige Tangente* characterisiren. Man überzeugt sich leicht, dafs infolge der Determinanteneigenschaften $\Sigma \xi_i x_i$ bei Einsetzung der Parameterausdrücke identisch verschwindet.

B. 1) Dafs eine Gerade ξ_i unter der Bedingung $\Sigma' = 0$ einen Kegelschnitt umhüllt, kann auch so gezeigt werden. Die Elimination von ξ_3 zwischen $\Sigma = 0$ und $\xi_x = 0$ gibt

$$(A_{11}x_3^2 - 2A_{13}x_1x_3 + A_{33}x_1^2)\xi_1^2 + (A_{22}x_3^2 - 2A_{23}x_2x_3 + A_{33}x_2^2)\xi_2^2$$
$$+ 2(A_{12}x_3^2 - A_{13}x_1x_3 - A_{23}x_2x_3 + A_{33}x_1x_2)\xi_1\xi_2 = 0.$$

Bildet man für die Unbestimmte $\xi_1 : \xi_2$ die Enveloppe nach § 303, so erhält man $x_3^2 \Sigma \mathsf{A}_{ik} x_i x_k = 0$. So sind als specielle Fälle auch die Enveloppen §§ 312, 316, 317 aus den Ortsgleichungen abzuleiten.

2) Man bestimme die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher mit zwei Kegelschnitten $S' = 0$, $S'' = 0$ je eine doppelte Berührung hat.

Bezeichnen wir durch $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ ein Paar der Schnittsehnen von $S' = 0$, $S'' = 0$, so dafs $S' - S'' = z_1 z_2$ ist, so repräsentirt $\mu^2 z_1^2 - 2\mu(S' + S'') + z_2^2 = 0$ einen Kegelschnitt, der mit $S' = 0$, $S'' = 0$ eine doppelte Berührung hat. Denn diese Gleichung hat die beiden äquivalenten Formen

$$(\mu z_1 + z_2)^2 = 4\mu S', \quad (\mu z_1 - z_2)^2 = 4\mu S''.$$

Die Berührungssehnen bilden mit den Schnittsehnen ein harmonisches Büschel.

Da die Gleichung in μ vom zweiten Grade ist, so gehen durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte des Systems, und weil überdies drei Paare von Schnittsehnen z der beiden Kegelschnitte existiren, so gibt es drei solche Systeme umgeschriebener Kegelschnitte. Ihre Anzahl reducirt sich auf zwei, wenn der Kegelschnitt $S'' = 0$ in ein Paar von Geraden degenerirt, weil dann nur zwei von diesen verschiedene Paare von Schnittsehnen existiren. Wenn endlich sowohl $S' = 0$ als auch $S'' = 0$ in Linienpaare degeneriren, so gibt es, wie bekannt, nur *ein* System doppelt berührender Kegelschnitte. (Vgl. § 274.)

3) Die Gleichung eines Kegelschnittes, der vier Gerade $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ berührt, lautet, falls $y_1 y_3 - y_2 y_4 = z_1 z_2$ die Gleichung der Diagonalen des Vierseits ist,

$$\mu^2 z_1^2 - 2\mu(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 = 0.$$

Setzt man nach einander die y_i gleich Null, so erhält man die Berührungspunkte der Seiten und sieht, dafs ihre Verbindungslinien mit den Diagonalen ein harmonisches Büschel bilden (vgl. 2). Ein durch diese Berührungspunkte gehender Kegelschnitt hat eine Gleichung von der Form

$$\mu^2 z_1^2 - 2\mu(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 + \lambda(\mu^2 z_1^2 - z_2^2) = 0,$$

und die den Werten μ' und λ' entsprechende Gleichung wird mit dieser identisch für $\lambda = -\lambda' = (\mu' - \mu) : (\mu' + \mu)$.

Hiernach existirt ein durch die acht Berührungspunkte von zwei solchen eingeschriebenen Kegelschnitten gehender Kegelschnitt, der die Gleichung hat

$$\mu\mu' z_1^2 - (\mu + \mu')(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 = 0.$$

Man kann ähnliche Ergebnisse bei 2) erhalten.

Wenn man das Diagonalendreieck des Vierseits zum Fundamentaldreieck $x_1 x_2 x_3 = 0$ wählt, so dafs $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$ die

Seiten des Vierseits bezeichnen, so erhält man die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnittes in der mehr symmetrischen Form

$$\mu^2 x_1^2 - \mu(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + x_2^2 = 0.$$

Dieser Kegelschnitt berührt stets die Enveloppe

$$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)^2 = 4 x_1^2 x_3^2 \qquad \text{oder}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - x_3) = 0.$$

Die Gleichung kann endlich in der Form geschrieben werden

$$x_3^2 = \frac{x_1^2}{\cos^2\varphi} + \frac{x_2^2}{\sin^2\varphi} \quad \text{(vgl. 312).}$$

4) Die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher mit zwei Kreisen $C' = 0$, $C'' = 0$ je eine doppelte Berührung hat,[107]) nimmt eine einfachere Form an, nämlich

$$\mu^2 - 2\mu(C' + C'') + (C' - C'')^2 = 0.$$

Die Berührungssehnen des Kegelschnittes mit den beiden Kreisen sind durch $C' - C'' + \mu = 0$, $C' - C'' - \mu = 0$ dargestellt und daher parallel zu einander und gleich entfernt von der Radicalaxe der Kreise. Da man die Gleichung dieses doppelt berührenden Kegelschnittes auch in der Form

$$\sqrt{C'} + \sqrt{C''} = \sqrt{\mu}$$

schreiben kann, so ist er der Ort eines Punktes, für welchen die Summe oder Differenz der Tangenten zu zwei gegebenen Kreisen constant ist. Denken wir beide Kreise als unendlich klein, so erhalten wir die Eigenschaft der Brennpunkte des Kegelschnittes rücksichtlich der Summe und Differenz der Vectoren. Nehmen wir μ dem Quadrate des Abschnittes gleich, welcher zwischen den beiden Kreisen auf einer ihrer gemeinschaftlichen Tangenten liegt, so bezeichnet die Gleichung ein Paar der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise (§ 140).

5) Nach dieser Methode sind die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise in

$$\S\ 129,1) \quad \sqrt{C'} + \sqrt{C''} = 4 \ \text{oder} = 2.$$

$$\S\ 130,1) \quad \sqrt{C'} + \sqrt{C''} = 1 \ \text{oder} = (-79)^{\frac{1}{2}}.$$

6) Drei Kreise sind gegeben durch $C' = 0$, $C'' = 0$, $C''' = 0$; sind dann $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ die gemeinschaftlichen Tangenten zu $C'' = 0$, $C''' = 0$; ebenso $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ die zu $C''' = 0$, $C' = 0$, und $x_3 = 0$, $y_3 = 0$ die zu $C' = 0$, $C'' = 0$; gehen ferner $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ durch einen Punkt, so gehen auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ durch einen Punkt.

Denn sind die Gleichungen der Paare gemeinsamer Tangenten

$$\sqrt{C''} + \sqrt{C'''} = t', \quad \sqrt{C'''} + \sqrt{C'} = t'', \quad \sqrt{C'} + \sqrt{C''} = t''',$$

so ist die Bedingung, unter welcher $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sich in einem Punkte schneiden, $t' + t'' = t'''$, und man sieht, dafs mit der Erfüllung dieser Bedingung auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sich in einem Punkte schneiden müssen.

7) Daran knüpft sich die Lösung des *Problems von Malfatti*: *Drei Kreise zu bestimmen, die einander berühren, und deren jeder zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks zu Tangenten hat.*

Steiner gab die Lösung: Man zeichne die eingeschriebenen Kreise der Dreiecke, welche von je einer Seite des gegebenen Dreiecks und den Halbirungslinien der anliegenden Winkel gebildet werden; da diese Kreise drei gemeinschaftliche Tangenten haben, die durch einen Punkt gehen, so gehen auch ihre zugehörigen andern gemeinschaftlichen Tangenten durch einen Punkt. Diese sind die gemeinschaftlichen Tangenten der gesuchten Kreise.[108])

8) Der Satz von 7) läfst sich auf Kegelschnitte übertragen, welche einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren.

Drei Kegelschnitte $S - z_1^2 = 0$, $S - z_2^2 = 0$, $S - z_3^2 = 0$, die einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, werden von drei gemeinschaftlichen Sehnen, die ein Dreieck bilden, wie $z_1 + z_2 = 0$, $z_2 + z_3 = 0$, $z_3 + z_1 = 0$ in sechs Punkten geschnitten, die auf einem Kegelschnitt liegen. Denn es ist

$$S + z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = (S - z_1^2) + (z_1 + z_2)(z_1 + z_3).$$

Liegen also von jenen Punkten drei in einer Geraden, so liegen die andern gleichfalls in einer Geraden. Die Interpretation der Gleichungen in Liniencoordinaten gibt einen weiteren Satz. Mit Hilfe dieser Sätze kann das Malfatti'sche Problem und seine Lösung von den Kreisen auf Kegelschnitte übertragen werden, die mit einem gegebenen Kegelschnitt in doppelter Berührung sind.

9) Bei der allgemeinen Parametermethode sind die Gleichungen einer Tangente und ihres Berührungspunktes

$$\begin{vmatrix} x_1 & , \ldots \\ 2A_1\lambda + B_1\mu & , \ldots \\ B_1\lambda + 2C_1\mu, & \ldots \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & , \ldots \\ a_1\mu - b_1\lambda, & \ldots \\ b_1\mu - c_1\lambda, & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Man bilde die Gleichung der Verbindungslinie (des Schnittpunktes) von $\lambda : \mu$ mit $\lambda' : \mu'$ in Determinantenform; für benachbarte Parameterwerte bieten sich dann augenscheinliche Reductionen.

326. **Tangentenpaare.** Wenn x_i irgend ein Punkt in einer der von einem festen Punkte x_i' an eine Curve zweiten Grades gezogenen Tangenten ist, so hat die Gleichung

des § 319 zur Bestimmung von $l:m$ für die Schnittpunkte $lx_i' + mx_i$ notwendig gleiche Wurzeln. Um also die Gleichung der Tangenten zu finden, welche durch den Punkt x_i' gezogen werden können, substituiren wir $lx_i' + mx_i$ in die Gleichung der Curve und bilden die Discriminante der in $l:m$ quadratischen Gleichung. So erhält man (vgl. § 156) die Gleichung des Tangentenpaares an einen Kegelschnitt in der Form

$$SS' = P^2,$$

wo S, S' P dieselben Bedeutungen wie in § 319 haben. Aus demselben Grund repräsentirt $\Sigma\Sigma' = \Pi^2$ das Paar der Schnittpunkte einer Geraden ξ_i' mit der Curve $\Sigma = 0$.

Die Gleichung $SS' = P^2$ kann in einer andern Form geschrieben werden in Folge der Bemerkung, dafs jeder Punkt in einer durch x_i' gehenden Tangente offenbar die Eigenschaft besitzt, dafs die ihn mit x_i' verbindende Gerade die Curve berührt. Demnach haben wir nur die Coordinaten der Verbindungslinie von zwei Punkten x_i, x_i' (§ 69), nämlich

$$x_2x_3' - x_2'x_3, \quad x_3x_1' - x_3'x_1, \quad x_1x_2' - x_1'x_2$$

für ξ_1, ξ_2, ξ_3 in die Tangentialgleichung (§ 322) $\Sigma = 0$ zu substituiren. Unter Beachtung der Werte von A_{ik} bestätigt man wirklich die Relation $SS' - P^2 = C$, wo

$$C \equiv A_{11}(x_2x_3' - x_2'x_3)^2$$
$$+ \cdots + 2A_{23}(x_3x_1' - x_3'x_1)(x_1x_2' - x_2x_1') + \cdots = 0.$$

B. 1) Man soll durch Umformung und Entwickelung zeigen, dafs die Discriminante der Gleichung $SS' = P^2$ verschwindet.

2) Ort der Schnittpunkte der zu einander rechtwinkligen Tangenten eines Kegelschnittes. (Vgl. § 181, 5.) Die Gleichung des vom Punkte $x'|y'$ an den Kegelschnitt $S = 0$ gehenden Tangentenpaares ist

$$A_{11}(y - y')^2 + A_{22}(x - x')^2 + A_{33}(xy' - x'y)^2$$
$$- 2A_{23}(x - x')(xy' - x'y) + 2A_{13}(y - y')(xy' - x'y)$$
$$- 2A_{12}(x - x')(y - y') = 0.$$

Sie repräsentirt zwei zu einander rechtwinklige Gerade, wenn die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2 verschwindet, d. h. die Gleichung des fraglichen Ortes ist

$$A_{33}(x^2 + y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} = 0,$$

der Haupt- oder Directorkreis des Kegelschnittes. Für $A_{33} = 0$, d. h. für die Parabel, wird er zur geraden Directrix.

3) Die Directorkreise der Kegelschnitte einer Schaar mit vier gemeinsamen Tangenten bilden ein Büschel.

Denn als lineare Function der A_{ik} wird die Gleichung des Direktorkreises durch die Substitution von $A_{ik} + \lambda A_{ik}'$ für A_{ik} (§ 282) auf die Form $S + \lambda S' = 0$ gebracht. Ebenso für

$$A_{ik} + \lambda A_{ik}' + \lambda' A_{ik}'' \quad \text{auf} \quad S + \lambda S' + \lambda' S'' = 0, \text{ etc.}$$

Die Directorkreise eines Systems $\Sigma + \lambda \Sigma' + \lambda' \Sigma'' = 0$ bilden also ein Netz (§ 128). Es ist ein Specialfall hiervon, dafs die über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmesser beschriebenen Kreise eine gemeinsame Radicalaxe haben. Das umgeschriebene Vierseit der Schaar liefert sie für das Büschel der Directorkreise.[109])

327. **Carnot'scher Satz.** Als ein specieller Fall des Vorigen ergibt sich, dafs die von den Fundamentalpunkten $1|0|0$, $0|1|0$, $0|0|1$ ausgehenden Tangentenpaare des Kegelschnittes $S = 0$ bez. durch die Gleichungen

$$A_{22}x_3^2 - 2A_{23}x_2x_3 + A_{33}x_2^2 = 0, \quad A_{33}x_1^2 - 2A_{13}x_1x_3 + A_{11}x_3^2 = 0,$$
$$A_{11}x_2^2 - 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_1^2 = 0$$

dargestellt werden. Dies kann auch daraus erkannt werden, dafs man $S = 0$ in die Form (§ 320 Anm.)

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + (A_{33}x_2^2 + A_{22}x_3^3 - 2A_{23}x_2x_3) = 0$$

bringen kann. Wenn nun das durch den Punkt $1|0|0$ gehende Tangentenpaar durch die Gleichungen $x_2 - kx_3 = 0$, $x_2 - k'x_3 = 0$ ausgedrückt wird, so zeigen diese Gleichungen, dafs die Relation $kk' = A_{22} : A_{33}$ besteht, und dafs die entsprechenden Gröfsen für die übrigen beiden Tangentenpaare durch $A_{33} : A_{11}$, $A_{11} : A_{22}$ gegeben sind; das Product dieser drei Gröfsen ist aber gleich Eins. Indem wir an die Bedeutung von k (§ 62) erinnern, lernen wir daher, dafs für A_1, A_2, A_3 als die Ecken des Fundamentaldreiecks, D_3, D_1, D_2 als Schnittpunkte der von A_1, A_2; A_2, A_3; A_3, A_1 bez. ausgehenden Tangenten, d. h. *für ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Sechsseit* $A_1D_3A_2D_1A_3D_2$ *die characteristische Relation* besteht

$$\frac{\sin D_2A_1A_2}{\sin D_2A_1A_3}\,\frac{\sin D_3A_1A_2}{\sin D_3A_1A_3}\,\frac{\sin D_3A_2A_3}{\sin D_3A_2A_1}\,\frac{\sin D_1A_2A_3}{\sin D_1A_2A_1}\,\frac{\sin D_1A_3A_1}{\sin D_1A_3A_2}\,\frac{\sin D_2A_3A_1}{\sin D_2A_3A_2} = 1.$$

Drei Paare von Geraden berühren den nämlichen Kegelschnitt, wenn ihre Gleichungen in die Form

$$z_2^2 + 2a_{23}'z_2z_3 + z_3^2 = 0, \quad z_3^2 + 2a_{13}'z_3z_1 + z_1^2 = 0,$$
$$z_1^2 + 2a_{12}'z_1z_2 + z_2^2 = 0$$

gebracht werden können, wo z_1, z_2, z_3 lineare Functionen der Coordinaten vertreten; denn die vorher gefundenen Gleichungen der drei Tangentenpaare gehen in diese Form über, wenn man die Substitution $z_1\sqrt{A_{11}}$ für x_1, etc. vollzieht.

Wenn dieselben Entwickelungen nach dem Coordinatensystem der ξ_i statt nach dem der x_i interpretirt werden, so liefern sie ein Kennzeichen für die Lage von sechs Punkten in einem Kegelschnitt, *das Theorem von Carnot.*[110]) Dasselbe ist durch die Relation

$$\frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_3B_1 \,.\, A_3B_1'} \cdot \frac{A_3B_2 \,.\, A_3B_2'}{A_1B_2 \,.\, A_1B_2'} \cdot \frac{A_1B_3 \,.\, A_1B_3'}{A_2B_3 \,.\, A_2B_3'} = 1$$

ausgedrückt, wenn wieder A_1, A_2, A_3 die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks und B_1, B_1'; B_2, B_2'; B_3, B_3' bez. die Paare von Schnittpunkten bezeichnen, welche die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 desselben mit dem Kegelschnitt gemein haben. Diese Sätze umfassen bemerkenswerte specielle Fälle, welche in den Beispielen behandelt werden.

B. 1) Wenn von den Ecken des Fundamentaldreiecks im ersten Satze eine, etwa A_3, dem Kegelschnitt angehört, so fallen die beiden von ihr ausgehenden Tangenten A_3D_1 und A_3D_2 in eine zusammen, und man erhält eine Gleichung

$$\frac{\sin D_2A_1A_2}{\sin D_2A_1A_3}\,\frac{\sin D_3A_1A_2}{\sin D_3A_1A_3}\,\frac{\sin D_3A_2A_3}{\sin D_3A_2A_1}\,\frac{\sin D_1A_2A_3}{\sin D_1A_2A_1}\,\frac{\sin^2 D_1A_3A_1}{\sin^2 D_1A_3A_2} = 1,$$

welche zu vier Tangenten A_1D_3, A_1D_2, A_2D_3, A_2D_1 und zum Punkte A_3 durch die Werte des Verhältnisses $\sin D_1A_3A_1 : \sin D_1A_3A_2$ die Richtung der Tangente in diesem Punkte bestimmt.

Wenn ebenso von den Seiten des Fundamentaldreiecks im zweiten Satze eine, etwa A_1A_2, den Kegelschnitt berührt, so dafs ihre Schnittpunkte mit ihm B_3, B_3' zusammenfallen, so erhält man

$$\frac{A_2B_1}{A_3B_1}\,\frac{A_2B_1'}{A_3B_1'}\,\frac{A_3B_2}{A_1B_2}\,\frac{A_3B_2'}{A_1B_2'}\,\frac{\overline{A_1B_3}^2}{\overline{A_2B_3}^2} = 1.$$

Dadurch sind mit der Bestimmung des Verhältnisses $A_1B_3 : A_2B_3$

die Berührungspunkte einer gegebenen Geraden mit einem durch vier Punkte gehenden Kegelschnitt bestimmt, deren harmonische Lage zu gewissen gegebenen Elementen offenbar ist.

Läſst man die Ecken des Fundamentaldreiecks auf dem Kegelschnitt liegen oder seine Seiten ihn berühren, so kommt man auf bekannte Sätze zurück (§ 315). Wenn einer der Punkte A_i unendlich entfernt gedacht wird, z. B. A_2, so liefert das Theorem von Carnot gleichfalls bekannte Sätze, nämlich $\frac{A_1B_3}{A_1B_2}\frac{A_1B_3'}{A_1B_2'} = \frac{A_3B_1}{A_3B_2}\frac{A_3B_1'}{A_3B_2'}$, aus denen die Sätze des § 162 hervorgehen; der anderen Relation entspringen dualistisch entsprechende Sätze.

2) Das Theorem von Carnot liefert auch eine Lösung der Aufgabe, den Krümmungskreis in einem gegebenen Punkte eines Kegelschnittes zu bestimmen, wenn die Tangente in diesem Punkte und drei andere Punkte desselben bekannt sind.

Wenn B_2, B_2', B_3' drei unendlich nahe und B_1, B_1', B_3 drei andere Punkte des Kegelschnittes sind, so ist für den Schnitt K des durch B_2, B_2', B_3' gehenden Kreises mit der Geraden A_1A_2

$A_1B_3' \,.\, A_1K = A_1B_2' \,.\, A_1B_2$, also $A_1K = A_1B_2 \,.\, A_1B_2' : A_1B_3'$,

daher nach dem Satze von Carnot

$$A_1K = A_1B_3 \cdot \frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_3B_1 \,.\, A_3B_1'} \cdot \frac{A_3B_2 \,.\, A_3B_2'}{A_2B_3 \,.\, A_2B_3'}.$$

Beim Zusammenrücken von B_2, B_2', B_3', wobei A_1 und B_3' auf der Curve zusammenfallen, gibt B_2B_2' die zugehörige Tangente und es wird

$$A_1K = A_1B_3 \cdot \frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_3B_1 \,.\, A_3B_1'} \frac{A_3A_1^2}{A_2A_1 \,.\, A_2B_3}.$$

Der so gefundene Punkt K bestimmt den Krümmungskreis.

Ist der Punkt A_3 unendlich entfernt, so reducirt sich dies auf

$$A_1K = A_1B_3 \cdot \frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_2A_1 \,.\, A_2B_3},$$

und wenn überdies A_2, der Schnittpunkt der Sehnen A_1B_3, B_1B_1', die Mitte von beiden ist, so wird $A_1K = 2 \,.\, \overline{A_2B_1}^2 : A_2A_1$. Für ϱ als den Halbmesser des Kreises und A_1D als seinen zur Tangente in A_1 rechtwinkligen Durchmesser hat man $A_1K = 2\varrho \,.\, \cos KA_1D$, d. h. $p\varrho = \overline{A_2B_1}^2$, wenn p die senkrechte Entfernung des Punktes A_2 von der Tangente in A_1 ist.

3) Die Vereinigung beider Sätze dieses § liefert ferner den Satz: Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einen Kegelschnitt schneiden, so sind die sechs Geraden, welche die Schnittpunkte mit den bez. Gegenecken verbinden, Tangenten eines Kegel-

schnittes. Und als speciellen Fall: Die Geraden, welche von zwei festen Punkten nach den Ecken eines Dreiecks gezogen werden können, schneiden die bez. Gegenseiten desselben in sechs Punkten eines Kegelschnittes.

4) Drei Paare von Punkten auf den Diagonalen eines Vierseits, welche zu den bezüglichen Endpunkten conjugirt harmonisch liegen, sind sechs Punkte eines Kegelschnittes. (§ 317, 2.)

Wir denken das Dreieck $A_1A_2A_3$ als das von den Diagonalen AC, BD, EF gebildete Dreieck und die Punktepaare B_1, B_1'; B_2, B_2'; B_3, B_3' als die auf den Geraden EF, BD, AC bez. gewählten conjugirt harmonischen Paare. Dann sind A_1, A_2; B_3, B_3' Paare einer Involution von den Doppelpunkten AC; ebenso A_2, A_3; B_1, B_1' und A_3, A_1; B_2, B_2' bez. Paare von Involutionen mit den Doppelpunkten E, F und B, D; daher gelten die drei Relationen

$$\frac{A_1B_3 \,.\, A_1B_3'}{A_2B_3 \,.\, A_2B_3'} = \frac{\overline{A_1C}^2}{\overline{A_2C}^2}, \quad \frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_3B_1 \,.\, A_3B_1'} = \frac{\overline{A_2E}^2}{\overline{A_3E}^2}, \quad \frac{A_3B_2 \,.\, A_3B_2'}{A_1B_2 \,.\, A_1B_2'} = \frac{\overline{A_3D}^2}{\overline{A_1D}^2}$$

und ihre Multiplication liefert

$$\frac{A_1B_3 \,.\, A_1B_3'}{A_2B_3 \,.\, A_2B_3'}\frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_3B_1 \,.\, A_3B_1'}\frac{A_3B_2 \,.\, A_3B_2'}{A_1B_2 \,.\, A_1B_2'} = \left\{\frac{A_1C}{A_2C}\cdot\frac{A_2E}{A_3E}\cdot\frac{A_3D}{A_1D}\right\}^2.$$

Da hier die rechte Seite den Wert Eins hat, weil CDE Punkte in einer Geraden auf den Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sind, so liegen die Punkte B_1, B_1', B_2, B_2', B_3, B_3' nach dem Satze von Carnot auf einem Kegelschnitt. Sind speciell B_1, B_2, B_3 auf einer Geraden gewählt, so liegen B_1', B_2', B_3' auf einer zweiten Geraden wie z. B. in § 317, 1.

328. Um die Gleichungen der Geraden zu bilden, welche irgend einen gegebenen Punkt x_i' mit den Schnittpunkten von zwei Curven der Ebene verbinden, so haben wir für x_i in beide Gleichungen $lx_i + mx_i'$ zu substituiren und zwischen den resultirenden Gleichungen das Verhältnis $l:m$ zu eliminiren. Denn jeder Punkt in einer der fraglichen Geraden besitzt die Eigenschaft, dafs die ihn mit dem Punkt x_i' verbindende Gerade beide Curven in dem nämlichen Punkte schneidet, so dafs die Gleichungen, welche die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Curven bestimmen, eine gemeinschaftliche Wurzel haben müssen. In Folge dessen ist die Resultante der Elimination zwischen beiden gleich Null.

So wird die Gleichung des Paares von Geraden, welche

den Punkt x_i' mit den Schnittpunkten der Geraden $L = 0$ und des Kegelschnittes $S = 0$ verbinden, aus

$$lL + mL' = 0 \quad \text{und} \quad l^2 S + 2lmP + m^2 S' = 0$$

in der Form $\quad L'^2 S - 2LL'P + L^2 S' = 0$

erhalten. Liegt der Punkt x_i' in der Curve $S' = 0$, so reducirt sich diese Gleichung auf die Form $L'S - 2LP = 0$.

B. Um von irgend einem Punkte aus die Asymptotenparallelen zu erhalten, hat man in dieser Gleichung für $L = 0$ nur die Gleichung der unendlich fernen Geraden zu nehmen (§ 330).

Eine Sehne, welche an einem gegebenen Punkte der Curve einen rechten Winkel spannt, geht durch einen festen Punkt.

Wir gebrauchen rechtwinklige Coordinaten und bilden wie oben die Gleichung der Verbindungslinien des gegebenen Punktes mit den Schnittpunkten des Kegelschnittes mit der Geraden $\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 = 0$. Diese Geraden sind rechtwinklig zu einander, wenn (§ 87) die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2 verschwindet; daraus entspringt die Bedingung (für $a_{ik} = 0$)

$$(\xi_1 x' + \xi_2 y' + \xi_3)(a_{11} + a_{22}) = 2(a_{11}\xi_1 x' + a_{22}\xi_2 y').$$

Da ξ_1, ξ_2, ξ_3 im ersten Grade in dieselbe eingehen, so geht die Sehne immer durch einen festen Punkt, nämlich durch

$$\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}} x' \,\Big|\, \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22}} y'.$$

Wenn der erstere Punkt die Curve durchläuft, so beschreibt der zweite Punkt einen neuen Kegelschnitt.

Wenn der an dem gegebenen Punkt gespannte Winkel kein rechter ist, oder wenn der gegebene Punkt nicht in der Curve liegt, so enthält die in diesem § gefundene Bedingung die Gröſsen ξ_1, ξ_2, ξ_3 im zweiten Grade, und die Sehne wird einen Kegelschnitt umhüllen. (§ 304.)

329. **Schnittpunkte in einer Geraden.** In § 319 ist das Paar der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit der Verbindungsgeraden von zwei Punkten x_i, x_i' bestimmt, und daraus in den folgenden § zahlreiche Ergebnisse entwickelt worden. Es bleibt übrig, dem eine Methode hinzuzufügen, wie man *die Schnittpunkte einer durch die allgemeine Gleichung gegebenen Geraden mit einem ebenso durch die allgemeine Gleichung bestimmten Kegelschnitt* ermittelt.

Unter den Bezeichnungen S_i § 322, ist $\Sigma x_i S_i = 0$ mit

$S = 0$ identisch; aus der Combination dieser Gleichung mit der Gleichung der Geraden $\Sigma \xi_i x_i = 0$ fliefsen die Verhältnisse

$$x_1 : x_2 : x_3 = (S_2 \xi_3 - S_3 \xi_2) : (S_3 \xi_1 - S_1 \xi_3) : (S_1 \xi_2 - S_2 \xi_1),$$

oder durch Einführung eines zunächst unbestimmten Factors σ

$$- \sigma x_1 + S_3 \xi_2 - S_2 \xi_3 = 0, \quad - \sigma x_2 + S_1 \xi_3 - S_3 \xi_1 = 0,$$
$$- \sigma x_3 + S_2 \xi_1 - S_1 \xi_2 = 0,$$

d. h. in entwickelter Form nach den x_i geordnet

$$x_1(a_{13}\xi_2 - a_{12}\xi_3 - \sigma) + x_2(a_{23}\xi_2 - a_{22}\xi_3 \quad) + x_3(a_{33}\xi_2 - a_{32}\xi_3 \quad) = 0,$$
$$x_1(a_{11}\xi_3 - a_{13}\xi_1 \quad) + x_2(a_{12}\xi_3 - a_{23}\xi_1 - \sigma) + x_3(a_{13}\xi_3 - a_{33}\xi_1 \quad) = 0,$$
$$x_1(a_{12}\xi_1 - a_{11}\xi_2 \quad) + x_2(a_{22}\xi_1 - a_{12}\xi_2 \quad) + x_3(a_{23}\xi_1 - a_{13}\xi_2 - \sigma) = 0.$$

Man bestimmt somit bei bekanntem σ die Werte der Coordinaten der Schnittpunkte aus drei linearen homogenen Gleichungen. Die Schreibart $\Sigma \xi_i x_i = 0$ erlaubt zugleich, durch die einfache Vertauschung der x_i mit den ξ_i und der a_i mit den A_i, dieselben Gleichungen als Bestimmungsgleichungen der Coordinaten ξ_i der Tangenten zu betrachten, die von einem Punkte $\Sigma \xi_i x_i = 0$ an den Kegelschnitt $\Sigma = 0$ gezogen werden können.

Es erübrigt, die Gröfse σ direct zu bestimmen. Wenn man die Gleichungen $S_i = \Sigma a_{ik} x_k$ nach den x_i auflöst, so kommt

$$\sigma (A_{11} S_1 + A_{12} S_2 + A_{13} S_3) + \mathsf{D} (\xi_3 S_2 - \xi_2 S_3) = 0,$$
$$\sigma (A_{12} S_1 + A_{22} S_2 + A_{23} S_3) + \mathsf{D} (\xi_1 S_3 - \xi_3 S_1) = 0,$$
$$\sigma (A_{13} S_1 + A_{23} S_2 + A_{33} S_3) + \mathsf{D} (\xi_2 S_1 - \xi_1 S_2) = 0,$$

und somit nach Elimination der S_1, S_2, S_3 die Relation

$$\begin{vmatrix} \sigma A_{11} & , \sigma A_{12} + \mathsf{D}\xi_3, & \sigma A_{13} - \mathsf{D}\xi_2 \\ \sigma A_{12} - \mathsf{D}\xi_3, & \sigma A_{22} & , \sigma A_{23} + \mathsf{D}\xi_1 \\ \sigma A_{13} + \mathsf{D}\xi_2, & \sigma A_{23} - \mathsf{D}\xi_1, & \sigma A_{33}. \end{vmatrix} = 0$$

welche sich nach Division durch D^2 reducirt auf

$$\sigma^2 + \Sigma = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma = \sqrt{(-\Sigma)}.^{*)}$$

Um die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt zu finden, bildet man also die mit den Liniencoordi-

---

*) Man erhält denselben Wert, wenn man zwischen den oben gefundenen Bestimmungsgleichungen für x_1, x_2, x_3 diese Gröfsen eliminirt, in der Form $- \sigma (\sigma^2 + \Sigma) = 0$.

naten derselben gesäumte Discriminante (§ 322) und die Quadratwurzel aus ihr; die zwei Werte derselben geben die Coordinaten der Schnittpunkte mittelst der obigen drei linearen Gleichungen.[111]) Für $\sigma = 0$ geben sie die Coordinaten des Berührungspunktes.

Die speciellen Formen der allgemeinen Gleichung geben bequeme Beispiele zur Anwendung dieser allgemeinen Methode der Auflösung zweier homogenen Gleichungen vom ersten und zweiten Grade zwischen drei Veränderlichen.

330. **Gattungskriterien.** Dem Vorstehenden zufolge ist die Realität der Lösungen des Gleichungssystems von der von σ abhängig. *Eine reelle Gerade schneidet den Kegelschnitt $S = 0$ in zwei reellen oder imaginären Punkten, je nachdem das Substitutionsresultat ihrer Coordinaten in die linke Seite Σ der Tangentialgleichung negativ oder positiv ist.*

Wenn wir den Satz dualistisch übersetzen, so müssen wir an Stelle von Σ diejenige Function einführen, die aus Σ ebenso gebildet ist, wie Σ aus S; dies ist aber nicht S, sondern $\mathsf{D} \cdot S$. *Das Tangentenpaar eines Kegelschnittes $S = 0$ aus einem reellen Punkte ist reell oder imaginär, je nachdem das Substitutionsresultat seiner Coordinaten in S mit der Discriminante D entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.* Damit ist auch das Äufsere und Innere der Curve definirt (vgl. § 161).

Die Kriterien der Gattung des Kegelschnittes bilden nur den Specialfall des ersten Satzes für die unendlich ferne Transversale. Sie hängen also davon ab, wie die Coordinaten derselben in dem gegebenen System lauten. Ist $S = 0$ in Dreiliniencoordinaten gegeben und bedeuten wieder l_i die Seiten, A_i die Winkel des Fundamentaldreiecks, *so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die mit den l_i oder A_i gesäumte Discriminante positiv, Null oder negativ ist.* Sind aber allgemeine projectivische Coordinaten gegeben mit dem Einheitpunkt von den Abständen e_i, so sind nach § 85 $x_i e_i$ die Dreiliniencoordinaten, also gelten die obigen Kriterien, wenn nur der Saum der l_i durch den der Producte $l_i \cdot e_i$ ersetzt wird. Am einfachsten lauten die Bedingungen in Flächencoordinaten x_i und in Dreipunktcoordi-

naten ξ_i, da für diese die unendlich ferne Gerade Einheitlinie ist, nämlich: *Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist gekennzeichnet, wenn die Coefficientensumme $\Sigma A_{i\varkappa}$ negativ, Null oder positiv ist.*

B. 1) Nimmt man S_i als Coordinaten der Polare von x_i und setzt sie für ξ_i in Σ ein, bez. nimmt man Σ_i als Coordinaten des Pols von ξ_i und setzt sie für x_i in S ein, so ist

$$S = \mathbf{D} \cdot \Sigma, \text{ bez. } \Sigma = \mathbf{D} \cdot S.$$

2) Eine Parabel stellt die Gleichung

$$(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$$

in Dreiliniencoordinaten dar, wenn

$$\frac{a_1}{l_1} + \frac{a_2}{l_2} + \frac{a_3}{l_3} = 0.$$

3) Man soll den Ort des Brennpunktes einer Parabel bestimmen, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt.

Wenn der Punkt x_i' der eine Brennpunkt eines eingeschriebenen Kegelschnittes ist, die Verbindungsgeraden desselben mit den Ecken des Fundamentaldreiecks somit $x_1 : x_1' = x_2 : x_2' = x_3 : x_3'$ sind, so erhält man die Verbindungsgeraden derselben Ecken mit dem andern Brennpunkte, als die, welche mit den Seiten des Dreiecks die nämlichen Winkel bilden (§ 201), in den Gleichungen $x_1' x_1 = x_2' x_2$, $x_2' x_2 = x_3' x_3$, $x_3' x_3 = x_1' x_1$ und kann also für die Coordinaten des andern Brennpunktes die reciproken Werte der x_i' nehmen.[112]) Wenn also die Gleichung des Ortes gegeben ist, den der eine Brennpunkt durchläuft, so kann daraus sogleich die Gleichung des Ortes gebildet werden, den der zweite beschreibt.

Wenn speciell der eine in der unendlich fernen Geraden $l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$ bleibt, so durchläuft der andere den dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kreis

$$\frac{l_1}{x_1} + \frac{l_2}{x_2} + \frac{l_3}{x_3} = 0.$$

Die Coordinaten des unendlich entfernten Brennpunktes der Parabel sind nach der Relation in 1) durch $\frac{a_{11}}{l_1^2} \Big| \frac{a_{22}}{l_2^2} \Big| \frac{a_{33}}{l_3^2}$ dargestellt, weil diese Werte den beiden Gleichungen

$$\Sigma l_i x_i = 0, \quad \Sigma (a_{ii} x_i)^{\frac{1}{2}} = 0$$

genügen; daher sind die Coordinaten des in endlicher Entfernung gelegenen Brennpunktes

$$\frac{l^2}{a_{11}} \Big| \frac{l^2}{a_{22}} \Big| \frac{l^2}{a_{33}}.$$

4) Gleichung der Directrix dieser Parabel.

Wir finden nach § 320 die Gleichung der Polare für den Punkt, dessen Coordinaten wir eben geschrieben haben, als

$$a_{11}x_1(l_2^2+l_3^2-l_1^2)+a_{22}x_2(l_3^2+l_1^2-l_2^2)+a_{33}x_3(l_1^2+l_2^2-l_3^2)=0$$

oder $a_{11}x_1 l_2 l_3 \cos A_1 + a_{22}x_2 l_3 l_1 \cos A_2 + a_{33}x_3 l_1 l_2 \cos A_3 = 0.$

Wenn man für a_{33} den aus 1) entspringenden Wert substituirt, so wird diese Gleichung in

$$a_{11} l_2 l_3 (x_1 \cos A_1 - x_3 \cos A_3) + a_{22} l_3 l_1 (x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3) = 0$$

übergeführt und zeigt, dafs die Directrix stets durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks geht. (Vgl. § 62, 3; § 229, 1).

5) Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schaar (§ 313, 9).

Wenn wir die vier gemeinschaftlichen Tangenten durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ darstellen und zwar mit der identischen Relation (§ 317) $\Sigma x_i = 0$, so mufs diese nicht nur durch die Coordinaten des einen Brennpunktes $x_1' \,|\, x_2' \,|\, x_3' \,|\, x_4'$, sondern auch durch die des andern, d. h. ihre reciproken Werte, erfüllt werden. Der fragliche Ort ist daher eine Curve dritter Ordnung von der Gleichung

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0.$$

331. **Centrum und Durchmesser.** Die Bestimmung des Pols einer Geraden (§ 322) führt zur Bestimmung der Bedingungen, unter welchen eine Gerade ein Durchmesser und unter denen zwei Gerade conjugirte Durchmesser sind, durch die Betrachtung der unendlich entfernten Punkte.

Wenn die Gerade ξ_i ein Durchmesser des Kegelschnittes ist, so liegt ihr Pol unendlich entfernt und sie selbst geht durch den Pol der unendlich fernen Geraden, das Centrum. Also hat man in Dreiliniencoordinaten die Relation

$$\xi_1 \Sigma A_{1i} l_i + \xi_2 \Sigma A_{2i} l_i + \xi_3 \Sigma A_{3i} l_i = 0,$$

wo die Coefficienten der ξ_i den Coordinaten $m_1 \,|\, m_2 \,|\, m_3$ des Centrums proportional sind.

Um ferner den zur Geraden ξ_i conjugirten Durchmesser zu finden, betrachtet man die Tangente in einem Punkte der Curve, d. h. $x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 = 0$ als parallel der Geraden ξ_i, so dafs die Bedingung der Lage ihres Schnittpunktes in der unendlich fernen Geraden l_i besteht

$$S_1(l_2\xi_3 - l_3\xi_2) + S_2(l_3\xi_1 - l_1\xi_3) + S_3(l_1\xi_2 - l_2\xi_1) = 0.$$

Werden dann die in den S_1 enthaltenen Veränderlichen als die laufenden Coordinaten angesehen, so ist dies die Gleichung der durch die Berührungspunkte der parallelen Tangenten gehenden Geraden, d. h. die Gleichung des zum gegebenen conjugirten Durchmessers.

Allgemein können wir die Bedingungen, dafs zwei Gerade ξ_i, ξ_i' conjugirte Durchmesser seien, dadurch ausdrücken, dafs dieselben mit der unendlich fernen Geraden l_i ein Polardreieck bilden. Mit der Abkürzung Π des § 322 lauten dieselben

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0, \; m_1 \xi_1' + m_2 \xi_2' + m_3 \xi_3' = 0, \; \Pi = 0.$$

Wenn sie zusammenfallen, so entstehen die Asymptoten als Doppelstrahlen der Durchmesserinvolution aus

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0, \quad \Sigma = 0.$$

Die Gleichung des Asymptotenpaares lautet, wenn $S^{(0)}$ das Substitutionsresultat der m_i in S bezeichnet, (§ 326)

$$S S^{(0)} - \mathbf{D}^2 (l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3)^2 = 0,$$

da die Bildung der Polaren zu m_i die linke Seite der Gleichung von l_i mit dem Factor $\mathbf{D}$ behaftet liefert. Man constatirt aber nach § 330, 1, dafs, falls wir l_i in Σ einsetzen und $\Sigma^{(\infty)}$ erhalten, $S^{(0)} = \mathbf{D} \Sigma^{(\infty)}$ ist, also obige Gleichung einfacher lautet

$$S \Sigma^{(\infty)} - \mathbf{D} (l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3) = 0.$$

Ferner bilden die Axen das Rechtwinkelpaar der Involution am Centrum. Um sie zu bestimmen, hat man nach § 65 die allgemeine Polarenrelation $\Pi = 0$ durch die Orthogonalitätsbedingung zu ersetzen

$$\xi_1 \xi_1' + \xi_2 \xi_2' + \xi_3 \xi_3' - (\xi_2 \xi_3' + \xi_3 \xi_2') \cos A_1 - (\xi_3 \xi_1' + \xi_1 \xi_3') \cos A_2 - (\xi_1 \xi_2' + \xi_2 \xi_1') \cos A_3 = 0.$$

Wenn man die allgemeine Theorie für Cartesische Coordinaten specialisirt, indem man (§§ 69, 73) $x_3 = 1$ setzt, so entspringt aus der Untersuchung der Pole und Polaren der Fundamentallinien und -punkte die Theorie der conjugirten Durchmesser, die Bestimmung von Mittelpunkt und Asymptoten.

B. 1) Man kann für die Relation zwischen den Richtungen α, α' conjugirter Durchmesser (§ 150) setzen

$$a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = \mu \sin \alpha', \quad a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha = - \mu \cos \alpha'.$$

Für die Asymptoten ist $\alpha = \alpha'$, und man erhält

$$a_{11}\cos\alpha + (a_{12} - \mu)\sin\alpha = 0,\quad (a_{12} + \mu)\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = 0,$$

daher $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 + \mu^2 = 0$ oder $\mu^2 = -A_{33}$; somit

$$\nu\cos\alpha\cos\alpha' = a_{22},\quad \nu\cos\alpha\sin\alpha' = -(a_{12} - \mu),$$

$$\nu\cos\alpha\sin\alpha' = -(a_{12} + \mu),\quad \nu\sin\alpha\sin\alpha' = a_{11};$$

mit $\qquad \nu^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = R^2$ (§ 166).

2) Für die Hauptaxen ist $\alpha' = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ und man erhält

$$(a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0,\quad a_{12}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha = 0,$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0;\quad \lambda = \frac{a_{11} + a_{22} + \nu}{2};\quad \lambda' = \frac{a_{11} + a_{22} - \nu}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha' = \frac{a_{11} - a_{22} + \nu}{2\nu},\quad \sin^2\alpha = \cos^2\alpha' = \frac{-a_{11} + a_{22} + \nu}{2\nu};$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = -\sin\alpha'\cos\alpha' = \frac{a_{12}}{\nu}\quad (\nu \text{ wie in } 1).$$

Für $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ werden die Hauptaxen also unbestimmt; dies ist der Fall des Kreises.

3) Wenn $\alpha' - \alpha$ ein gegebener Winkel δ sein soll (§ 186), so gelten die Relationen

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \varrho(\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\cos\delta),$$

$$a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = -\varrho(\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta),$$

oder $\qquad (a_{11} - \varrho\sin\delta)\cos\alpha + (a_{12} - \varrho\cos\delta)\sin\alpha = 0,$

$$(a_{12} + \varrho\cos\delta)\cos\alpha + (a_{22} - \varrho\sin\delta)\sin\alpha = 0,$$

und $\qquad \varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\varrho\sin\delta + A_{33} = 0$; also

$$p\cos\alpha = a_{22} - \varrho\sin\delta = \tfrac{1}{2}(a_{22}\cos^2\delta - a_{11}\sin^2\delta - \sigma\sin\delta),$$

$$p\sin\alpha = a_{12} - \varrho\cos\delta = -a_{12} - \tfrac{1}{2}[(a_{11} + a_{22})\sin\delta + \sigma]\cos\delta;$$

$$q\cos\alpha = -a_{12} + \varrho\cos\delta = -a_{12} + \tfrac{1}{2}[(a_{11} + a_{22})\sin\delta + \sigma]\cos\delta,$$

$$q\sin\alpha = a_{11} - \varrho\sin\delta = \tfrac{1}{2}(a_{11}\cos^2\delta - a_{22}\sin^2\delta - \sigma\sin\delta);$$

wobei $\qquad \sigma^2 = (a_{11} + a_{22})^2\sin^2\delta - 4A_{33}$.

Nur so lange $\sin_2\delta > \dfrac{4A_{33}}{(a_{11} + a_{22})^2}$ ist, ist die Aufgabe möglich.

Die Vertauschung von δ mit $-\delta$ gibt das zugehörige α'.

4) Aus den Relationen, von denen in 3) ausgegangen worden ist, folgt auch

$$a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = \varrho\sin\delta;$$

daher geht durch die Substitution

$$x = X\cos\alpha + Y\cos\alpha',\quad y = X\sin\alpha + Y\sin\alpha'$$

die Gleichung des Kegelschnittes über in

$$\frac{X^2}{d^2} + \frac{Y^2}{d'^2} = 1, \quad \text{mit} \quad d^2 = -\frac{k}{\varrho \sin \delta}, \quad d'^2 = \frac{k}{\varrho' \sin \delta}.$$

Für die Hauptaxen ist speciell $d^2 = -\frac{k}{\lambda}$, $d'^2 = -\frac{k}{\lambda'}$.

Die Transformation zu den Asymptoten vollzieht man durch

$$x = X \cos\alpha + Y \cos\alpha', \quad y = X \sin\alpha + Y \sin\alpha',$$

$$a_{11} \cos^2\alpha + 2 a_{12} \cos\alpha \sin\alpha + a_{22} \sin^2\alpha = 0,$$

$$a_{11} \cos^2\alpha' + 2 a_{12} \cos\alpha' \sin\alpha' + a_{22} \sin^2\alpha' = 0,$$

$$a_{11} \cos\alpha \cos\alpha' + a_{12}(\cos\alpha \sin\alpha' + \cos\alpha' \sin\alpha) + a_{22} \sin\alpha \sin\alpha' = \frac{2 A_{33}}{v};$$

die Gleichung der Curve wird $XY = -\frac{kv}{4 A_{33}}$. (Vgl. § 178.)

332. **Kreisgleichung.** Wann stellt die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades $S = 0$ einen Kreis dar? Wir können uns wiederum mit der Voraussetzung von Dreiliniencoordinaten begnügen, indem wir andernfalls die Coefficienten a_{ik} nur durch $a_{ik} e_i e_k$ ersetzt denken müssen. Setzen wir für die x_i geradezu die Abstände von den Seiten des Fundamentaldreiecks $A_1 A_2 A_3$, so ist die Constante $\Sigma l_i x_i = M$ die doppelte Dreiecksfläche (§ 67).

Nun gehen wir von dem Potenzbegriff beim Kreise aus (§ 114). Schneiden $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ den Kreis in den Punktepaaren A_1', A_1''; A_2', A_2''; A_3', A_3'', so gelten die Relationen

$$A_1 A_2' \cdot A_1 A_2'' = A_1 A_3' \cdot A_1 A_3'', \text{ etc.}$$

Nennen wir die Abstände x_3 von A_2', A_2'' x_3', x_3'', die Abstände x_2 von A_3', A_3'' x_2', x_2'', so gibt die Multiplication jener Relation mit $\sin^2 A_1$

$$x_3' x_3'' = x_2' x_2''.$$

Anderseits werden die Coordinaten der Schnittpunkte von $x_3 = 0$, bez. $x_2 = 0$ bestimmt aus den Gleichungspaaren

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0, \quad l_1 x_1 + l_2 x_2 = M_1$$

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0, \quad l_1 x_1 + l_3 x_3 = M, \text{ oder aus}$$

$$(a_{11} l_2^2 - 2 a_{12} l_1 l_2 + a_{22} l_1^2) x_2^2 + 2 M (a_{12} l_1 - a_{11} l_2) x_2 + a_{11} M^2 = 0,$$

$$(a_{11} l_3^2 - 2 a_{13} l_1 l_3 + a_{33} l_1^2) x_3^2 + 2 M (a_{13} l_1 - a_{11} l \quad x_3 + a_{11} M^2 = 0.$$

Hieraus folgt aber

$$x_2'x_2'' = \frac{a_{11}M^2}{a_{11}l_2^2 - 2a_{12}l_1l_2 + a_{22}l_1^2},$$

$$x_3'x_3'' = \frac{a_{11}M^2}{a_{11}l_3^2 - 2a_{13}l_1l_3 + a_{33}l_1^2},$$

so dafs die erste der obigen Relationen Gleichheit der Nenner verlangt. Die beiden anderen entstehen durch cyclische Verschiebung, also ist die *Doppelbedingung des Kreises*

$$a_{11}l_2^2 - 2a_{12}l_1l_2 + a_{22}l_1^2 = a_{22}l_3^2 - 2a_{23}l_2l_3 + a_{33}l_2^2$$
$$= a_{33}l_1^2 - 2a_{31}l_1l_3 + a_{11}l_3^2,$$

in der man noch die Seiten l_i durch $\sin A_i$ ersetzen kann.

Demnach stellt insbesondere die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kegelschnittes (§ 315) einen Kreis dar, wenn $a_{12}:a_{23}:a_{31} = l_1:l_2:l_3$ ist. Aus dessen Gleichung

$$C \equiv l_1x_2x_3 + l_2x_3x_1 + l_3x_1x_2 = 0 \quad \text{(vgl. § 315, 3)}$$

folgt die Gleichung eines beliebigen Kreises nach § 273 als

$$l_x \cdot a_x + kC = 0,$$

wo a_i die Radicalaxe desselben mit dem umgeschriebenen Kreise angibt, während die zweite Schnittsehne l_i unendlich fern ist. Somit sind die Entwicklungscoefficienten dieser Gleichung die allgemeinen Lösungen der beiden aufgestellten Bedingungen durch vier unabhängige Gröfsen a_1, a_2, a_3, k.

Als den Pol von l_i ermitteln wir das Centrum des Kreises und als das negative Radiusquadrat die Potenz des letzteren. Die Potenz eines beliebigen Punktes erhalten wir aber, wenn die Coordinaten als Abstände interpretirt werden, indem wir das Substitutionsresultat in die linke Seite der Kreisgleichung durch eine gewisse Constante m dividiren*). Sobald man die Potenz *eines* Punktes direct geometrisch betimmen kann, ist auch m bekannt.

B. 1) Wenn die Gleichungen zweier Kreise sind

$$kC + l_x \cdot a_x = 0, \quad k'C + l_x \cdot a_x' = 0,$$

so ist die Gleichung ihrer Radicalaxe $k'a_x - ka_x' = 0$.

*) In rechtwinkligen Coordinaten ist die Function der x_i dann nämlich mit $m(x^2 + y^2) + \cdots$ äquivalent.

2) *Die drei Mittelpunkte der Seiten und die drei Fufspunkte der Höhen in einem Dreieck liegen in demselben Kreise, dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks.*

Eine Curve zweiten Grades, durch diese sechs Punkte ist

$$x_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + x_2^2 \sin A_2 \cos A_2 + x_3^2 \sin A_3 \cos A_3 - (x_1 x_2 \sin A_3 + x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2) = 0.$$

Denn für $x_3 = 0$ erhält man aus ihr

$$x_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + x_2^2 \sin A_2 \cos A_2 - x_1 x_2 (\sin A_1 \cos A_2 + \cos A_1 \sin A_2) = 0,$$

oder $(x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2)(x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2) = 0.$

Dies ist aber ein Kreis, denn man kann die Gleichung schreiben

$$(x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) - 2(x_1 x_2 \sin A_3 + x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3)\, l_x - 2C = 0.$$

Man sieht daraus, dafs die Radicalaxe des umgeschriebenen und des Feuerbach'schen Kreises die Gerade von der Gleichung $x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3 = 0$ ist, d. h. die Axe der Homologie, welche das gegebene Dreieck mit dem durch die Fufspunkte der Höhen gebildeten Dreieck bestimmt.

3) Radicalaxe des eingeschriebenen und des Feuerbach'schen Kreises. Die Gleichung des ersteren (§ 316, 5) kann geschrieben werden

$$\left(\frac{x_1 \cos^4 \frac{1}{2} A_1}{\sin A_1} + \frac{x_2 \cos^4 \frac{1}{2} A_2}{\sin A_2} + \frac{x_3 \cos^4 \frac{1}{2} A_3}{\sin A_3}\right) l_x = \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} A_1 \cos^2 \frac{1}{2} A_2 \cos^2 \frac{1}{2} A_3}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}\, C.$$

Also lautet die Gleichung der Radicalaxe

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A_1 \cos^2 \tfrac{1}{2} A_2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A_3 \left\{x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3\right\}$$
$$= \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \left\{x_1 \frac{\cos^4 \frac{1}{2} A_1}{\sin A_1} + x_2 \frac{\cos^4 \frac{1}{2} A_2}{\sin A_2} + x_3 \frac{\cos^4 \frac{1}{2} A_3}{\sin A_3}\right\},$$

oder, durch $2 \cos \frac{1}{2} A_1 \cos \frac{1}{2} A_2 \cos \frac{1}{2} A_3$ dividirt,

$$\frac{x_1 \cos \frac{1}{2} A_1}{\sin \frac{1}{2}(A_2 - A_3)} + \frac{x_2 \cos \frac{1}{2} A_2}{\sin \frac{1}{2}(A_3 - A_1)} + \frac{x_3 \cos \frac{1}{2} A_3}{\sin \frac{1}{2}(A_1 - A_2)} = 0.$$

Man erkennt nun (§ 316), dafs diese Gerade den eingeschriebenen Kreis berührt, in einem Punkte, dessen Coordinaten sind $\sin^2 \frac{1}{2}(A_2 - A_3) \mid \sin^2 \frac{1}{2}(A_3 - A_1) \mid \sin^2 \frac{1}{2}(A_1 - A_2)$. Diese Werte zeigen nach § 69, dafs der Punkt in der Verbindungs-

linie der Centra enthalten ist, deren Coordinaten $1 \mid 1 \mid 1$ und $\cos(A_2 - A_3) \mid \cos(A_3 - A_1) \mid \cos(A_1 - A_2)$ sind. Man zeigt in gleicher Weise, dafs der durch die Seitenmittelpunkte gehende Kreis alle vier die Seiten berührenden Kreise berührt. Nach diesem Satze von *Feuerbach* führt der Kreis seinen Namen.[113])

Der folgende Beweis dehnt den Satz auf die acht Kreise des Apollonischen Problems aus, die in der Art in Gruppen von vier zerfallen, dafs die Kreise jeder Gruppe von einem und demselben neuen Kreise berührt werden. (§ 133.)

Sind l_1, l_2, l_3 die nach der Gröfse geordneten Seitenlängen des Dreiecks, nennen wir die aufsen berührenden Kreise correspondirend 1, 2, 3 und den eingeschriebenen Kreis 4, bezeichnen wir ferner die Längen der äufseren und inneren gemeinsamen Tangenten der Kreise 1 und 2 mit 12, 1'2', etc., so mufs, weil die Seite l_1 den Kreis 1 auf der einen und die Kreise 2, 3, 4 auf der andern Seite hat, nach § 140 die Relation stattfinden $1'3' \cdot 24 = 1'2' \cdot 34 + 1'4' \cdot 23$ und ebenso mufs $1'2' \cdot 34 + 2'4' \cdot 13 = 2'3' \cdot 14$, $2'3' \cdot 14 = 1'3' \cdot 24 + 3'4' \cdot 12$ sein. Durch Addition folgt $24 \cdot 13 = 1'4' \cdot 23 + 3'4' \cdot 12$, d. h. die vier Berührungskreise des Dreiecks werden von einem und demselben fünften Kreise berührt, welcher den Kreis 4 auf der einen und die Kreise 1, 2, 3 auf der andern Seite hat (§ 134). Zu den acht Kreisen des Apollonischen Problems erhält man so acht neue Kreise; das Verhältnis beider Gruppen zu einander ist ein gegenseitiges. Zu denselben kommen noch sechs Kreise, die zwar je vier der Apollonischen berühren, während doch jeder von ihnen nur durch drei der letzteren berührt wird.

4) Man bestimme den Wert der Constanten m für die erste Gleichung des Feuerbach'schen Kreises in 2). Weil der Kreis eine Seite $x_3 = 0$ des Dreiecks in Punkten schneidet, deren Entfernungen von der Ecke A_1 bez. gleich $\frac{1}{2} l_3$ und $l_2 \cos A_1$ sind, so ist das Quadrat der Tangente von A_1 an diesen Kreis gleich $\frac{1}{2} l_2 l_3 \cos A_1$. Aus der Gleichung des Kreises folgt $x_1'^2 \sin A_1 \cos A_1$, wenn x_1' die von A_1 auf die Gegenseite gefällte Normale ist. Daher ergibt sich die fragliche Constante aus

$$m \cdot \tfrac{1}{2} l_2 l_3 \cos A_1 = l_2 l_3 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \cos A_1.$$

5) Die Constante m für den Kreis

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0$$

ist
$$m = -\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3,$$

und für den eingeschriebenen Kreis in 3)

$$m = 4 \cos^2 \tfrac{1}{2} A_1 \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2} A_2 \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2} A_3.$$

6) Man bestimme die Entfernung der Centra des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises (r, R) von einander.

Das Quadrat der Tangente vom Centrum des eingeschriebenen Kreises an den umgeschriebenen Kreis ($D^2 - R^2$) findet man wegen $x_1 = x_2 = x_3 = R'$ gleich $-\frac{R'^2(\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3)}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}$ oder nach einer bekannten Formel gleich $-2RR'$; daher ist

$$D^2 = R^2 - 2RR'.$$

7) Man bestimme die Entfernung zwischen den Centren des eingeschriebenen und des Feuerbach'schen Kreises.

Ist ϱ der Radius des letzteren, so folgt aus der Formel

$$\sin A_1 \cos A_1 + \sin A_2 \cos A_2 + \sin A_3 \cos A_3 = 2 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$$

$D^2 - \varrho^2 = R'^2 - RR'$; da man aufserdem weifs, dafs $R = 2\varrho$ ist, so ist $D = R' - \varrho$, oder die Kreise berühren einander (vgl. 3).

8) Das Centrum des Kreises $l_x \cdot a_x + kC = 0$ hat als Coordinaten s_i

$$\frac{R}{k}(k \cos A_1 + a_1 - a_2 \cos A_3 - a_3 \cos A_2),$$

$$\frac{R}{k}(k \cos A_2 + a_2 - a_3 \cos A_1 - a_1 \cos A_3),$$

$$\frac{R}{k}(k \cos A_3 + a_3 - a_1 \cos A_2 - a_2 \cos A_1).$$

Das Radiusquadrat ϱ^2 ist gegeben durch

$$k^2\varrho^2 : R^2 = k^2 + 2k(a_1 \cos A_1 + a_2 \cos A_2 + a_3 \cos A_3)$$
$$+ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos A_1 - 2a_3a_1 \cos A_2 - 2a_1a_2 \cos A_3.$$

9) Die Fufspunkte der von den Punkten x_i' und $1 : x_i'$ (§ 62) auf die Seiten des Fundamentaldreiecks gefällten Perpendikel liegen in einem Kreise.

Mit Rücksicht auf § 65, 5 wird seine Gleichung in der Form gefunden

$$(x_2x_3 \sin A_1 + \cdot\cdot)(x_1' \sin A_1 + \cdot\cdot)(x_2'x_3' \sin A_1 + \cdot\cdot) = \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$$
$$\times (x_1 \sin A_1 + \cdot\cdot) \left\{ \frac{x_1x_1'(x_2' + x_3' \cos A_1)(x_3' + x_2' \cos A_1)}{\sin A_1} + \cdot\cdot \right\}.$$

333. **Absolute Richtungen.** Die Gleichung eines Kreises in den zu den Dreiliniencoordinaten dualen Tangentialcoordinaten ist schon mit dem Ausdruck des § 65 für den Abstand eines Punktes x_i' von einer Geraden ξ_i gegeben. Ein Kreis vom Centrum x_i' und vom Radius ϱ ist gegeben durch

$$(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^2 = \varrho^2 \Omega,$$

wo

$$\Omega \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos A_1 - 2\xi_3\xi_1 \cos A_2 - 2\xi_1\xi_2 \cos A_3.$$

Die beiden Bedingungen, unter welchen eine allgemeine Gleichung $\Sigma A_{ik}\xi_i\xi_k = 0$ einen Kreis darstellt, folgen aus $a_{ii}l_k^2 - 2a_{ik}l_il_k + a_{kk}l_i^2 = c$ als

$$A_{ii}l_k^2 - 2A_{ik}l_il_k + A_{kk}l_i^2 = \mathsf{D}c \quad (\S\ 321).$$

Um die laufenden Coordinaten als Dreipunktcoordinaten interpretiren zu können, müssen wir ξ_i durch $l_i\xi_i$ ersetzt denken.

Die erhaltene specielle Gleichungsform zeigt, dafs alle Kreise einen festen ausgezeichneten Kreis $\Omega = 0$ doppelt berühren, so dafs das Centrum Berührungspol ist. Nun ist aber die Discriminante von $\Omega = 0$ die Function

$$1 - \cos^2 A_1 - \cos^2 A_2 - \cos^2 A_3 - 2 \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3,$$

die für Winkel eines Dreiecks stets gleich Null ist. Also ist

$$\Omega \equiv \omega_1 \omega_2 = 0$$

die Tangentialgleichung der absoluten Richtungen als der unendlich fernen Kreispunkte ω_1, ω_2, welche so als ein in ein Punktepaar zerfallender Kreis aufgefafst werden können (§ 282).

Anderseits ist aber für alle Strahlen ξ_i von nicht absoluter Richtung gemäfs § 77, 3) das Substitutionsresultat der Coordinaten in Ω constant, nämlich gleich M^2. Daher kann man jede nicht homogene Gleichung in den ξ_i homogen machen, indem man, nötigenfalls erst nach Quadrirung derselben, die Glieder niedrigerer Dimension mit $\Omega : M^2$ multiplicirt (vgl. § 68). So kann die Gleichung des Kreises in nicht-homogener Form $\Sigma x_i'\xi_i = M\varrho$ geschrieben werden.

Die Gleichung der Kreisasymptoten in Dreiliniencoordinaten kann man nach der Methode des § 328 gewinnen, indem man ausdrückt, dafs zwei Tangenten von $\Omega = 0$ durch das Centrum x_i gehen: d. h.

$$\{(x_2x_3' - x_3x_2')^2 - 2(x_3x_1' - x_1x_3')(x_1x_2' - x_2x_1')\cos A_1\} + \cdots = 0.$$

Die linearen Factoren der linken Seite können in die leicht verificirten Determinantenformen gebracht werden

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ -1, & e^{iA_3}, & e^{-iA_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ -1, & e^{-iA_3}, & e^{iA_2} \end{vmatrix} = 0,$$

oder in analoge, welche vermöge $A_1 + A_2 + A_3 = \pi$ resultiren. Aus diesen folgen durch einige Reductionen *die Dreiliniencoordinaten der absoluten Richtungen*

$$X_1 : X_2 : X_3 = -1 : e^{\pm iA_3} : e^{\mp iA_2} = e^{\mp iA_3} : -1 : e^{\pm iA_1} = e^{\pm iA_2} : e^{\mp iA_1} : -1.$$

Endlich erlaubt die Gleichung der Kreise, welche auf die absoluten Richtungen und das Centrum oder auf die Asymptoten und die unendlich ferne Gerade bezogen ist (§ 303), auch die Schreibung in Punktcoordinaten

$$\varrho^2 (x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) - O = 0.$$

B. 1) Die Gleichung der absoluten Richtungen stimmt analytisch mit der früheren Definition in § 58 überein.

Schreiben wir in entwickelter Form

$$\Sigma \xi_i x_i \equiv x \Sigma \xi_i \cos \alpha_i + y \Sigma \xi_i \sin \alpha_i - \Sigma \xi_i p_i = 0,$$

so ist $$(\Sigma \xi_i \cos \alpha_i)^2 + (\Sigma \xi_i \sin \alpha_i)^2 = \Omega.$$

Wenn aber die Quadratsumme der Coefficienten von x und y verschwindet, so ist die Gerade zu einem der Strahlen $x \pm iy = 0$ parallel.

2) Man bestimme den Pol einer Geraden ξ_i' und die Schnittpunkte mit einer Geraden für den eingeschriebenen Kreis (§ 316, 7).

Die Gleichung des Pols ist

$$\xi_1 \{(l - l_3)\, \xi_2' + (l - l_2)\, \xi_3'\} + \xi_2 \{(l - l_1)\, \xi_3' + (l - l_3)\, \xi_1'\} + \xi_4 \{(l - l_2)\, \xi_1' + (l - l_1)\, \xi_2')\} = 0,$$

die Gleichung des Centrums also $l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + l_3 \xi_3 = 0$. Für die Schnittpunkte des Kreises speciell mit der unendlich fernen Geraden erhält man eine Gleichung in den Formen

$$l\{(l - l_1)\xi_2 \xi_3 + (l - l_2)\xi_3 \xi_1 + (l - l_3)\xi_1 \xi_2\} - \tfrac{1}{4}(l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + l_3 \xi_3)^2 = 0,$$

$$l_1^2 \xi_1^2 + l_2^2 \xi_2^2 + l_3^2 \xi_3^2 - 2 l_2 l_3 \xi_2 \xi_3 \cos A_1 - 2 l_3 l_1 \xi_3 \xi_1 \cos A_2 - 2 l_1 l_2 \xi_1 \xi_2 \cos A_3 = 0.$$

3) Eine Gleichung von der Form $\eta_1 \eta_2 = k\Omega = \text{const.}$, in welcher η_1, η_2 lineare homogene Polynome in den ξ_i darstellen, sagt aus, dafs für einen Kegelschnitt das Product der normalen Abstände seiner Tangente von den Brennpunkten constant ist. (Vgl. § 202; 312, 4.)

Denn sie repräsentirt einen Kegelschnitt, der einem Vierseit eingeschrieben ist, das die absoluten Kreispunkte zu einem Paar von Gegenecken hat, dessen Brennpunkte also $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ sind. Fallen diese zusammen, so ist $\eta_1^2 = \text{const.}$, d. h. alle Tangenten sind von dem Doppelbrennpunkte (Centrum) gleich entfernt und zwei Gegenecken des Vierseits gehören der Curve an (Kreis).

4) Allgemeine Gleichung des Kreises in Dreipunktcoordinaten.

Nach dem Text hat ein Kreis vom Centrum $\Sigma\alpha_i\xi_i = 0$ eine Gleichung, welche die Form erhalten kann

$$l_1^2(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)+l_2^2(\xi_2-\xi_3)(\xi_2-\xi_1)+l_3^2(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)$$
$$=(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3)^2.$$

Die Identität einer allgemeinen Gleichung $\Sigma = 0$ mit dieser Form erfordert durch Coefficientenvergleichung die Relationen

$$\frac{l_1^2-\alpha_1^2}{A_{11}}=\frac{l_2^2-\alpha_2^2}{A_{22}}=\frac{l_3^2-\alpha_3^2}{A_{33}}=\frac{l_1^2-l_2^2-l_3^2-2\alpha_2\alpha_3}{2A_{23}}$$
$$=\frac{l_2^2-l_3^2-l_1^2-2\alpha_3\alpha_1}{2A_{31}}=\frac{l_3^2-l_1^2-l_2^2-2\alpha_1\alpha_2}{2A_{12}}=c.$$

Man bildet dann mit $l_i^2-A_{ii}c=\alpha_i^2$, $l_kl_h\cos A_ic=-\alpha_k\alpha_h$ drei Paare von Gleichungen, deren erstes lautet

$$(l_2^2-A_{22}c)(l_3^2-A_{33}c)=(l_2l_3\cos A_1+A_{23}c)^2,$$
$$(l_1^2-A_{11}c)(l_2l_3\cos A_1+A_{23}c)+(l_3l_1\cos A_2+A_{31}c)(l_1l_2\cos A_3+A_{12}c)=0$$

oder

$$c^2(A_{22}A_{33}-A_{23}^2)-c(A_{22}l_3^2+A_{33}l_2^2+2A_{23}l_2l_3\cos A_1)+l_2^2l_3^2\sin^2A_1=0,$$
$$c^2(A_{31}A_{12}-A_{11}A_{23})+c\{l_1(l_1A_{23}+l_2\cos A_3A_{31}+l_3\cos A_2A_{12})-l_2l_3\cos A_1A_{11}\}$$
$$-l_1^2l_2l_3\sin A_2\sin A_3=0,$$

Gleichungen, welche durch $l_2^2l_3^2\sin A_1^2=l_1^2l_2l_3\sin A_2\sin A_3=M^2$ vereinfacht werden können. Combinirt man die drei Paare solcher Gleichungen, so findet man

$$c=\frac{A_{33}A_{11}-A_{31}^2+A_{11}A_{22}-A_{12}^2-2(A_{31}A_{12}-A_{11}A_{23})}{(A_{11}+A_{22}+A_{33}+2A_{23}+2A_{31}+2A_{12})\,l_1^2}$$

und daher als Bedingungen der allgemeinen Gleichung für den Kreis

$$\frac{(A_{kk}A_{ii}-A_{ki}^2)+(A_{ii}A_{jj}-A_{ij}^2)-2(A_{ki}A_{ij}-A_{ii}A_{jk})}{l_i^2}=\text{const.}$$

§ 334. **Polarität in Kegelschnittsystemen.** Da die Gleichung der Polare eines Punktes die Coefficienten der Gleichung im ersten Grade enthält, so geht eine unbestimmte Gröfse, welche im ersten Grade in der Gleichung eines Kegelschnittes enthalten ist, auch im ersten Grade in die Gleichung der Polare ein. Wenn also $P=0$ und $P'=0$ die Polaren eines Punktes in Bezug auf zwei Kegelschnitte $S=0$ und $S'=0$ sind, so ist die Polare desselben Punktes in Bezug

auf einen Kegelschnitt des Büschels $S + kS' = 0$ durch $P + kP' = 0$ dargestellt. Denn es ist

$$(a_{11} + ka_{11}')\,x_1x_1' + \cdots\cdots = a_{11}x_1x_1' + \cdots\cdots + k\{a_{11}'x_1x_1' + \cdots\cdots\}.$$

Wenn vier Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so geht die Polare eines gegebenen Punktes in Bezug auf ihn durch einen festen Punkt.[114])

Wenn $Q = 0$ und $Q' = 0$ die Polaren eines andern Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte $S = 0$ und $S' = 0$ darstellen, so ist seine Polare in Bezug auf $S + kS' = 0$ von der Gleichung $Q + kQ' = 0$. Wir erkennen damit (§ 269), *dafs die Polaren von zwei Punkten in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels zwei projectivische Strahlbüschel bilden.*

Ebenso liegen die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar $\Sigma + k\Sigma' = 0$ (§ 282) in einer Geraden, und die Pole von zwei Geraden in Bezug auf eine solche Schaar bilden zwei projectivische gerade Punktreihen.

Wir erinnern dabei an die Erzeugung der Kegelschnitte vermittelst projectivischer Büschel und Reihen, wie sie im § 293 entwickelt worden ist. Da der Schnittpunkt der Strahlen $P + kP' = 0$, $Q + kQ' = 0$ der in Bezug auf $S + kS' = 0$ genommene Pol der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte ist, so erkennen wir, *dafs der Ort des Pols einer gegebenen Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels ein Kegelschnitt ist.* Die Gleichung dieses Ortes ist $PQ' - P'Q = 0$. (Vgl. § 314, 1.)

Wenn *eine unbestimmte Gröfse im zweiten Grade* in der Gleichung eines Kegelschnittes auftritt, so mufs sie auch in demselben Grade in die Gleichung der Polare irgend eines Punktes in Bezug auf denselben eingehen; diese wird einen Kegelschnitt umhüllen, wenn jene veränderlich gedacht wird (§ 325).

Wenn z. B. ein Kegelschnitt mit zwei festen Kegelschnitten eine doppelte Berührung hat, so umhüllt die Polare eines festen Punktes einen von drei festen Kegelschnitten; denn die Gleichung jedes solchen Systems von Kegelschnitten enthält nach § 325, 2) die Gröfse μ im zweiten Grade.

B. 1) Das Doppelverhältnis von vier Punkten in einer Geraden ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer vier Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt. Das Doppelverhältnis der Punkte

$$l_1 x_i - m_1 x_i', \quad l_2 x_i - m_2 x_i', \quad l_3 x_i - m_3 x_i', \quad l_4 x_i - m_4 x_i'$$

ist in der Tat identisch mit dem der vier Geraden

$$l_1 P = m_1 P', \quad l_2 P = m_2 P', \quad l_3 P = m_3 P', \quad l_4 P = m_4 P'.$$

2) Gleichung des Paares der Tangenten eines Kegelschnittes $S = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Geraden $x_3 = 0$.

Die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $x_1' \mid x_2' \mid 0$ ist nach § 320 $x_1' S_1 + x_2' S_2 = 0$. Die Schnittpunkte von $x_3 = 0$ mit der Curve erhält man durch $a_{11} x_1'^2 + 2 a_{12} x_1' x_2' + a_{22} x_2'^2 = 0$ ausgedrückt. Die Elimination von x_1', x_2' zwischen diesen beiden Gleichungen liefert als Gleichung des Tangentenpaares

$$a_{11} S_2^2 - 2 a_{12} S_1 S_2 + a_{22} S_1^2 = 0.$$

Dies wird zur Gleichung der Asymptoten eines durch die allgemeine Gleichung in Cartesischen Coordinaten gegebenen Kegelschnittes; denn die Asymptoten sind die Tangenten der Curve in den Punkten, in denen sie von der unendlich fernen Geraden geschnitten wird. (Vgl. § 73.)

3) Wenn ein Kegelschnitt drei feste Punkte enthält und die eine seiner Asymptoten durch einen festen Punkt geht, so umhüllt die andere einen Kegelschnitt, der dem Dreieck der festen Punkte eingeschrieben ist.

Sind $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ die Asymptoten, und ist $l_x = 0$ die unendlich ferne Gerade, so ist die Gleichung des Kegelschnittes $t_1 t_2 = l_x^2$. Da derselbe durch die Fundamentalpunkte geht, so darf seine Gleichung die Glieder x_1^2, x_2^2, x_3^2 nicht enthalten; ist also t_1 von der Form a_x, so ist t_2 von der Form

$$\frac{l_1^2}{a_1} x_1 + \frac{l_2^2}{a_2} x_2 + \frac{l_3^2}{a_3} x_3;$$

wenn also $t_2 = 0$ durch den Punkt x_i' hindurchgeht, so berührt nach § 316 die andere Linie $t_1 = 0$ den Kegelschnitt

$$l_1 (x_1 x_1')^{\frac{1}{2}} + l_2 (x_2 x_2')^{\frac{1}{2}} + l_3 (x_3 x_3')^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dasselbe Argument beweist, daſs, wenn ein Kegelschnitt durch drei feste Punkte geht, und wenn eine seiner Schnittsehnen mit einem Kegelschnitt $S = 0$ die Gleichung hat $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, der anderen die Gleichung entspricht

$$\frac{a_{11}}{a_1} x_1 + \frac{a_{22}}{a_2} x_2 + \frac{a_{33}}{a_3} x_3 = 0.$$

4) Wenn in Bezug auf einen Kegelschnitt ein sich selbst conjugirtes Dreieck gegeben ist und eine seiner Schnittsehnen mit dem Kegelschnitt $S = 0$ durch einen festen Punkt geht, so umhüllt die andere einen Kegelschnitt.[115])

Da die Glieder $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$ in der Gleichung des gegebenen Kegelschnittes fehlen, so entspricht der Gleichung der einen Berührungssehne $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ die der andern

$$a_1 x_1 (a_2 a_{13} + a_3 a_{12} - a_1 a_{23}) + a_2 x_2 (a_3 a_{12} + a_1 a_{23} - a_2 a_{13}) \\ + a_3 x_3 (a_1 a_{23} + a_2 a_{13} - a_3 a_{12}) = 0.$$

5) Eine gemeinschaftliche Tangente t der Kegelschnitte $U = 0$, $V = 0$ berühre sie in den Punkten A', A'' von den Coordinaten x_i', x_i''; man denke P', P'' als veränderliche Punkte beider Kegelschnitte (einer in einem) und bestimme den Ort des Punktes C, in welchem sich $A'P'$ und $A''P''$ schneiden, unter der Voraussetzung, dafs $P'P''$ durch einen festen Punkt O in t geht.[116])

Wenn $P = 0$, $Q = 0$ die Polaren der Punkte x_i', x_i'' in Bezug auf die Kegelschnitte $U = 0$, $V = 0$ bez. bezeichnen, so ergeben sich nach § 319 aus den Coordinaten x_i des Punktes P', in welchem $A'C$ den Kegelschnitt zum zweitenmale schneidet, in der Form $Ux_i' - 2Px_i$ und die Coordinaten des Punktes P'' ebenso in der Form $Vx_i'' - 2Qx_i$. Wenn die Verbindungsgerade dieser Punkte durch den festen Punkt O geht, welchen wir als den Fundamentalpunkt $x_1 = x_2 = 0$ annehmen können, so mufs

$$(Ux_1' - 2Px_1) : (Ux_2' - 2Px_2) = (Vx_1'' - 2Qx_1) : (Vx_2'' - 2Qx_2)$$

sein; der fragliche Ort ist daher eine Curve vierter Ordnung, so lange die Punkte A', A'', O beliebig gewählt werden können. Müssen dieselben jedoch in einer Geraden liegen, so können wir diese als die Linie $x_1 = 0$ wählen, und für $x_1' = 0$, $x_1'' = 0$ wird die vorige Gleichung durch x_1 teilbar und reducirt sich auf die Curve dritter Ordnung $PVx_2'' = QUx_2'$.

Wenn aber endlich die gegebenen Punkte die Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente t sind, so repräsentiren $P = 0$ und $Q = 0$ dieselbe Gerade, und es läfst sich die Gleichung durch einen weitern Factor dividiren; sie reducirt sich also auf die Form $U = kV$ und bezeichnet einen Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegegelschnitte hindurchgeht.

6) Man soll dem Kegelschnitt $S = 0$ ein Dreieck einschreiben, dessen Seiten durch die drei Fundamentalpunkte gehen (§ 311).

Die Verbindungslinie des Punktes x_i der Curve mit dem Punkte x_i' ihrer Ebene hat noch einen Punkt von den Coordinaten $S'x_i - 2P'x_i'$ mit der Curve gemein (§ 319). Wenn dann der Punkt x_i' der Funtamentalpunkt $1 | 0 | 0$ ist, so erhalten wir

$S' = a_{11}$, $P' = S_1$, so dafs die Coordinaten des zweiten Schnittpunktes der Linie von x_i nach ihm die Werte $a_{11}x_1 - 2S_1 | a_{11}x_2 | a_{11}x_3$ haben. Ebenso schneidet die Linie von x_i nach dem Fundamentalpunkt $0|1|0$ die Curve ferner in $a_{22}x_1 | a_{22}x_2 - 2S_2 | a_{22}x_3$. Die Verbindungslinie dieser zwei Punkte geht durch den Punkt $0|0|1$,

wenn $$(a_{11}x_1 - 2S_1) : a_{11}x_2 = a_{22}x_1 : (a_{22}x_2 - 2S_2)$$

oder $$2S_1S_2 = a_{11}x_1S_2 + a_{22}x_2S_1$$

ist. Dies ist die von den Coordinaten des Scheitels zu erfüllende Bedingung. Wenn man in ihr einsetzt

$$a_{11}x_1 = S_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3, \quad a_{22}x_2 = S_2 - a_{12}x_1 - a_{23}x_3,$$

so wird sie in $a_{12}(x_1S_1 + x_2S_2) + x_3(a_{23}S_1 + a_{13}S_2) = 0$,

und, wegen $\Sigma x_iS_i = 0$, in $x_3(a_{23}S_1 + a_{13}S_2 - a_{12}S_3) = 0$

übergeführt. Der Factor x_3 hat für die geometrische Lösung des Problems keinen Wert; denn obwol jeder der Punkte, in denen $x_3 = 0$ die Curve schneidet, die Bedingung erfüllt, dafs seine Verbindungslinien mit den beiden anliegenden Fundamentalpunkten die Curve ferner in Punkten schneiden, die mit dem gegenüberliegenden $0|0|1$ in einer Geraden liegen, so entsprechen sie doch der Aufgabe insofern nicht, als diese Verbindungslinien zusammenfallen und daher nicht Seiten eines Dreiecks sein können.

Die Spitze des gesuchten Dreiecks ist daher einer von den Punkten, in welchen die Curve durch die Gerade aus $a_{23}S_1 + a_{13}S_2 - a_{12}S_3 = 0$ geschnitten wird. Man bestätigt nun direct nach § 60, 2 und § 320, 1, dafs die Gerade $a_{23}S_1 + a_{13}S_2 - a_{12}S_3 = 0$ die nach der Construction des § 311 erhaltene ist.

7) Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung mit einander haben, so wird jede Tangente des einen in ihrem Berührungspunkte, in der Berührungssehne beider Kegelschnitte und in den Schnittpunkten mit dem zweiten Kegelschnitt harmonisch geteilt. (§ 301, 8.)

Wenn wir in die Gleichung $S + R^2 = 0$ für x_i die Werte $lx_i' + mx_i''$ einsetzen, wo die Coordinaten der Punkte x_i', x_i'' der Gleichung $S = 0$ genügen, so erhalten wir aus ihr $(lR' + mR'')^2 + 2lmP = 0$. Wenn nun die Verbindungslinie x_i', x_i'' den Kegelschnitt $S + R^2 = 0$ berührt, so mufs diese Gleichung ein vollständiges Quadrat sein, d. h. es mufs $P = -2R'R''$ werden, so dafs die Gleichung selbst in $(lR' - mR'')^2 = 0$ übergeht. Diese beweist aber den Satz.

335. Das Büschel der Kegelschnitte $S + kS' = 0$ enthält für jeden Punkt seiner Ebene *einen* durch ihn gehenden Kegelschnitt (§ 268). Wenn S_0 und S_0' die Resultate der

Substitution der Coordinaten in die Polynome S und S' sind, so dafs $S_0 + kS_0' = 0$ ist, so lautet die Gleichung dieses Kegelschnittes $SS_0' - S'S_0 = 0$. Ebenso gehört in der Schaar $\Sigma + k\Sigma' = 0$ zu jeder Geraden der Ebene *ein* sie berührender Kegelschnitt.

Dagegen wird in jenem Büschel jede Gerade ξ_i durch zwei Curven desselben berührt (§ 301, 9), für welche die entsprechenden Parameter k durch die Substitution von $a_{ik} + ka_{ik}'$ für a_{ik} in die Determinante des § 322 gefunden werden, so dafs man erhält

$$\Omega \equiv \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{11}', & a_{12} + ka_{12}', & a_{13} + ka_{13}', & \xi_1 \\ a_{21} + ka_{21}', & a_{22} + ka_{22}', & a_{23} + ka_{23}', & \xi_2 \\ a_{31} + ka_{31}', & a_{32} + ka_{32}', & a_{33} + ka_{33}', & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

dies ist eine in Bezug auf k quadratische Gleichung. Ebenso gehen durch den Punkt x_i zwei Kegelschnitte der Schaar $\Sigma + k\Sigma' = 0$.

Die Schnittpunkte einer Geraden a_i mit den Curven des Systems $S + kS' = 0$ findet man durch Combination der drei Gleichungen

$$a_x = 0, \quad \xi_x = 0, \quad S + kS' = 0;$$

also ist die Gleichung eines Paares

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{11}', & a_{12} + ka_{12}', & a_{13} + ka_{13}', & a_1, & \xi_1 \\ a_{21} + ka_{21}', & a_{22} + ka_{22}', & a_{23} + ka_{23}', & a_2, & \xi_2 \\ a_{31} + ka_{31}', & a_{32} + ka_{32}', & a_{33} + ka_{33}', & a_3, & \xi_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

eine in k lineare Gleichung, die wir in der Form $\Phi + k\Psi = 0$ schreiben können. Setzt man für k die aus $\Omega = 0$ bestimmten Werte k_0, k_0' in den Ausdruck $\Phi + k\Psi$ ein und erhält bez. die Werte K_0^2, $K_0'^2$ so ist die Gleichung eines Paares allgemein

$$K_0^2 (k_0' - k) = K_0'^2 (k_0 - k).$$

Die Paare der Schnittpunkte bilden hiernach eine Involution, welche die Berührungspunkte der Geraden mit den Kegelschnitten des Büschels zu Doppelpunkten hat. (§ 301.)

Ebenso bestimmt ein Punkt mit der Schaar $\Sigma + k\Sigma' = 0$ ein involutorisches Büschel von Tangentenpaaren, welches die in ihm berührenden Tangenten der beiden durch ihn hindurchgehenden Kegelschnitte der Schaar zu Doppelstrahlen hat.

Wenn insbesondere der eine der beiden festen Kegelschnitte $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ in das Paar der absoluten Richtungen (§ 333) degenerirt, so sind die ihm mit dem andern festen Kegelschnitt gemeinschaftlichen Tangenten die vier Geraden, welche jene mit den Brennpunkten des letzteren verbinden, und nach § 313 ist dann $\Sigma + k\Sigma' = 0$ *eine Schaar von confocalen Kegelschnitten.* Auch von dieser Schaar gehen durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte, während jede Gerade von einem derselben berührt wird. Die Involution der Tangentenpaare der Schaar an irgend einem Punkte hat rechtwinklige Doppelstrahlen, da diese mit jedem Paare, also auch mit dem absoluter Richtung, eine harmonische Gruppe bilden (§ 301, 12). Da sie die Tangenten der beiden durch den Punkt gehenden Kegelschnitte des Systems sind, schneiden sich confocale Kegelschnitte rechtwinklig.

B. 1) Man bestimme die Coordinaten der Berührungspunkte einer Geraden $a_x = 0$ mit dem Büschel $S + kS' = 0$.

Ordnet man die Determinante Ω nach den Elementen der Reihe der ξ_i und bezeichnet die entsprechenden Unterdeterminanten durch Ω_i, so hat man für die Coordinaten x_i die Relationen $\mu x_i = \Omega_i$.

2) Die Tangenten der Curven des Büschels in ihren Schnittpunkten mit einer Geraden umhüllen eine Curve dritter Classe, welche die gegebene Gerade zur Doppeltangente hat.

Man bildet die Gleichung dieser Curve für $a_x = 0$ als die Gleichung der Geraden, $\xi_x = 0$ als die der Tangente und mit den drei Relationen $\mu \xi_i = S_i + kS_i'$, indem man in die durch Elimination zwischen diesen erhaltene Determinante für die x_i die Werte substituirt, welche aus der Gleichung der Tangente und der Gleichung der gegebenen Geraden gewonnen werden.

336. **Bestimmung der Kegelschnitte durch lineare Bedingungen.** Fünf Bedingungen bestimmen einen Kegelschnitt, so dafs *im allgemeinen m Punkte und n Tangenten desselben gegeben sein können, sofern $m + n = 5$ ist.* Die speciellen

Fälle der Lage eines dieser Bestimmungs-Elemente oder mehrerer von ihnen erfordern nur sehr einfache Modificationen der Construction des entsprechenden allgemeinen Falles.

Wenn z. B. eine Parallele zu einer Asymptote gegeben ist, so vertritt dieselbe einen unendlich fernen Punkt, die Angabe der Richtung einer Asymptote ist also *einer* Bedingung äquivalent. Eine Asymptote der Curve ist *zwei* Bedingungen äquivalent, weil eine Tangente und ihr Berührungspunkt gegeben sind. Die Bestimmung, dafs die Curve eine Parabel sein soll, ist *eine* Bedingung, denn es ist damit die unendlich ferne Tangente gegeben. Dagegen wiegt die Bezeichnung der Curve als Kreis *zwei* Bedingungen auf, weil dann die Curve durch zwei bestimmte unendlich ferne Punkte gehen mufs. Die Angabe eines Brennpunktes ersetzt *zwei* Bedingungen, denn sie bestimmt zwei Tangenten der Curve (§ 313), in der Tat bestimmt ein Brennpunkt mit drei andern Bedingungen den Kegelschnitt.

Die Angabe des Pols einer gegebenen Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt ist zwei Bedingungen äquivalent, drei weitere Bedingungen bestimmen die Curve. Denn (vgl. Fig. § 157) für P als den Pol von $R'R''$ in Bezug auf den Kegelschnitt und T als einen Punkt des letzteren ist auch T', der vierte harmonische Punkt zu P, T und PT, $R'R''$, ein Punkt desselben; und die Tangenten in T und T' schneiden sich in einem Punkte O der Polare $R'R''$. So bestimmt man aus einem gegebenen Pol und seiner Polare zu drei Punkten oder Tangenten drei weitere Punkte oder Tangenten derselben Curve und damit diese selbst. Darum ist auch insbesondere die Angabe des Centrums als des Pols der unendlich fernen Geraden *zwei* Bedingungen äquivalent. Brennpunkt und Directrix zählen für *vier* Bedingungen, weil zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte damit gegeben sind.

Dagegen ist es *einer* Bedingung äquivalent, wenn zwei Punkte als harmonische Pole bezeichnet sind. Dahin gehört die Bestimmung der Curve als gleichseitige Hyperbel; denn sie sagt aus, dafs die beiden absoluten Richtungen harmonische Pole sind. Somit ist die Bestimmung eines sich selbst con-

jugirten Dreiecks *drei* Bedingungen äquivalent, wie auch die auf dasselbe bezogene Gleichung nur zwei unabhängige Constanten enthält (§ 312). Wenn für eine Parabel ein Tripel harmonischer Pole gegeben ist, so sind durch dasselbe drei endliche Tangenten der Curve bestimmt und ist daher nur noch einer Bedingung zu genügen möglich. Die ersteren Bedingungen sind *linear für Punktcoordinaten, aber quadratisch für Liniencoordinaten*, insofern es sich um die Bestimmung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung handelt. Dualistisch entsprechendes gilt für ein Paar harmonischer Polaren. Die Angabe eines Durchmessers ist ein specieller Fall hiervon. Zwei conjugirte Durchmesser zählen für *drei* und die Involution conjugirter Durchmesser für *vier* Bedingungen; jede Involution harmonischer Pole für zwei Bedingungen, etc.

1. *Fünf Punkte.* Man hat zur Bestimmung der Coefficienten von $S = 0$ fünf lineare Gleichungen. Aus jenen Punkten können mittelst des Lineals allein beliebig viele andere Punkte der Curve construirt werden. Auch kann man durch dieselbe Construction die Polare eines Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt ermitteln. Die Polaren von zwei Punkten einer Geraden liefern als ihren Schnittpunkt den Pol derselben, speciell z. B. das Centrum. Die Tangente eines Punktes der Curve bestimmt sich als die Verbindungsgerade desselben mit dem unendlich nahen Punkte der Curve. Ob die durch fünf Punkte bestimmte Curve elliptisch oder hyperbolisch ist, entscheidet sich durch die sich selbst entsprechenden *Richtungen* der Strahlbüschel von zweien derselben nach den übrigen (§ 295).

2. *Fünf Tangenten.* Die Coefficienten von $\Sigma = 0$ bestimmen sich durch fünf lineare Gleichungen, daher alle andern Tangenten durch lineare Construction, zugleich die Berührungspunkte als Schnitte unendlich naher Tangenten (§ 281).

Der Pol einer Geraden bestimmt sich als der Schnittpunkt von zwei Geraden, welche zu ihr polar-conjugirt sind, specieller wieder das Centrum (§ 331).

3. *Vier Punkte und eine Tangente* führen zur Bestimmung durch eine quadratische Gleichung für den Parameter der Kegelschnitte durch die vier gegebenen Punkte (§ 335). Man

construirt nach der Eigenschaft des eingeschriebenen Vierecks durch seine Gegenseitenpaare auf jeder Geraden eine Involution, der auch die Schnittpunkte mit der Curve angehören; die Berührungspunkte einer Tangente sind ihre Doppelpunkte (§ 301, 9).

Weil zwei Auflösungen dem Problem entsprechen, so kann eine lineare Construction für dasselbe nicht erwartet werden. Auch der Satz von Carnot (§ 327) kann zur Auflösung des Problems verwendet werden (B. 1). Indem man bemerkt, dafs durch vier Punkte des Kegelschnittes in dem Diagonalendreiseit des durch sie bestimmten Vierecks drei Pole und ihre Polaren gegeben sind, leitet man aus der einen bekannten Tangente drei andere Tangenten ab und gelangt so zu vier Punkten und vier Tangenten.

4. *Vier Tangenten und ein Punkt* bestimmen den Kegelschnitt durch die dualen analytischen Bedingungen und Constructionen.

5. *Drei Punkte und zwei Tangenten.* Man hat für die a_{ik} drei lineare und zwei quadratische Bedingungen, und man schliefst nach einem speciellen Falle des Satzes in § 301, dafs eine Gerade den Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten in Punktepaaren a, b und A, B einer Involution schneidet, welcher der Schnittpunkt mit der Berührungssehne der Tangenten als einer der Doppelpunkte F, F' angehört. Jede der drei Geraden ab, bc, ca bestimmt so in den Doppelpunkten der durch ihre Enden und ihre Schnitte mit den gegebenen Tangenten gebildeten Involution Punkte der Berührungssehne jener Tangenten; sie liegen viermal zu dreien in einer Geraden, das Problem hat somit vier Auflösungen. Hierhin gehört die Bestimmung der durch drei Punkte gehenden Kegelschnitte mit einem gegebenen Brennpunkte.

6. *Drei Tangenten und zwei Punkte.* Man hat die dualen Gleichungen und Constructionen; das Dreieck der drei Berührungssehnen hat seine Ecken in den gegebenen Tangenten und nach dem Vorigen gehen seine Seiten je durch einen festen Punkt der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte.

7. Die Angabe von zwei Punkten oder zwei Tangenten ist ein specieller Fall von der *doppelten Berührung mit einem*

gegebenen Kegelschnitt; des allgemeineren Problems ist an verschiedenen Stellen des Vorigen gedacht worden. Für die Bestimmung durch drei Tangenten oder drei Punkte und die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt sehe man § 311, 5); für die durch einen Punkt oder eine Tangente und die doppelte Berührung mit zwei gegebenen Kegelschnitten § 325, 2); für die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt und die Berührung mit drei andern Kegelschnitten, die diesen selbst doppelt berühren, § 361, 1).

8. Zwei gegebene Punkte oder Tangenten sind ersetzbar durch die dem Kegelschnitt entsprechende Involution harmonischer Pole bez. Polaren in ihrer Verbindungslinie bez. um ihren Schnittpunkt. Damit werden *die Fälle imaginärer Paare* unter den bestimmenden Punkten oder Tangenten mit umfaſst. (Vgl. § 299, 6 f.)

Die Aufnahme von Normalen unter die Bestimmungselemente gestattet keine Constructionen mit Lineal und Zirkel allein, ebenso die von berührenden Kegelschnitten im allgemeinen oder von Kegelschnitten, welche unter gegebenen Winkeln geschnitten werden; etc.

Achtzehntes Kapitel.

Invariantentheorie der binären Formen.

---

337. **Binäre Gleichungen.** Jede Curve n^{ter} Ordnung bestimmt mit einer beliebigen Geraden eine Gruppe von n Schnittpunkten (§ 22), jede Curve n^{ter} Classe mit einem beliebigen Punkte eine Gruppe von n Tangenten. Durch Transformation der Coordinaten kann die Gerade stets zu einer Seite, der Punkt zu einer Ecke eines Fundamentaldreiecks gemacht werden. Dann liefert die Substitution von $x_i = 0$ bez. $\xi_i = 0$ in die ternäre Gleichung der Curve die binäre Gleichung des n-strahligen zur Schnittpunktgruppe perspectivischen Büschels aus der Gegenecke, bez. die Gleichung der n-punktigen zum Tangentenbüschel perspectivischen Reihe in der Gegenseite.

Nun brauchen wir zur Untersuchung der Punktreihen und Strahlbüschel überhaupt nur zwei homogene Coordinaten. Sind in einer Reihe zwei Fundamentalpunkte gegeben, so können als die Coordinaten $x_1 \,|\, x_2$ eines beliebigen Punktes seine durch Constanten $e_1 \,|\, e_2$ dividirten Abstände von jenen genommen werden (§ 78). Ebenso sind die Coordinaten $\xi_1 \,|\, \xi_2$ eines Strahls eines Büschels in Bezug auf zwei Fundamentalstrahlen die durch Constante $\varepsilon_1 \,|\, \varepsilon_2$ dividirten Sinus seiner Winkel gegen diese. Definiren wir die Constanten als Coordinaten eines Einheitpunktes und eines Einheitstrahles (§ 85), so ist die Bedeutung der Coordinaten in Reihe und Büschel dieselbe, d. h. eine Unterscheidung von Punkt- und Liniencoordinaten ist gegenstandslos.

In diesem Sinne der Interpretation sind die Schnittpunktreihen und Tangentenbüschel einer Curve durch ho-

mogene Gleichungen desselben Grades mit zwei Veränderlichen analytisch ausgedrückt. Eine Untersuchung solcher binärer Gleichungen wird daher die Grundlage zu weiteren Ergebnissen des im vorigen Kapitel begonnenen Studiums der ternären Gleichungen zweiten Grades bilden.[117])

Die lineare binäre Form schreiben wir

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

und die Form n^{ten} Grades symbolisch als n^{te} Potenz a_x^n. Die Transformation der Coordinaten zu neuen Fundamentalelementen wird vermittelt durch

$$\varrho x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2', \quad \varrho x_2 = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2'.$$

Bei unveränderter Coordinateninterpretation ist dies zugleich der Ausdruck der projectivischen Zuordnung zweier Reihen (Büschel) x_i und x_i'. Man bemerkt, dafs die Coefficienten $a_1 \,|\, a_2$ der linearen Form, überhaupt also die symbolischen Coefficienten durch dieselbe Substitution geändert werden, wie die Coordinaten $x_2 \,|\, -x_1$.

Die binäre Gleichung n^{ten} Grades hat $n+1$ Coefficienten oder n Constanten, die n Wurzeln $x_1^{(1)} : x_2^{(1)}, \ldots x_1^{(n)} : x_2^{(n)}$ oder $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. Die Determinanten $x_2^{(i)} x_1 - x_1^{(i)} x_2$ nennt man die Linearfactoren der Form.

338. **Discriminante.** Projectivische Punktreihen oder Strahlbüschel sind durch drei Paare homologer Elemente bestimmt, denn die Coefficienten der linearen Substitution sind dann bis auf einen constanten gemeinsamen Factor zu berechnen. Somit kann *im allgemeinen* jede quadratische bez. cubische Gleichung in jede andere quadratische bez. cubische Gleichung linear transformirt werden, da deren Coefficientenzahl die der Substitution nicht übersteigt. Dagegen können Gleichungen höherer Grade im allgemeinen *nicht* in einander linear transformirt werden. Zwei biquadratische Gleichungen stellen nur dann projectivische Gruppen von je vier Punkten dar, wenn bei irgend einer Zuordnung derselben die Doppelverhältnisse gleich sind.

Wir haben auch schon erkannt, welche quadratische Gleichungen oder welche Punktepaare nicht linear verwandt

sind. Da jeder einzelne Linearfactor wieder in einen Linearfactor transformirt wird, so kann ein vollständiges Quadrat nur wieder in ein solches übergehen. Wenn also die Discriminante $\varDelta$ (früher **D**) einer gegebenen Gleichung Null ist, so verschwinden auch die Discriminanten aller linear transformirten Gleichungen. Daher kann die Discriminante durch die Transformation nur durch den Zutritt eines von dieser abhängigen Factors geändert werden. In der Tat wird $a_x^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ zu

$$\{a_{11}\alpha_{11}^2 + 2a_{12}\alpha_{11}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{21}^2\}\, x_1'^2$$
$$+ \{a_{11}\alpha_{12}^2 + 2a_{12}\alpha_{12}\alpha_{22} + a_{22}\alpha_{22}^2\}\, x_2'^2$$
$$+ 2\{a_{11}\alpha_{11}\alpha_{21} + a_{12}(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + a_{22}\alpha_{21}\alpha_{22}\}\, x_1'x_2' = 0$$

und nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten

$$\varDelta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \text{ zu}$$
$$\varDelta' = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2 = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})^2 (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \Delta^2 . \varDelta.$$

Die Discriminante $\varDelta'$ der transformirten Form ist das Product aus der Discriminante $\varDelta$ der ursprünglichen Form in das Quadrat des Substitutionsmoduls Δ. Lassen wir nur reelle Transformationen zu, so folgt, dafs nur Gleichungen mit Discriminanten von übereinstimmenden Vorzeichen linear verwandt sind.

Die Discriminante einer binären Form ist allgemein die Resultante ihrer partiellen Ableitungen (Vorles. Art. 105), insbesondere diejenige einer quadratischen Form die Determinante ihrer linearen Ableitungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0;$$

als Function der Wurzeln α_1, α_2 lautet sie dann, wegen

$$\alpha_1\alpha_2 = a_{22} : a_{11}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -2a_{12} : a_{11}, \quad 4\varDelta = -a_{11}^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

Die Ableitungen der transformirten quadratischen Form $a_{x'}'^2 = 0$ gehen aus den vorigen nicht einfach dadurch hervor, dafs man die ursprünglichen Ableitungen transformirt, sondern es besteht die Identität

$$a_{11}'x_1' + a_{12}'x_2' = \alpha_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \alpha_{21}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$
$$a_{12}'x_1' + a_{22}'x_2' = \alpha_{12}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \alpha_{22}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$

sobald die x_i linear durch die x_i' ausgedrückt werden. Die

neuen Ableitungen entstehen aus den ursprünglichen also so, wie wenn diese als Elemente einer Transformation unterworfen würden, welche zu der auf die x_i angewandten als die transponirte (§ 88) gehört.

339. **Invarianten.** Die Discriminante gehört zu der Gattung wichtiger Functionen, welche man Invarianten nennt (§ 88). *Invariante heifst eine algebraische Function* $J(a)$ *der Coefficienten a einer Form, wenn nach linearer Transformation der Form dieselbe Function* $J(a')$ *der transformirten Coefficienten* a' *ein Product von* J *in eine Potenz des Substitutionsmoduls ist:*

$$J(a') = \Delta^r \cdot J(a).$$

Man bezeichnet eine solche Function als unveränderlich oder invariant bis auf einen Factor Δ^r, insbesondere als *absolute Invariante,* wenn dieser Factor Eins ($J(a') = J(a)$) ist (Vorl. Art. 122).

Die Bildung solcher Invarianten ist eine Hauptaufgabe der analytischen Geometrie, welche theoretisch in der „Algebra der linearen Transformationen“ gelöst ist. *Das Verschwinden einer Invariante drückt eine projectivische Eigenschaft des durch die Gleichung dargestellten Gebildes aus.* In der Tat verschwindet dieselbe Coefficientenfunction für alle projectivischen Gebilde gleichzeitig. Wir können dafür auch gleichbedeutend sagen, dafs die definirte Eigenschaft des gegebenen Gebildes vom Coordinatensystem unabhängig ist (§ 91).

Eine Form, welche mehr als eine Invariante besitzt, hat auch absolute Invarianten, z. B. $J_1^s : J_2^r$, wenn zwei Invarianten $J_1(a') = \Delta^r . J(a)$, $J_2(a') = \Delta^s . J_2(a)$ lauten. *Damit zwei Formen linear verwandt seien, müssen auch ihre absoluten Invarianten übereinstimmen.* Nun können die Substitutionscoefficienten stets so bestimmt werden, dafs vier transformirte Coefficienten gegebene Werte haben, also müssen noch $n - 3$ Relationen zwischen den Coefficienten der beiden Formen erfüllt sein. Diese Relationen lassen sich aber stets durch Gleichheiten absoluter Invarianten ersetzen.[118]) Demnach besitzt eine binäre Form n^{ten} Grades $n - 3$ unabhängige absolute Invarianten, die biquadratische Form z. B. eine. Eine quadra-

tische oder cubische Form kann daher auch nicht mehr als eine Invariante überhaupt haben, nämlich ihre Discriminante.

Die Definition der *Invarianteneigenschaft* durch obige Functionalgleichung ist nicht an Functionen von Coefficienten *einer* Form gebunden. *Eine algebraische Function* J *der Coefficienten a, b, ... mehrerer Formen, welche bei gleichzeitiger Transformation derselben invariant ist, heifst eine Simultaninvariante derselben* (Invariante des Systems simultaner Formen):

$$J(a', b', ..) = \Delta^r . J(a, b, ..).$$

Das Verschwinden einer Simultaninvariante definirt eine projectivische Beziehung der gleichzeitig untersuchten Gebilde. Hier treten $n + m + \cdots - 4$ absolute Simultaninvarianten als Transformationsbedingungen der Systeme neben den absoluten Invarianten der einzelnen Gebilde auf.

Zwei lineare Formen a_x, b_x haben nur eine Simultaninvariante, ihre Determinante $a_1 b_2 - a_2 b_1$. Denn es ist

$$a_1' b_2' - a_2' b_1' = \Delta . (a_1 b_2 - a_2 b_1);$$

und eine zweite Invariante kann nicht existiren, weil zwei getrennten Punkten irgend zwei andere getrennte Punkte projectivisch zugeordnet werden können.

Ganz allgemein gilt der Satz: Gleichungen oder Gleichungssysteme derselben Grade sind äquivalent oder stellen projectivische Gebilde dar, wenn gleichgebildete Invarianten gleichzeitig Null und alle gleichgebildeten absoluten Invarianten gleichwertig sind.

340. **Harmonische Invariante.** Zwei quadratische Gleichungen $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ können nicht simultan in zwei beliebige andere $a_x'^2 = 0$, $b_x'^2 = 0$ linear transformirt werden; als geometrische Bedingung ist notwendig und hinreichend die Gleichheit der Doppelverhältnisse der Elementenpaare. Bildet man aus den Wurzelpaaren α_1, α_2; β_1, β_2 der gegebenen Gleichungen das Doppelverhältnis $d = (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2)$, so ist

$$\frac{1+d}{1-d} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)}$$

und in den Coefficienten ausgedrückt

$$\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\{2a_{11}b_{22} - (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})\}^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}.$$

Somit ist die rechte Seite hier eine absolute Simultaninvariante des Gleichungspaares.

Der Nenner ist das Product der beiden Discriminanten Δ_1, Δ_2, ändert sich also um $\triangle^4$ bei der Transformation. Daher ist auch die Quadratwurzel aus dem Zähler eine Invariante, die sich um $\triangle^2$ ändert. Das Verschwinden des Nenners zeigt, daſs zwei Elementenpaare nur dann $d = 1$ ergeben, wenn das eine von ihnen aus zusammenfallenden Elementen besteht (§ 80). Der Zähler dagegen verschwindet, wenn $d = -1$ ist, d. h. *für die harmonische Trennung der beiden Elementenpaare ist die Bedingung*

$$\Theta \equiv a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} = 0,$$

in der Tat die schon in § 14, 2 gefundene Relation.

Die linke Seite dieser Relation mag daher als *die harmonische Simultaninvariante* Θ bezeichnet werden. Algebraisch folgt ihre Invarianteneigenschaft unmittelbar daraus, daſs Θ sich in der symbolischen Form $(a_1b_2 - a_2b_1)^2$ schreiben läſst, d. h. als das Quadrat der Simultaninvariante der linearen Formen a_x, b_x (§ 339).

341. **Resultante.** Aus der absoluten Simultaninvariante des vorigen § sind weitere Invarianten abzuleiten. So ergibt sowol $d = 0$ als $d = \infty$ die Relation

$$\Theta^2 - 4\Delta_1\Delta_2 = 0$$

als die Bedingung, damit die Gleichungen $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ eine gemeinsame Wurzel haben, d. h. als ihre Resultante. In der Tat lautet die linke Seite, in den Wurzeln geschrieben,

$$\{(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2) - 2(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)\}^2 - (\alpha_1-\alpha_2)^2(\beta_1-\beta_2)^2$$
$$= 4(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2).$$

Nun ist $\Theta^2 - 4\Delta_1\Delta_2$ aber eine Invariante, *denn jede rationale Function von* Δ_1, Δ_2, Θ *besitzt die Invarianteneigenschaft.* Absolute Invarianten sind unter den rational gebrochenen Functionen offenbar diejenigen, welche bezüglich der Coeffi-

cienten die nullte Dimension haben. Umgekehrt lehrt die Invariantentheorie, *dafs überhaupt alle Invarianten des quadratischen Formenpaares sich durch Δ_1, Δ_2, Θ rational ausdrücken lassen.*

Die Resultante speciell kann man auch direct in Determinantenform bilden. Multiplicirt man die beiden Formen a_x^2, b_x^2 mit den linearen Binomen β_x, α_x bez., so müssen sich deren Coefficienten so bestimmen lassen, dafs die Producte $a_x^2\beta_x$ und $b_x^2\alpha_x$ identisch sind. Denn dazu müssen α_x und β_x nur diejenigen Linearfactoren sein, welche in den quadratischen Formen a_x^2 und b_x^2 zu dem vorausgesetzten gemeinsamen Linearfactor hinzu treten. Die viergliedrige Identität

$$a_x^2\beta_x - b_x^2\alpha_x = 0$$

liefert somit die in α_1, α_2, β_1, β_2 linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}\beta_1 \qquad\qquad & - b_{11}\alpha_1 & = 0, \\ 2a_{12}\beta_1 + a_{11}\beta_2 & - 2b_{12}\alpha_1 - b_{11}\alpha_2 & = 0, \\ a_{22}\beta_1 + 2a_{12}\beta_2 & - b_{22}\alpha_1 - 2b_{12}\alpha_2 & = 0, \\ a_{22}\beta_2 & \qquad\qquad - b_{22}\alpha_2 & = 0. \end{aligned}$$

Die Resultante ist also die Bedingung ihrer Coexistenz

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & 0, & b_{11}, & 0 \\ 2a_{12}, & a_{11}, & 2b_{12}, & b_{11} \\ a_{22}, & 2a_{12}, & b_{22}, & 2b_{12} \\ 0, & a_{22}, & 0, & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

welche man auch leicht umformt in

$$\begin{vmatrix} 2(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}), & a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} \\ a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}\;, & 2(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}) \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$4\,(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})\,(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}) - (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 = 0.$$

B. 1) Das Doppelverhältnis zweier Elementenpaare lautet in Function der Invarianten

$$d = \frac{\Theta - 2\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}{\Theta + 2\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}.$$

2) Man soll den Ort eines Punktes so bestimmen, dafs die von ihm an zwei feste Kegelschnitte gezogenen Tangenten ein harmonisches Büschel bilden.

Wir denken die beiden Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polardreieck bezogen

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0, \qquad b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0.$$

Dann wird das vom Punkte x' an den ersten Kegelschnitt gehende Tangentenpaar ausgedrückt durch

$$(a_{11}x_1'^2 + \cdot\cdot)(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot) = (a_{11}x_1x_1' + a_{22}x_2x_2' + a_{33}x_3x_3')^2,$$

und die Schnittpunkte des Tangentenpaares in der Fundamentallinie $x_3 = 0$ durch die Gleichung

$$a_{11}(a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2)x_1^2 + a_{22}(a_{33}x_3'^2 + a_{11}x_1'^2)x_2^2 = 2a_{11}a_{22}x_1'x_2'x_1x_2.$$

Indem man die Bedingung bildet, unter welcher das so bestimmte Punktepaar mit dem ebenso aus der Gleichung des zweiten Kegelschnittes abgeleiteten Paare eine harmonische Teilung gibt, erhält man die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$a_{11}b_{22}(a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2)(b_{33}x_3^2 + b_{11}x_1^2)$$
$$+ a_{22}b_{11}(a_{33}x_3^2 + a_{11}x_1^2)(b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2) = 2a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}x_1^2x_2^2$$

oder $a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2$
$$+ a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2 = 0.$$

Die wichtigen Beziehungen dieses Kegelschnittes $F = 0$ zu den gegebenen werden wir im § 357 und 369 kennen lernen.

3) Der Ort eines Punktes, dessen Tangentenbüschel zu zwei Kegelschnitten ein bestimmtes Doppelverhältnis haben, ist eine Curve vierter Ordnung $F^2 - kS_1S_2 = 0$, wenn $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ die gegebenen Kegelschnitte, $F = 0$ den in 2) gefundenen Ort ausdrücken.

Wie hängt k von dem gegebenen Doppelverhältnis ab?

4) Wenn in die Gleichungen von zwei Kegelschnitten $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ für x_i, $\lambda x_i + \mu x_i'$ substituirt werden, so geht aus den in der Form

$$\lambda^2 S_1 + 2\lambda\mu P_1 + \mu^2 S_1' = 0, \quad \lambda^2 S_2 + 2\lambda\mu P_2 + \mu^2 S_2' = 0$$

(§ 319) geschriebenen Substitutionsresultaten ebenso wie oben hervor, dafs $S_1S_2' + S_1'S_2 - 2P_1P_2 = 0$ das Linienpaar darstellt, welches durch den Punkt x_i' so gezogen werden kann, dafs es von den beiden Kegelschnitten in harmonischen Punkten geschnitten wird. In demselben Falle ist die Gleichung des Systems der vier Geraden vom Punkte x_i' nach den Schnittpunkten der Kegelschnitte

$$(S_1S_2' + S_1'S_2 - 2P_1P_2)^2 = 4(S_1S_1' - P_1^2)(S_2S_2' - P_2^2),$$

und $S_1S_1' = P_1^2$, $S_2S_2' = P_2^2$ repräsentiren die Paare ihrer Tangenten von x_i' aus.

5) Welches ist die Enveloppe der Kegelschnitte, die durch drei gegebene Punkte gehen und eine feste Strecke harmonisch teilen?

Wir denken die drei Punkte als Fundamentalpunkte, also den Kegelschnitt von der Gleichung

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$$

und nehmen x_i' und x_i'' für die Coordinaten der Streckenendpunkte. Dann sind die dem Doppelverhältnis d entsprechenden Teilpunkte von den Coordinaten $cx_i'' + x_i'$, $cx_i'' + dx_i'$ für ein veränderliches c; die Gleichung des Kegelschnittes ist $0 =$

$$\begin{vmatrix} x_2x_3, & x_3x_1, & x_1x_2 \\ (cx_2''+x_2')(cx_3''+x_3'), & (cx_3''+x_3')(cx_1''+x_1'), & (cx_1''+x_1')(cx_2''+x_2') \\ (cx_2''+dx_2')(cx_3''+dx_3'), & (cx_3''+dx_3')(cx_1''+dx_1'), & (cx_1''+dx_1')(cx_2''+dx_2') \end{vmatrix}$$

d. h. durch Entwickelung und mit $\xi_i = x_j'x_k'' - x_j''x_k'$,

$$\begin{aligned} &c^2(\xi_1x_1''^2x_2x_3 + \xi_2x_2''^2x_3x_1 + \xi_3x_3''^2x_1x_2) \\ &+ c(1+d)\{\xi_1x_1'x_1''x_2x_3 + \xi_2x_2'x_2''x_3x_1 + \xi_3x_3'x_3''x_1x_2\} \\ &+ d\{\xi_1x_1'^2x_2x_3 + \xi_2x_2'^2x_3x_1 + \xi_3x_3'^2x_1x_2\} = 0. \end{aligned}$$

Demnach ist die Gleichung der Enveloppe

$$\begin{aligned} 0 = &4d(\xi_1x_1'^2x_2x_3 + \xi_2x_2'^2x_3x_1 + \xi_3x_3'^2x_1x_2)(\xi_1x_1''^2x_2x_3 + \cdot\cdot) \\ &- (1+d)^2(\xi_1x_1'x_1''x_2x_3 + \xi_2x_2'x_2''x_3x_1 + \xi_3x_3'x_3''x_1x_2)^2 \end{aligned}$$

oder
$$\begin{aligned} &4d\xi_1\xi_2\xi_3x_1x_2x_3(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3) \\ &= (1-d)^2(\xi_1x_1'x_1''x_2x_3 + \xi_2x_2'x_2''x_3x_1 + \xi_3x_3'x_3''x_1x_2)^2; \end{aligned}$$

dieselbe ist also eine Curve vierter Ordnung, die die Ecken des Fundamentaldreiecks zu Doppelpunkten hat und von der Geraden der Strecke in ihren beiden Endpunkten berührt wird. Für die harmonische Teilung insbesondere reducirt sich die Gleichung auf das Product der Kegelschnittgleichungen

$$\xi_1x_1'^2x_2x_3 + \cdots = 0, \quad \xi_1x_1''^2x_2x_3 + \cdots = 0,$$

d. h. die Enveloppe ist der vierte Punkt, der diesen beiden Kegelschnitten gemeinsam ist. *Alle einem festen Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitte, die eine feste Strecke harmonisch teilen, gehen durch einen festen Punkt.* (Vgl. § 362, 6 f.)

342. **Covarianten.** In ihrer letzterhaltenen Form stellt sich die Resultante zweier quadratischer Formen dar als die Discriminante einer dritten quadratischen Gleichung

$$(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})x_1^2 + (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})x_1x_2 + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})x_2^2 = 0.$$

Diese definirt nach § 15 das zu den beiden gegebenen gleichzeitig harmonisch conjugirte Elementenpaar.

Nun sind in der Projectivität, welche $a_x'^2 = 0$, $b_x'^2 = 0$ den Paaren $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ zuordnet, auch die gemeinsamen harmonischen Paare homolog. Also mufs obige Gleichung durch lineare Transformation äquivalent werden mit der Gleichung, welche ebenso aus dem transformirten Gleichungspaar d. h. mit a_{11}', a_{12}', a_{22}' statt a_{11}, a_{12}, a_{22} gebildet ist. Wirklich ist die linke Seite der letzteren gleich der mit Δ multiplicirten linken Seite der ersteren.

Man beweist dies durch die Darstellung der Gleichung in der Form einer *Functionaldeterminante*

$$F \equiv \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2, & b_{12}x_1 + b_{22}x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

deren Elemente die partiellen Ableitungen von a_x^2, b_x^2 nach x_1, x_2 sind. Sofern $x_1 | x_2$ und $x_1' | x_2'$ durch die Substitution identisch verbunden sind, bestehen zwischen den Ableitungen einer Form S beliebigen Grades die Identitäten (vgl. § 339)

$$\frac{\partial S}{\partial x_1'} = \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} = \alpha_{11} \frac{\partial S}{\partial x_1} + \alpha_{21} \frac{\partial S}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2'} = \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} = \alpha_{12} \frac{\partial S}{\partial x_1} + \alpha_{22} \frac{\partial S}{\partial x_2}.$$

Da somit die Ableitungen invers transformirt werden, so gilt allgemein die Determinantenrelation

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_1'}\frac{\partial S_2}{\partial x_2'} - \frac{\partial S_1}{\partial x_2'}\frac{\partial S_2}{\partial x_1'} = \Delta \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_1}\frac{\partial S_2}{\partial x_2} - \frac{\partial S_1}{\partial x_2}\frac{\partial S_2}{\partial x_1}\right),$$

z. B. auch $F' = \Delta \,.\, F$.

Covariante einer Form oder mehrerer simultanen Formen heifst eine Function $\mathbf{C}(x, a)$ *der Variabeln und der Coefficienten, wenn nach linearer Transformation dieselbe Function* $\mathbf{C}(x', a')$ *der neuen Variabeln und neuen Coefficienten ein Product von* $\mathbf{C}(x, a)$ *in eine Potenz* Δ^r *des Substitutionsmoduls ist.* Somit ist die Functionaldeterminante zweier binärer Formen eine Simultancovariante derselben; man nennt sie die *Jacobi'sche Covariante.* Die Definition der Covarianten umfasst die Invarianten mit.

Aus der definirenden Identität folgt auch die weitere

$$\mathbf{C}(x, a') = \Delta^r \,.\, \mathbf{C}(x', a).$$

Das Verschwinden einer Covariante oder *eine covariante Gleichung drückt daher ein geometrisches Gebilde aus, dessen Beziehung zu dem gegebenen oder den gegebenen projectivisch ist.* Also haben letztere und das covariante Gebilde notwendig gewisse verschwindende Simultaninvarianten, z. B. eines der Punktepaare mit $F = 0$ die harmonische $\Theta = 0$. *Eine Invariante einer Covariante ist nach der Definition auch eine Invariante der Originalform*, z. B. die Discriminante von F die Resultante von a_x^2, b_x^2.

Die Invariantentheorie lehrt, dafs *eine* binäre quadratische Form keine von ihr selbst verschiedene, *zwei* Formen S, S' aufser F und rationalen Functionen von S, S, F keine anderen simultanen Covarianten haben.

343. **Invariantentheorie der Involution.** Zwei Elementenpaare $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ bestimmen nach § 93 eine Involution, deren Paare in der Gleichung

$$S_1 + kS_2 = 0$$

enthalten sind. Wir betrachten also eine Parameterverbindung von zwei quadratischen Formen wiederum als eine solche Form.

Bilden wir ihre Determinante, so bestimmt deren Verschwinden

$$(a_{11} + kb_{11})(a_{22} + kb_{22}) - (a_{12} + kb_{12})^2 = 0$$

die Parameter von zwei je in einen Punkt zusammenfallenden Paaren, der beiden Doppelelemente (§ 95). Diese Function besitzt ihre Invarianteneigenschaft für jeden beliebigen Wert des Parameters, also unabhängig von k. Daher sind schon die Coefficienten der nach Potenzen von k geordneten Discriminante Invarianten. In der Tat lautet die Entwickelung

$$\varDelta_1 + k\Theta + k^2\varDelta_2,$$

führt also ausschliefslich auf die Discriminanten der einzelnen und die harmonische Simultaninvariante beider Paare*).

*) Ebenso ist die harmonische Invariante der Paare k', k''

$$2\varDelta_1 + (k' + k'')\Theta + 2k'k''\varDelta_2.$$

Die Parameter der Doppelelemente sind absolute Invarianten, nämlich

$$k_1 = \frac{-\Theta + \sqrt{(\Theta^2 - 4\Delta_1\Delta_2)}}{2\Delta_2}, \quad k_2 = \frac{-\Theta - \sqrt{(\Theta^2 - 4\Delta_1\Delta_2)}}{2\Delta_2}.$$

Deshalb haben die Doppelelemente eine projectivische Beziehung zu den gegebenen Elementenpaaren. Das aus ihnen gebildete, der Involution nicht angehörige Elementenpaar ist also durch eine covariante Gleichung darzustellen. Das Quadrat derselben läfst sich unmittelbar als das Product der die Doppelelemente einzeln definirenden Gleichungen bilden, als

$$\Delta_2 (S_1 + k_1 S_2)(S_1 + k_2 S_2) \equiv \Delta_2 S_1^2 - \Theta S_1 S_2 + \Delta_1 S_2^2 = 0.$$

Man bestätigt leicht, dafs diese biquadratische Covariante gleich $-F^2$ ist, wo F die frühere quadratische Covariante ist. Also bilden die Doppelelemente das gemeinsame harmonische Paar zu den Involutionspaaren.

In einer Involution können die im allgemeinen getrennten Doppelelemente zu Fundamentalelementen gewählt werden. Bezeichnen wir sie als z_1, z_2 mit $S_1 + k_1 S_2 = z_1^2$, $S_1 + k_2 S_2 = z_2^2$ $(k_1 \gtrless k_2)$, so kann die Gleichung der Involution geschrieben werden

$$z_1^2 - \frac{k - k_1}{k - k_2} z_2^2 = 0 \quad \text{oder} \quad z_1^2 - \varkappa^2 z_2^2 = (a_1 + \varkappa z_2)(a_1 - \varkappa z_2) = 0.$$

Die harmonische Trennung der Paare durch die Doppelelemente ist hiernach evident.

Die Doppelelemente fallen zusammen $(k_1 = k_2)$, die Involution ist parabolisch, wenn die Invariante $\Theta^2 - 4\Delta_1\Delta_2$ verschwindet. Denn, für $(a_{11} + kb_{11})(a_{22} + kb_{22}) - (k_{12} + kb_{12})^2 = -(p_1 + kp_2)^2$ ist es erlaubt zu setzen

$$a_{11} + kb_{11} = m\,\{(a_{12} + kb_{12}) + (p_1 + kp_2)\},$$

$$a_{22} + kb_{22} = \frac{1}{m}\,\{(a_{12} + kb_{12}) - (p_1 + kp_2)\}.$$

Dann geht die Gleichung der Involution über in

$$(a_{12} + kb_{12})(mx_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{m}x_2^2) + (p_1 + kp_2)(mx_1^2 - \frac{1}{m}x_2^2) = 0$$

oder

$$(mx_1 + x_2)\{(a_{12} + kb_{12})(mx_1 + x_2) + (p_1 + kp_2)(mx_1 - x_2)\} = 0.$$

Somit löst sich die parabolische Involution in einen Punkt und eine einfache Punktreihe, bez. in einen Strahl und ein einfaches Strahlbüschel auf (§ 95).

344. Zwischen irgend drei Elementenpaaren $S_1 \equiv a_x^2 = 0$, $S_2 \equiv b_x^2 = 0$, $S_3 \equiv c_x^2 = 0$ einer Involution besteht nach Definition die lineare Relation

$$\lambda S_1 + \mu S_2 + \nu S_3 = 0,$$

und, umgekehrt, ist diese Bedingung zur Involution der Paare hinreichend. Damit aber die Coefficienten von x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 verträgliche lineare Gleichungen für λ, μ, ν geben, mufs sein

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{22} \\ b_{11}, & b_{12}, & b_{22} \\ c_{11}, & c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist *die Bedingung der Involution von sechs Elementen.* Ihrer Bedeutung nach ist daher die Coefficientendeterminante *eine Simultaninvariante von drei quadratischen Formen.*

Führt man statt der Coefficienten die Wurzeln α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 der drei Gleichungen ein, so lautet die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_1 \alpha_2 \\ 1, & \beta_1 + \beta_2, & \beta_1 \beta_2 \\ 1, & \gamma_1 + \gamma_2, & \gamma_1 \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist eines der Paare ein Doppelelement, $\gamma_1 = \gamma_2 = \delta$, so lautet *die Bedingung der Involution von fünf Elementen*

$$\begin{vmatrix} 1, & 2\delta & , & \delta^2 \\ 1, & \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_1 \alpha_2 \\ 1, & \beta_1 + \beta_2, & \beta_1 \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist aber genau die covariante Gleichung der Doppelelemente des § 343, wenn wir $\delta = x_1 : x_2$ setzen, nämlich

$$\{(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)\} x_1^2 + 2(\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2) x_1 x_2 + \{\alpha_1 \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2) - \beta_1 \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)\} x_2^2 = 0.$$

Bedeutet das Coordinatenverhältnis die Entfernung von einem Anfangspunkt und wählen wir die Mitte zwischen den Doppelelementen als solchen, so folgt $\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2$ als die Characteristik des Centralpunktes der Involution (§ 95).

Endlich ergibt die Einführung beider Doppelelemente δ_1, δ_2 in die ursprüngliche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 2\delta_1 & , & \delta_1^2 \\ 1, & 2\delta_2 & , & \delta_2^2 \\ 1, & \alpha_1 + \alpha_2, & & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder die mit $\delta_1 - \delta_2$ multiplicirte harmonische Invariante Θ für jene und α_1, α_2, wie man sich sofort überzeugt.

Genau dieselben Bedingungen gelten auch für den Fall, dafs das Coordinatenverhältnis durch einen Parameter ersetzt wird, also z. B. die Wurzeln α_1, α_2; .., .. nach § 309 die Parameter von Punkten eines Kegelschnittes bedeuten, die einander involutorisch zugeordnet sind. Diese Bemerkung bestätigt ein Vergleich mit den Formeln des § 93.

B. 1) Ein Büschel von Kegelschnitten wird von jeder Geraden in Punkten einer Involution geschnitten. (§ 301.)

Ist diese Gerade $x_3 = 0$, so liefert die Gleichung des Büschels der Kegelschnitte $S + kS' = 0$ für das System der Schnittpunkte

$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + k(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0.$$

2) Wenn ein System von Kegelschnitten ein Polardreieck gemein hat, so wird jede durch eine seiner Ecken gezogene Gerade von demselben in Punkten einer Involution geschnitten. (§ 314.)

Die Substitution $x_1 = kx_2$ in $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ gibt $(a_{11}k^2 + a_{22})x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$, d. h. ein Paar von Punkten, welches mit den beiden den Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ angehörenden Schnittpunkten harmonisch conjugirt ist. Diese sind daher die Doppelpunkte der Involution, welche jene bilden.

3) Die Multiplication der Involutionsbedingung

$$\begin{vmatrix} 1, & -(\alpha_1 + \alpha_2), & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & -(\beta_1 + \beta_2), & \beta_1\beta_2 \\ 1, & -(\gamma_1 + \gamma_2), & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ mit } \begin{vmatrix} \alpha_1^2, & \alpha_1, & 1 \\ \beta_1^2, & \beta_1, & 1 \\ \gamma_1^2, & \gamma_1, & 1 \end{vmatrix} \text{ bez. } \begin{vmatrix} \delta^2, & \delta, & 1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_1, & 1 \\ \alpha_2^2, & \alpha_2, & 1 \end{vmatrix}$$

oder mit $-(\beta_1 - \gamma_1)(\gamma_1 - \alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1)$, und bez. mit $-(\alpha_1 - \alpha_2)$ $(\alpha_2 - \delta)(\delta - \alpha_1)$ liefert Gleichungen, welche die Doppelverhältnisgleichheiten

$$(A_1C_1B_2C_2) = (A_2C_2B_1C_1), \quad (A_1A_2B_1C_1) = (A_2A_1B_2C_2)$$

und die durch die Vertauschung von A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 unter sich, bez. von A_1A_2 mit B_1B_2 oder C_1C_2 daraus hervorgehenden aussprechen.

4) Man bestimme in zwei involutorischen Reihen auf derselben Geraden das beiden gemeinsame Paar entsprechender Punkte.

Sind jene durch die Punktepaare $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $a_x'^2 = 0$, $b_x'^2 = 0$ gegeben, so sind die Paare ihrer sich selbst conjugirten Punkte

$$(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})x_1^2 + (a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})x_1x_2 + (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})x_2^2 = 0,$$
$$(a_{12}'b_{11}' - a_{11}'b_{12}')x_1^2 + (a_{22}'b_{11}' - a_{11}'b_{22}')x_1x_2 + (a_{22}'b_{12}' - a_{12}'b_{22}')x_2^2 = 0.$$

Das gemeinsame Paar mufs mit beiden zugleich harmonisch sein, d. h. seine Gleichung mufs aus den beiden letzten Gleichungen ebenso gebildet sein, wie diese aus den Paaren der gegebenen. Wann ist es nicht reell? (§ 300, 3.)

345. **Projectivität.** Wenn vier Paare von Elementen, die wir durch die Wurzelpaare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 von vier Gleichungen zweiten Grades dargestellt denken, die beiden Gruppen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ von gleichem Doppelverhältnis bestimmen, so folgt aus der Parametergleichung der Projectivität in § 92 die schon dort aufgestellte *Bedingung der Projectivität von acht Elementen*

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \delta_1\delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man in der Determinante die mit $\beta_1\delta_2$, $-\delta_2$, $-\beta_1$ bez. multiplicirten ersten Zeilen zur letzten addirt, nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt, die Determinantenfactoren zu Determinanten zweiter Ordnung umformt, so lautet die Bedingung einfacher

$$(\alpha_2-\beta_2)(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_2-\delta_2)(\delta_1-\alpha_1)=(\alpha_1-\beta_1)(\beta_2-\gamma_2)(\gamma_1-\delta_1)(\delta_2-\alpha_2),$$

zum directen Ausdruck der Doppelverhältnisgleichheit entsprechender Elemente.

Auf dieselbe Weise kann *die Projectivität von zwei Reihen von beliebig vielen Elementen* ausgedrückt werden. Denn die Doppelverhältnisgleichheit aller homologen Elementenquadrupel kann durch das Verschwinden der Matrix

$$\begin{Vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & . \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1, & \varepsilon_1, & . \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2, & \varepsilon_2, & . \\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \delta_1\delta_2, & \varepsilon_1\varepsilon_2, & . \end{Vmatrix} = 0$$

angezeigt werden, wenn dies bedeutet, dafs *jede* der aus vier

Reihen derselben Matrix gebildeten Determinanten verschwindet. Dafs zwei projectivische Systeme durch das eine und drei Paare entsprechender Punkte aus beiden vollkommen und auf lineare Weise bestimmt sind (§§ 92, 300), ist daraus ersichtlich, dafs alle Determinanten, welche die zwei ersten Reihen enthalten, in den fehlenden Elementen linear sind.

Ebenso sind beliebige Paare α_1, α_2; β_1, β_2; etc. desselben Trägers in *Involution*, wenn die Relation

$$\left\| \begin{matrix} 1 \;, & 1 \;, & 1 \;, & . \\ \alpha_1 + \alpha_2, & \beta_1 + \beta_2, & \gamma_1 + \gamma_2, & . \\ \alpha_1\alpha_2 \;, & \beta_1\beta_2 \;, & \gamma_1\gamma_2 \;, & . \end{matrix} \right\| = 0$$

erfüllt ist; denn jede der aus drei Reihen dieses Systems gebildeten Determinanten gibt durch ihr Verschwinden die involutorische Relation des § 343 der drei in sie eintretenden Paare. In der Tat ist dieselbe das Resultat der Elimination der Coefficienten a, b, d zwischen den drei Bedingungsgleichungen der Involution (§ 93)

$$a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1 + \alpha_2) + d = 0, \quad a\beta_1\beta_2 + b(\beta_1 + \beta_2) + d = 0,$$
$$a\gamma_1\gamma_2 + b(\gamma_1 + \gamma_2) + d = 0.$$

Dies ist aber auch eine einfache Umformung der Relation der Projectivität zwischen den beiden durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1$ bestimmten Gruppen. Man hat nämlich

$$0 = \begin{vmatrix} 1 \;, & 1 \;, & 1 \;, & 1 \\ \alpha_1 \;, & \beta_1 \;, & \gamma_1, & \alpha_2 \\ \alpha_2 \;, & \beta_2 \;, & \gamma_2 \;, & \alpha_1 \\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \;, & \beta_1 \;, & \gamma_1 \;, & \alpha_2 \\ 1 \;, & 1 \;, & 1 \;, & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2, & \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 \;, & \beta_1\beta_2 \;, & \gamma_1\gamma_2 \;, & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix}$$

und durch Subtraction der Elemente der letzten Reihe von den entsprechenden der ersten

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2) \begin{vmatrix} 1 \;, & 1 \;, & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2 \\ \alpha_1\alpha_2 \;, & \beta_1\beta_2 \;, & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Involution der Paare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 und Projectivität der aus vier Elementen derselben gebildeten Quadrupel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1$ sind geometrisch äquivalente Bedingungen. (§ 93.)

B. 1) Relationen zwischen den Doppelverhältnissen von vier Punkten (§ 80).

Sie sind enthalten in der Gleichung

$$(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_1-\delta_1)+(\gamma_1-\alpha_1)(\beta_1-\delta_1)+(\alpha_1-\beta_1)(\gamma_1-\delta_1)=0;$$

denn die Division derselben mit je einem ihrer drei Glieder gibt, wenn man die Quotienten des 1., 2., 3. Gliedes durch das 2., 3., 1. mit $-d_1$, $-d_2$, $-d_3$ bez. bezeichnet,

$$1=\frac{1}{d_1}+d_3, \quad 1=\frac{1}{d_2}+d_1, \quad 1=\frac{1}{d_3}+d_2.$$

Sind diese drei Doppelverhältnisse gleichgrofs,[119]) so ist jedes von ihnen vom Werte $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ und man nennt die Gruppe *äquianharmonisch*. Aus $d_1=-1$ folgen $d_2=\frac{1}{2}$, $d_3=2$, harmonisch.

2) Doppelelemente von zwei vereinigten projectivischen Reihen.

Sind α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 die zur Bestimmung hinreichenden Paare homologer Punkte, und ist durch δ einer der Doppelpunkte bestimmt, so hat man für δ die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \delta, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \delta, & \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \delta^2, & \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix}=0.$$

Die Doppelelemente einer Involution sind in § 343 gegeben.

3) Sind irgend sechs Elemente 1, 2, ..., 6 eines Elementargebildes gegeben und construirt man die drei Elementenpaare, welche bez. zu 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 gleichzeitig harmonisch conjugirt sind, so bilden diese Paare eine Involution.

4) *Gleichung der Pascal'schen Linie* in Determinantenform mittelst der Parameter der Ecken des Sechsecks $ABCDEF$ (§ 303). Für $x_1x_3=x_2^2$ und $1\,|\,a\,|\,a^2$ bez. $1\,|\,d\,|\,d^2$ als Coordinaten von A bez. D ist $\overline{ad}\equiv adx_1-(a+d)x_2+x_3=0$ die Sehne AD. Ist nun in der Relation der Parameter von vier Paaren homologer Elemente $\delta_1=\delta_2$ der Parameter eines Doppelpunktes, so geht die letzte Zeile in δ_1^2, δ_1, δ_1, 1 über, und kann durch x_3, x_2, x_2, x_1 ersetzt werden. Man erhält also die Gleichung der Pascal'schen Linie

$$\begin{vmatrix} x_3, & x_2, & x_2, & x_1 \\ ad, & a, & d, & 1 \\ be, & b, & e, & 1 \\ cf, & c, & f, & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Ferner ist $\overline{ab} \,.\, \overline{cd} - \overline{ad} \,.\, \overline{bc} \equiv (x_1 x_3 - x_2^2)(a-c)(b-d)$ und wir erhalten wie in § 288 durch Vergleichung der Formen $\overline{ab} \,.\, \overline{cd} - \overline{ad} \,.\, \overline{be}$, $\overline{af} \,.\, \overline{de} - \overline{ad} \,.\, \overline{ef}$ die Gleichung der Pascal-schen Linie von $ABCDEF$ in der Form

$$(a-c)(b-d) \,.\, \overline{ef} + (a-e)(f-d) \,.\, \overline{be},$$

oder in einer der äquivalenten Formen

$$(a-e)(b-f) \,.\, \overline{cd} = (c-e)(b-d) \,.\, \overline{af},$$
$$(c-a)(b-f) \,.\, \overline{de} = (c-e)(d-f) \,.\, \overline{ab}.$$

Durch den Punkt bc, ef gehen die drei andern Pascal'schen Linien $ABCDFE$, $ABCDEF$ und $ACBDFE$, oder

$$(a-c)(b-d) \,.\, \overline{ef} = (a-f)(e-d) \,.\, \overline{bc},$$
$$(a-b)(c-d) \,.\, \overline{ef} = (a-e)(f-d) \,.\, \overline{bc},$$
$$(a-b)(c-d) \,.\, \overline{ef} = (a-f)(e-d) \,.\, \overline{bc}.$$

Die drei Pascal'schen Geraden

$$(a-c)(b-d) \,.\, \overline{ef} = (a-e)(f-d) \,.\, \overline{bc} = (b-f)(c-e) \,.\, \overline{ad}$$

schneiden sich in einem *Steiner'schen Punkte G;* die drei andern

$$(a-c)(b-d) \,.\, \overline{ef} = (a-e)(f-d) \,.\, \overline{bc} = (b-e)(c-f) \,.\, \overline{ad}$$

in einem *Kirkman'schen Punkte H.*

346. **Polaren.** Jedes Paar von Elementen $S = 0$ definirt eine Involution, welche dieselben zu Doppelelementen hat. In derselben sind $y_1 \mid y_2$ und $z_1 \mid z_2$ homologe Elemente, wenn die Doppelelemente als $m_2 y_1 \pm m_1 z_1 \mid m_2 y_2 \pm m_1 z_2$ darstellbar sind. Die Einsetzung dieser Werte in $S = 0$ ergibt zur Bestimmung von $m_1 : m_2$

$$a_{11}(m_2 y_1 \pm m_1 z_1)^2 + 2 a_{12}(m_2 z_1 \pm m_1 z_1)(m_2 y_2 \pm m_1 z_2)$$
$$+ a_{22}(m_2 y_2 \pm m_1 z_2)^2 = 0.$$

Dazu ist notwendig und hinreichend das Verschwinden der Differenz dieser Gleichungen oder

$$a_{11} y_1 z_1 + a_{12}(y_1 z_2 + y_2 z_1) + a_{22} y_2 z_2 = 0.$$

Man erkennt in ihr einerseits die Parametergleichung der Involution wieder (§ 95), anderseits *die Polarform oder Polare von* $S = 0$. In der symbolischen Schreibweise erscheint sie als ein Product $a_y a_z$, wie sie auch für $y = z = x$ mit $S = a_x^2$ identisch wird.

Auch die Polare mufs gemäfs ihrer projectivischen Bedeutung Invarianteneigenschaft besitzen. In der Tat zeigt dies die Anordnung

$$y_1(a_{11}z_1 + a_{12}z_2) + y_2(a_{12}z_1 + a_{22}z_2) = 0,$$

da die Klammergröfsen die transponirte Substitution erleiden, wenn $y_1 | y_2$ und $z_1 | z_2$ gleichzeitig und gleichartig transformirt werden (§ 342). Die linke Seite bleibt völlig unverändert, wenn neue Coefficienten und neue Variable eingeführt werden.

Somit müssen wir die Definition des § 342 dadurch erweitern, dafs wir auch *Covarianten mit mehreren Reihen cogredienter Variabeln* denken. Die Polarentheorie bietet die wichtigsten Beispiele mit zweierlei Variabeln.

Die Polare der Gleichung $S_1 + kS_2 = 0$ enthält den Parameter ebenfalls linear

$$a_y a_z + k b_y b_z = 0.$$

Einem Elemente y entspricht also eine Reihe conjugirter Pole und diese Reihen sind projectivisch, wenn y variirt. Nach § 194 nennt man diese Reihen auch zu der Involution projectivisch, weil in jeder die Zuordnung der Elemente und der Paare eindeutig ist.

Indessen ist der Satz in voller Allgemeinheit nur wahr, wenn der Fall singulärer Projectivität mit eingeschlossen wird. Denn für einen Doppelpunkt reducirt sich die Reihe conjugirter Pole offenbar auf den anderen Doppelpunkt.

B. 1) Um zu finden, für welche $y_1 | y_2$ die conjugirten Pole in einen $z_1 | z_2$ zusammenfallen, ist nur auszudrücken, dafs die Polare unabhängig von k in ein Product

$$(\varrho y_1 - y_2)\{(a_{12} + kb_{12})z_1 + (a_{22} + kb_{22})z_2\} = 0$$

zerfalle. Die Bedingung erweist sich als

$$(a_{11} + \varrho a_{12})(b_{12} + \varrho b_{22}) = (a_{12} + \varrho a_{22})(b_{11} + \varrho b_{12}),$$

deren Identität mit der Covariante des § 342 evident ist.

2) Wenn die Elementenpaare $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$; etc. eine Involution bilden, so erzeugen die in Bezug auf die einzelnen Paare conjugirt harmonischen Elemente eines beliebigen Elementes ω eine Reihe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von unveränderlichem Doppel-

verhältnis. Ist also für ein anderes Element ω' die Reihe $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \ldots,$ so gilt die Relation

$$\begin{Vmatrix} 1, & 1, & . & . \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & . & \mathfrak{t} & . \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & . & \mathfrak{t}' & . \\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}', & \mathfrak{b}\mathfrak{b}', & . & \mathfrak{t}\mathfrak{t}' & . \end{Vmatrix} = 0.$$

Da diese durch Coordinatentransformation nicht gestört wird, so kann man $\omega = 0$, $\omega' = \infty$ setzen und erhält (§ 340)

$$\mathfrak{a} = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2},\ \mathfrak{b} = \frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2},\ \text{etc.};\quad \mathfrak{a}' = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\ \mathfrak{b}' = \frac{\beta_1+\beta_2}{2},\ \text{etc.}$$

Die vorausgesetzte Gleichung geht über in die neue

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}, & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}, & \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}, & \frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1+\delta_2} \\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2, & \delta_1+\delta_2 \\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \delta_1\delta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche, nach den Elementen der zweiten Zeile entwickelt, sich als eine Consequenz der involutorischen Relation der Paare ergibt.

347. **Höhere Polaren.** Wir verfolgen diese Betrachtungen wenigstens in einigen Hauptzügen auf das Gebiet der binären Formen höheren Grades.[120]) Sei $U_x \equiv a_x^n$ eine allgemeine Form n^{ten} Grades, so *definirt* $U_x = 0$ *eine Gruppe von* n *Elementen* x. Wir können nun das Ergebnis der Einsetzung von $m_2 y_i + m_1 z_i$ statt x_i in die Gleichung nach dem Taylorschen Theorem angeben. Es möge die symbolische Schreibung (§ 320) auch auf die Bildung der höheren Ableitungen ausgedehnt werden, so dafs die r^{te} Polare des Differentiationszeichens das Symbol der r^{ten} Differentiation ist, z. B.

$$\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 U_z = y_1^2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z_1^2} + 2 y_1 y_2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z_1 \partial z_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z_2^2}\ \text{etc.}$$

Dann hat das Resultat die äquivalenten Formen

$$m_2^n U_y + \frac{n}{1} m_2^{n-1} m_1 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} m_2^{n-2} m_1^2 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 U_y + \cdots + m_1^n U_z = 0,$$

$$m_2^n U_y + \frac{n}{1} m_2^{n-1} m_1 \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-1} U_z$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} m_2^{n-2} m_1^2 \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-2} U_z + \cdots + m_1^n U_z = 0.$$

Notwendig sind die Entwickelungscoefficienten beidemal dieselben; man nennt sie *Polarformen* von U_x und sieht, dafs $n-1$ solche existiren. Ist $r < n$, so gibt es eine Polarform, welche in z_i von der r^{ten} und zugleich in y_i von der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Demnach ordnet die Gleichung

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^r U_y = 0 \quad \text{oder} \quad \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-r} U_z = 0$$

jedem Elemente y_i r Elemente z_i und jedem Elemente z_i umgekehrt $n-r$ Elemente y_i zu. Je nachdem ein Element y oder z gegeben ist, definirt die Gleichung *die Polare r^{ter} Ordnung des Pols y* oder *die Polare $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung des Pols z* in Bezug auf die Gruppe $U_x = 0$. *Gehört also z zur Polare r^{ter} Ordnung von y, so gehört auch y zur Polare $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung von z.*

Nun bestimmt obige Taylor'sche Entwickelung durch ihre Wurzeln $m_2 : m_1$ die n Teilverhältnisse*) der einzelnen Elemente von $U_x = 0$ mit angenommenen Elementen y und z, also

$$\frac{zx'}{yx'}, \frac{zx''}{yx''}, \ldots \quad \text{oder} \quad \frac{\sin zx'}{\sin yx'}, \frac{\sin zx''}{\sin yx''}, \ldots,$$

je nachdem $U_x = 0$ als eine Gruppe von Punkten oder von Strahlen interpretirt wird. Wenn der Coefficient von $m_2^{n-r} m_1^r$ verschwindet, *so hat die Summe aller Producte von je r Teilverhältnissen $zx : yx$ der n Elemente x mit zwei Polen z, y den Wert Null:* diese Zuordnung von r Elementen z ist die geometrische Bedeutung der Polare r^{ter} Ordnung von y. So ist für den Punkt z der Polare erster Ordnung von y die Summe der Teilverhältnisse

$$\frac{zx'}{yx'} + \frac{zx''}{yx''} + \cdots = 0,$$

d. h. z das harmonische Centrum der n Elemente x für y (§ 155, Anm.).

*) Im allgemeinen ein constantes Vielfache derselben.

Die entwickelten Formen jener Polaren lassen sich durch Symbole von der Form

$$a_y^{n-r} a_z^r = 0$$

ausdrücken, wenn in dem ausgeführten Product der Polynome links die Producte von je n a_1, a_2 durch die passenden Coefficienten von U_x ersetzt worden. Geht man von a_y^n aus und bildet nacheinander $a_y^{n-1} a_z$, $a_y^{n-2} a_z^2$, etc., so nennt man die Polare $(n-1)^{\text{ter}}$, $(n-2)^{\text{ter}}$, ... Ordnung von z auch bez. die erste, zweite, ..., also $a_y^{n-r} a_z^r$ die r^{te} Polare von z. Weil nun $a_y^p a_z^q a_z^r = a_y a_z^{q+r}$ ist, so gilt der Satz: *Bildet man die q^{te} und die $(q+r)^{te}$ Polare von z in Bezug auf die gegebene Gruppe, so ist die letztere zugleich die r^{te} Polare von z in Bezug auf die erstere.* Dagegen erhält man $a_y^p a_z^q a_u^r$ als r^{te} Polare eines neuen Elements u in Bezug auf die q^{te} Polare $a_y^p a_z^q$ von z oder als die q^{te} Polare von z in Bezug auf die r^{te} Polare $a_y^p a_u^r$ von u. So liest man überhaupt eine Reihe von Eigenschaften daraus ab, dafs die symbolische Darstellung $a_y^p a_z^q a_u^r \ldots$ ungeändert bleibt, wenn die Elemente $y, z, u \ldots$ und zugleich die Ordnungszahlen $p, q, r \ldots$ der für sie gebildeten Polare vertauscht werden.

Denkt man die gegebene Gruppe aus einem Elemente $b_x = 0$ und einer Gruppe von $(n-1)$ Elementen $c_x^{n-1} = 0$ gebildet, so ist $n a_y a_z^{n-1} = b_y c_z^{n-1} + (n-1) b_z c_y c_z^{n-2}$; für $b_y = 0$ und $c_y c_z^{n-2} = 0$ ist also auch $a_y a_z^{n-1} = 0$, d. h. die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare einer Gruppe von $(n-1)$ Elementen ist auch die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare der Gruppe, welche aus jenen $(n-1)$ Elementen und ihm selbst gebildet wird.

Fallen p Elemente der gegebenen Gruppe zusammen, so enthält die r^{te} Polare eines beliebigen Elementes $a_y^{n-r} a_z^r = 0$ das betreffende Element $(p-r)$ mal. Ist das vielfache Element c_z zugleich der Pol, so folgt aus $a_x^n = c_x^p b_x^{n-p}$ durch Bildung der r^{ten} Polare $a_y^{n-r} a_z^r = \lambda c_y^p b_y^{n-p-r} b_z^r$, d. h. *die r^{te} Polare des vielfachen Elements selbst besteht aus diesem Element als einem p-fachen und aus der r^{ten} Polare desselben in Bezug auf die übrigen $(n-p)$ Elemente der Gruppe $(p + r < n)$.*

348. **Jacobi'sche und Hesse'sche Determinante.** Alle Polaren sind Covarianten mit mehreren Paaren cogredienter Variabeln, da die durch $y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ angedeutete Operation Invarianteneigenschaft hat (§ 346). Die Betrachtung der Polaren erster und zweiter Ordnung führt zu einigen wichtigen Covarianten mit nur einem Paar von Variabeln. Wenn die ersten und zweiten Ableitungen einer Form durch Indices bezeichnet werden, so daſs[121])

$$U_i = \frac{1}{n}\frac{\partial U_y}{\partial y_i}, \quad U_{ik} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_i \partial y_k},$$

so lautet die *lineare* und die *quadratische Polare* von y

$$U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0 \quad \text{und} \quad U_{11} z_1^2 + U_{12} z_1 z_2 + U_{22} z_2^2 = 0.$$

Nehmen wir gleichzeitig die lineare Polare eines Punktes y in Bezug auf zwei Gruppen $U_x = 0$, $V_x = 0$ von n und m Punkten, so können die durch $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$, $V_1 z_1 + V_2 z_2 = 0$ bestimmten Elemente z nur dann zusammenfallen, wenn y die Bedingung erfüllt

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0.$$

Die Jacobi'sche Determinante $J \equiv U_1 V_2 - U_2 V_1$ *der Functionen* U *und* V *ist eine Covariante* $(n + m - 2)^{ter}$ *Ordnung derselben,* denn sie ist die Determinante von Ausdrücken, welche sich wie die Coefficienten linearer Formen transformiren. *Es gibt daher* $n + m - 2$ *Elemente* y, *welche in Bezug auf zwei Gruppen von* n *und* m *Elementen dieselben harmonischen Mittel besitzen.* Umgekehrt haben diese $n + m - 2$ Elemente z erste Polaren, welche ein Element gemeinsam haben.

Gehen wir zur quadratischen Polare von y, so kann diese zwei vereinigte Elemente oder ein Doppelelement z definiren, nämlich dann, wenn ihre Discriminante verschwindet

$$H \equiv U_{11} U_{22} - U_{12}^2 = 0.$$

Diese Function H der zweiten Ableitungen einer Form heiſst *die Hesse'sche Determinante der Form und ist eine Covariante* $(2n - 4)^{ter}$ *Ordnung derselben,* da sie eine Invariante einer Covariante ist (§ 339). Für eine quadratische Form U sind die zweiten Ableitungen die Coefficienten, H ist also einfach

die Discriminante von U; wie für diese, so gilt allgemein der Satz, dafs analog die Hesse'sche Determinante sich bei einer linearen Transformation um Δ^2 ändert.

Die $2n-4$ *Elemente* y *der covarianten Gruppe* $H=0$, *deren quadratische Polaren Doppelelemente sind, gehören selbst als Doppelelemente zu den ersten Polaren von* $2n-4$ *Punkten* z. Denn soll $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ zu einem z zwei vereinigte Elemente y liefern, so ist notwendig und hinreichend, dafs die Ableitungen gleichzeitig verschwinden $U_{11} z_1 + U_{12} z_2 = 0$, $U_{21} z_1 + U_{22} z_2 = 0$. Also ist die Hesse'sche Determinante einer Form einfach die Jacobi'sche Determinante ihrer ersten Ableitungen.

Man kann nun neue Covarianten von U bilden als Covarianten von H oder von U und H. So ist die Jacobi'sche Covariante von U und H

$$T \equiv U_1 H_2 - U_2 H_1 = 0$$

von der $(3n-6)^{\text{ten}}$ Ordnung. Sie ist das Resultat der Elimination von z zwischen $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ und $H_1 z_1 + H_2 z_2 = 0$. Also gibt es $3n-6$ Elemente z, deren erste Polaren in Bezug auf $H=0$ ein gemeinsames Element haben, und $T=0$ ist die Gleichung dieser gemeinsamen Elemente.

349. **Involutionen höheren Grades.** Denken wir durch $U \equiv a_x^n = 0$, $V \equiv b_x^n = 0$ zwei Gruppen von n Elementen im Gebilde erster Stufe ausgedrückt, so gibt die Gleichung

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0$$

für λ als einen veränderlichen Parameter eine Reihe von Gruppen, welche je aus n Elementen bestehen, und deren jede durch *eines* ihrer Elemente bestimmt ist, während offenbar das ganze System durch jede *zwei* seiner Gruppen von n Elementen bestimmt wird. Man nennt es eine *Involution* n^{ten} *Grades.* (Unter Involution schlechtweg verstehen wir diejenige zweiten Grades.) So bilden die ersten Polaren $c_x^n c_y = 0$ einer gegebenen Gruppe $c_x^{n+1} = 0$ von n Elementen eine Involution n^{ten} Grades.

Unter den Gruppen der Involution n^{ten} Grades gibt es solche, welche Doppelelemente enthalten; mit der Index-

bezeichnung der Ableitungen entsprechen jene der gleichzeitigen Erfüllung der beiden Gleichungen $U_1 + \lambda V_1 = 0$, $U_2 + \lambda V_2 = 0$. Also sind sie bestimmt durch die Gleichung $(2n - 2)^{\text{ten}}$ Grades

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0.$$

Diese Gleichung der Doppelelemente ist die gleich Null gesetzte Jacobi'sche Covariante der Functionen U und V; die Bestimmung der Doppelelemente in der quadratischen Involution (§ 343) ist der einfachste Fall davon.

Man nennt zwei *Involutionen projectivisch,* wenn derselbe veränderliche Parameter λ in beiden die homologen Gruppen bestimmt

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0, \quad a_x'^m + \lambda b_x'^m = 0.$$

So bilden die ersten Polaren irgend zweier Systeme projectivische Involutionen, in denen zwei homologe Gruppen demselben Pol entsprechen. Allgemeiner gilt der Satz: Wenn man für alle Gruppen einer Involution, eine beliebige Zahl *fester* Pole benutzend, die Polaren derselben Ordnung bildet, so sind alle Reihen dieser Systeme involutorisch und diese Involutionen zu einander projectivisch. Da die $(n - 1)^{\text{ten}}$ Polarsysteme insbesondere einfache Punktreihen (Strahlbüschel) sind, so soll das Doppelverhältnis von irgend vier Elementen dieser Reihe auch das der entsprechenden Gruppen der gegebenen Involution oder der für ein beliebiges Element gebildeten Polaren heifsen (§ 347). Da dasselbe nur von den Werten der λ abhängig ist, so erhält man den Satz: *Das Doppelverhältnis einer Involution von vier Gruppen, welche durch Polarisirung aus vier Gruppen einer gegebenen Involution entstanden sind, ist gleich dem Doppelverhältnis der letzteren und von dem als Pol benutzten Element unabhängig.*

In projectivischen Involutionen gibt es homologe Gruppen, welche ein Element gemein haben. Sie werden durch die Gleichung $a_x^n \,.\, b_x'^m - b_x^n \,.\, a_x'^m = 0$ bestimmt, die aus der Elimination des Parameters zwischen den Gleichungen der Involutionen entspringt. Also ist ihre Anzahl für zwei Involutionen von den bez. Graden m und n gleich $(m + n)$.

Man darf dies auch so aussprechen und kann es ganz ebenso beweisen, wie den Satz der §§ 92, 94: *Wenn in einem Elementargebilde zwei Reihen von Elementen sich gegenseitig so entsprechen, dafs jedem Element der ersten n Elemente der zweiten und jedem Element der zweiten m Elemente der ersten entsprechen, so existiren* $(m+n)$ *Elemente, welche mit ihren jedesmaligen entsprechenden zusammenfallen.* Denn für λ, λ' als die Teilverhältnisse entsprechender Elemente in Bezug auf zwei feste Elemente des Systems ist der algebraische Ausdruck der ausgesprochenen Beziehung von der Form

$$(a_0 \lambda'^m + a_1 \lambda'^{m-1} + \text{etc.})\, \lambda^n + \text{etc.} = 0$$

und liefert für $\lambda = \lambda'$ eine Gleichung vom Grade $(m+n)$ zur Bestimmung von λ.

Wenn die Formen a_x^n und b_x^n einen Factor vom Grade p gemeinsam haben, so gehören die p Elemente desselben jeder Gruppe der Involution an, so dafs dieselbe aus p festen Elementen und einer Involution vom $(n-p)^{\text{ten}}$ Grade besteht. Wenn das nämliche mit den Formen $a_x'^m$ und $b_x'^m$ für einen Factor vom Grade p' der Fall ist, so zerfällt die Gleichung der beiden Involutionen der gemeinschaftlichen Elemente $a_x^n \,.\, b_x'^m - b_x^n \,.\, a_x'^m = 0$ in die Factoren von den Graden p und p' und einen Factor vom Grade $m+n-(p+p')$, welcher die gemeinsamen Elemente liefert.

Enthält eine bestimmte Gruppe der einen involutorischen Reihe einen Factor $p$fach, die entsprechende Gruppe der andern *denselben* Factor $q$fach, so tritt das betreffende Element mit der Vielfachheit der kleinern von diesen beiden Zahlen in die Gruppe der gemeinsamen Elemente der Involutionen ein.[122])

B. 1) Zu zwei Punktepaaren $U^{(a)} = 0$, $U^{(b)} = 0$ in derselben Geraden dasjenige dritte Paar $U^{(c)} = 0$ zu bestimmen, in Bezug auf welches die Punkte des ersten conjugirt harmonisch sind zu den Punkten des zweiten, oder in Bezug auf welches sie zu einander polar sind.

Wir denken die Doppelelemente der aus den gegebenen Paaren gebildeten Involution als die Fundamental-Elemente, setzen also

$$U^{(a)} \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2, \quad U^{(b)} \equiv b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$$

mit den Discriminanten $\Delta^{(a)} \equiv a_{11} a_{22}$, $\Delta^{(b)} \equiv b_{11} b_{22}$ und dazu

$$U^{(c)} \equiv c_{11} x_1^2 + 2 c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2.$$

Wir erhalten das zu $U^{(a)}$ in Bezug auf $U^{(c)}$ polare Paar durch Einsetzen von $- U_2^{(c)}$, $U_1^{(c)}$ an Stelle von x_1, x_2 in $U^{(a)}$ in der Form

$$a_{11} (c_{12} x_1 + c_{22} x_2)^2 + a_{22} (c_{11} x_1 + c_{12} x_2)^2 = 0.$$

Das so bestimmte Paar fällt mit $U^{(b)}$ zusammen, wenn

$$a_{11} c_{12}^2 + a_{22} c_{11}^2 = \varrho b_{11}, \quad a_{11} c_{22}^2 + a_{22} c_{12}^2 = \varrho b_{22},$$
$$a_{11} c_{12} c_{22} + a_{22} c_{11} c_{12} = 0,$$

folglich $\quad c_{12} = 0, \quad a_{22} c_{11}^2 = \varrho b_{11}, \quad a_{11} c_{22}^2 = \varrho b_{22} \quad$ sind.

Setzen wir $\varrho = a_{11} a_{22}$, $c_{11}^2 = a_{11} b_{11}$, $c_{22}^2 = a_{22} b_{22}$, so ist die Gleichung des gesuchten Paares

$$x_1^2 \sqrt{a_{11} b_{11}} \pm x_2^2 \sqrt{a_{22} b_{22}} = 0.$$

Es gibt also zwei solche Paare in einem Elementargebilde. Zwischen den Discriminanten besteht die invariante Relation

$$\{\Delta^{(c)}\}^2 = \Delta^{(a)} \,.\, \Delta^{(b)}.$$

2) Zwei quadratische Involutionen besitzen ein gemeinsames Paar von Elementen. (§ 344, 4.)

Wenn x_i, y_i die Elemente derselben sind, und beide Gruppen auf ihre Doppelelemente α_x, β_x; γ_y, δ_y bezogen sind, so gelten für dies gemeinsame Paar die Gleichungen

$$\alpha_x + \lambda \beta_x = 0, \quad \gamma_x + \mu \delta_x = 0, \quad \alpha_y - \lambda \beta_y = 0, \quad \gamma_y - \mu \delta_y = 0.$$

Die Elimination der λ und μ zwischen diesen Paaren gibt

$$0 = \alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x = 2 \alpha_1 \beta_1 x_1 y_1 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2 \alpha_2 \beta_2 x_2 y_2,$$
$$0 = \gamma_x \delta_y + \gamma_y \delta_x = 2 \gamma_1 \delta_1 x_1 y_1 + (\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2 \gamma_2 \delta_2 x_2 y_2,$$

aus denen zur Bestimmung der gemeinsamen Gruppe folgt

$$2 x_1 y_1 : (x_1 y_2 + x_2 y_1) : 2 x_2 y_2 = A_{11} : A_{12} : A_{22} \quad \text{und damit}$$

$$x_1 y_1 = m A_{11}, \quad x_1 y_2 = m (A_{12} + \sqrt{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}),$$
$$x_2 y_2 = m A_{22}, \quad x_2 y_1 = m (A_{12} - \sqrt{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}).$$

350. **Discriminante der cubischen Form.** Eine *cubische Gleichung* zwischen den Veränderlichen x_1, x_2 (Vorles. Art. 167 ff.)

$$U \equiv a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^2 = 0$$

ist der algebraische Ausdruck eines Punktetripels x', x'', x'''

in einer Geraden oder eines Strahlentripels x', x'', x''' aus einem Punkte.

Zwei Elemente des Tripels fallen zusammen, wenn

$$U_1 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0,$$
$$U_2 = a_1 x_1^2 + 2a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 = 0.$$

Also findet Gleichheit *zweier Wurzeln* statt, wenn die Resultante dieser Gleichungen verschwindet, d. h. *die Discriminante Δ der cubischen Form*

$$\Delta \equiv (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) = 0,$$

oder entwickelt (vgl. „Vorles." 2. Aufl., Art. 195)

$$\Delta \equiv a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_3 a_1^3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Für $\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial a_0} = A_0$, $\frac{1}{6}\frac{\partial \Delta}{\partial a_1} = A_1$, $\frac{1}{6}\frac{\partial \Delta}{\partial a_2} = A_2$, $\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial a_3} = A_3$

und $a_{02} = a_0 a_2 - a_1^2$, $2a_{03} = a_0 a_3 - a_1 a_2$, $a_{13} = a_1 a_3 - a_2^2$ ist

$$2\Delta = a_0 A_0 + 3a_1 A_1 + 3a_2 A_2 + a_3 A_3 = 8(a_{03}^2 - a_{02} a_{13}).$$

Für $\Delta = 0$ bestehen die Relationen

$$A_0 A_2 = A_1^2, \quad A_0 A_3 = A_1 A_2, \quad A_1 A_3 = A_2^2;$$
$$A_0^2 = -4a_{13}^3, \; A_1^2 = -4a_{13} a_{03}^2, \; A_2^2 = -4a_{02} a_{03}^2, \; A_3^2 = 4a_{02}^3;$$

für das Doppelelement $z_1 | z_2$ ergibt sich daher

$$z_1 : z_2 = A_0 : A_1 = A_1 : A_2 = A_2 : A_3 = -a_{13} : a_{03} = -a_{03} : a_{02}.$$

In den Coordinaten $x_1' | x_2'$, $x_1'' | x_2''$, $x_1''' | x_2'''$ der durch die cubische Gleichung dargestellten Elemente wird die Discriminante, da

$$U = (x_1 x_2' - x_1' x_2)(x_1 x_2'' - x_1'' x_2)(x_1 x_2''' - x_1''' x_2),$$
$$\Delta = -\frac{(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')^2 (x_1'' x_2''' - x_1''' x_2'')^2 (x_1''' x_2' - x_1' x_2''')^2}{27 x_2'^4 x_2''^4 x_2'''^4}.$$

Dies zeigt an, dafs die Wurzeln der cubischen Gleichung reell und verschieden, reell und paarweise gleich oder paarweise imaginär sind, je nachdem die Discriminante negativ, gleich Null oder positiv ist. *Die Discriminante ist eine Invariante der cubischen Form und zwar die einzige* (§ 339).

Die *Gleichheit aller Wurzeln* fordert die gleichzeitige Erfüllung der Relationen

$$U_{11} = a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0, \; U_{12} = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \; U_{22} = a_2 x_1 + a_3 x_2 = 0,$$

oder der durch Elimination von $x_1 | x_2$ entstehenden Bedingungen

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0, \quad a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0, \quad a_1 a_3 - a_2^2 = 0,$$

von denen je zwei die dritte nach sich ziehen.

351. **Invarianten der biquadratischen Gleichung**

$$U \equiv a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 = 0.$$

Die Gleichung bestimmt vier Elemente einer Reihe oder eines Büschels, ein Quadrupel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ von den Coordinaten $x_1' | x_2'; \ldots . x_1'''' | x_2''''$. Für

$$(x_1'' x_2''' - x_1''' x_2'')(x_1' x_2'''' - x_1'''' x_2') = D_1,$$
$$(x_1''' x_2' - x_1' x_2''')(x_1'' x_2'''' - x_1'''' x_2'') = D_2,$$
$$(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')(x_1''' x_2'''' - x_1'''' x_2''') = D_3$$

ist $D_1 + D_2 + D_3 = 0$. Die Quotienten $-D_2 : D_1$, $-D_3 : D_2$, $-D_1 : D_3$ drücken die drei fundamentalen Doppelverhältnisse des Quadrupels, nämlich $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$, $(\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4)$, $(\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4)$ aus. Die drei Wurzeln $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ der Gleichung

$$\theta^3 + 3(D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2)\theta - (D_2 - D_3)(D_3 - D_1)(D_1 - D_2) = 0$$

sind die Gröfsen $D_1 - D_2$, $D_2 - D_3$, $D_3 - D_1$, ihre Coefficienten aber symmetrische Functionen der Wurzeln, also auch ganze Functionen der Coefficienten von U. Sie erhält mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$J_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \quad J_3 = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3$$

die Form

$$\theta_3 - 36 J_2 \theta - 432 J_3 = 0.$$

Die Gröfsen J_2 und J_3 sind, da die Doppelverhältnisse durch lineare Transformation ihre Werte nicht ändern, *Invarianten der biquadratischen Form* und zwar J_2 die quadratische und J_3 die cubische Invariante derselben. Für $J_3 = 0$ werden notwendig zwei der Gröfsen D einander gleich, so dafs eines der drei fundamentalen Doppelverhältnisse den Wert -1 hat; *die Gleichung stellt eine harmonische Gruppe dar.* Für $J_2 = 0$ ist notwendig $D_3 : D_2 = D_2 : D_1 = D_1 : D_3$, so dafs alle drei fundamentalen Doppelverhältnisse den nämlichen Wert haben: *die Gleichung stellt eine äquianharmonische Gruppe dar.*

Der Gleichheit zweier Werte von θ endlich entspricht nach § 350 die Relation

$$J_2^3 - 27 J_3^2 = 0, \quad \text{d. i.} \quad \tfrac{1}{256} D_1^2 D_2^2 D_3^2 = 0$$

und das Zusammenfallen zweier Wurzeln α_i der biquadratischen Gleichung; es ist also die zusammengesetzte Invariante

$$\varDelta \equiv J_2^3 - 27 J_3^2$$

die *Discriminante der biquadratischen Form.* Ihren entwickelten Ausdruck erhält man durch Elimination der Veränderlichen aus den für den Fall gleicher Wurzeln zugleich geltenden Bedingungen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ als

$$\begin{aligned}\varDelta \equiv\; & a_0^3 a_4^3 - 12 a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 - 18 a_0^2 a_2^2 a_4^2 + 54 a_0^2 a_2 a_3^2 a_4 - 27 a_0^2 a_3^4 \\ & + 54 a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 - 6 a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 - 180 a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 + 108 a_0 a_1 a_2 a_3^3 \\ & + 81 a_0 a_2^4 a_4 - 54 a_0 a_2^3 a_3^2 - 27 a_1^4 a_4^2 + 108 a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 64 a_1^3 a_3^3 \\ & - 54 a_1^2 a_2^3 a_4 + 36 a_1^2 a_2^2 a_3^2.\end{aligned}$$

Man erhält auch $J_2^3 : J_3^2 =$

$$-108 (D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2)^3 : (D_2 - D_3)^2 (D_3 - D_1)^2 (D_1 - D_2)^2$$

und für s als die Summe eines Paares $d_i + d_i^{-1}$ der reciproken fundamentalen Doppelverhältnisse der Gruppe der α_i

$$108 J_3^2 (s-1)^3 - J_2^3 (s-2)(2s-5)^2 = 0.$$

Also hängen die Doppelverhältnisse der Gruppe nur von dem Verhältnis des Cubus und des Quadrats der beiden Invarianten, d. i. der absoluten Invariante der biquadratischen Form ab (vgl. § 340). Das Auftreten von Gruppen gleicher Wurzeln in der biquadratischen Gleichung characterisirt sich gleichfalls durch diese Invarianten und ihre partiellen Ableitungen.

352. **Covarianten der cubischen Form.** In Bezug auf ein Tripel $U = 0$ (§ 350) lautet die lineare Polare von y

$$(a_0 y_1^2 + 2 a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2) z_1 + (a_1 y_1^2 + 2 a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2) z_2 = 0$$

und die quadratische Polare

$$(a_0 y_1 + a_1 y_2) x_1^2 + 2 (a_1 y_1 + a_2 y_2) z_1 z_2 + (a_2 y_1 + a_3 y_2) z_2^2 = 0.$$

Jedem Element y ordnet erstere ein einziges z, letztere zwei Elemente z zu, so daſs die bez. Teilverhältnisrelationen bestehen

$$\frac{zx'}{yx'} + \frac{zx''}{yx''} + \frac{zx'''}{yx'''} = 0, \quad \frac{zx''}{yx''}\frac{zx'''}{yx'''} + \frac{zx'''}{yx'''}\frac{zx'}{yx'} + \frac{zx'}{yx'}\frac{zx''}{yx''} = 0.$$

Wenn also y mit einem der Elemente x zusammenfällt, so ist mit ihm auch ein z vereinigt.

Die quadratische Polare liefert ein Doppelelement z für *zwei* Pole y, welche bestimmt sind durch die Hesse'sche Covariante $H \equiv$

$$(a_0 a_2 - a_1^2) y_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) y_1 y_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) y_2^2 = 0.$$

Ferner gibt es drei Elemente, deren quadratische Polare für das Tripel den harmonischen Pol in Bezug auf das covariante Paar als Element enthalten. Die Gleichung dieses covarianten Tripels gemeinsamer Elemente ist (vgl. § 349)

$$T \equiv (a_0^2 a_3 + 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2) y_1^3 + 3(a_1^2 a_2 + a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2) y_1^2 y_2$$
$$+ 3(2a_1^2 a_3 - a_0 a_2 a_3 - a_1 a_2^2) y_1 y_2^2 + (3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3 - a_0 a_3^2) y_2^3 = 0.$$

Wenn man die Elemente der Hesse'schen Covariante η_1, η_2 zu den fundamentalen wählt, so dafs H sich auf das Product $y_1 y_2$ reducirt, so mufs $a_1 = a_2 = 0$ sein und man erhält die einfacheren Ausdrücke der cubischen Form, ihrer Discriminante und ihrer Covarianten

$$U = a_0 y_1^3 + a_3 y_2^3, \quad \Delta = a_0^2 a_3^2, \quad T = a_0 a_3 (a_1 y_1^3 - a_3 y_2^3),$$
$$H = a_0 a_3 y_1 y_2,$$

aus ihnen aber die allgemeingültige Relation (§ 357)

$$\Delta U = T^2 + 4H^3.$$

Mit T und U ist die Bildung von Covarianten hier abzuschliefsen, denn es gilt der Satz: *Jede Covariante der cubischen Form ist eine ganze Function von Δ, U, H, T mit numerischen Coefficienten.*

Zugleich liefert jene reducirte Form eine geometrische Beziehung der beiden Elemente der Hesse'schen Covariante zu denen der Originalform. Denn für $\sqrt[3]{-a_3 : a_0} = \alpha$ und θ, θ^2 als die beiden complexen Cubikwurzeln der Einheit sind $y_1 - \alpha y_2 = 0$, $y_1 - \alpha\theta y_2 = 0$, $y_1 - \alpha\theta^2 y_2 = 0$ die Elemente des gegebenen Tripels, und die drei fundamentalen Doppelverhältnisse, die das Tripel mit η_1 bez. η_2 bestimmt, sind sämmtlich gleich $-\theta$ bez. $-\theta^2$. *Die Elemente der Hesse'schen Covariante bilden daher mit denen des Tripels Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen.* Da die Zeichen-

änderung von α im Vorigen die Elemente der cubischen Covariante T liefert, so bilden *die Elemente der cubischen Form und die ihrer cubischen Covariante drei Paare von Elementen, welche in Bezug auf das Paar der quadratischen Covariante einander harmonisch conjugirt sind.* Jene sechs Elemente bilden also eine Involution, welche diese letzteren zu Doppelelementen hat. Und überdies erkennt man, *dafs die cubische Covariante die drei Elemente repräsentirt, von denen jedes zu einem Elemente des Tripels in Bezug auf seine beiden andern Elemente conjugirt harmonisch ist.* Denn das Element, welches mit $y_1 - \alpha y_2 = 0$ in Bezug auf $y_1 - \alpha\theta y_2 = 0$ und $y_1 - \alpha\theta^2 y = 0$ conjugirt harmonisch ist, ist $y_1 + \alpha y_2 = 0$.

B. 1) Wenn ein Kegelschnitt einem Dreieck so umgeschrieben ist, dafs die drei Geraden, welche den Tangenten desselben in den Ecken des Dreiecks in Bezug auf die anstofsenden Seiten harmonisch conjugirt sind, in einem Punkte zusammentreffen, so bestimmen die von diesem Punkte ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes mit jenen zwei Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen.[123])

Für den Kegelschnitt $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ sind die den Tangenten in den Ecken harmonisch conjugirten Geraden $x_2 - x_3 = 0$, $x_3 - x_1 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$; dieselben gehen durch den Punkt $x_1 = x_2 = x_3$, und ihre Schnitte mit $x_3 = 0$ sind durch $x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$ dargestellt. Das Tangentenpaar von jenem Punkte an den Kegelschnitt ist (§ 326)

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = 0,$$

seine Schnitte mit $x_3 = 0$ sind also durch $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 0$ ausgedrückt. Dies ist aber die Hesse'sche Covariante einer cubischen Form für $a_0 = a_3 = 0$, $3a_1 = 1$, $3a_2 = -1$, also der Form $x_1^2x_2 - x_1x_2^2 = 0$. Der dualistisch entsprechende Satz kann ebenso bewiesen werden.

2) Wenn zwei projectivische Gruppen von Elementen desselben Grundgebildes, von denen die eine aus einfachen Elementen, die andere aus Paaren in Involution besteht, so gelegen sind, dafs die Doppelelemente des involutorischen Systems mit den drei gemeinschaftlichen Elementen beider Gruppen Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bilden, so entspricht jedes der Doppelelemente als Element der zweiten Gruppe dem andern als Element der ersten Gruppe.

Die Gruppen sind darstellbar durch

$$x_1 + \lambda x_2 = 0, \quad (a_1 + \lambda a_2)y_1^2 + (b_1 + \lambda b_2)y_2^2 = 0,$$

die gemeinschaftlichen Elemente also durch

$$a_2 x_1^3 - a_1 x_1^2 x_2 + b_2 x_1 x_2^2 - b_1 x_2^3 = 0.$$

Damit ihre Hesse'sche Covariante

$$(3 a_2 b_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_1 b_2 - 9 a_2 b_1) x_1 x_2 + (3 a_1 b_1 - b_2^2) x_2^2 = 0$$

sich auf $x_1 x_2 = 0$ reducire, müssen die Bedingungen $3 a_2 b_2 = a_1^2$, $3 a_1 b_1 = b_2^2$ erfüllt sein, was nur durch $a_1 = 0$, $b_2 = 0$ geschehen kann, wenn nicht gleichzeitig $a_1 b_2 = 9 a_2 b_1$ werden darf. Dann wird aber die Gleichung der gemeinschaftlichen Elemente

$$a_2 x_1^3 - a_1 x_2^3 = 0,$$

und diese beweist den Satz.

3) Unter welcher Bedingung sind die Elemente einer cubischen Form U conjugirt harmonisch zu denen einer andern V?

Wenn die Coefficienten der einen Form durch a, die der andern durch b bezeichnet werden, so ist die Bedingung

$$a_0 b_3 - a_3 b_0 + 3 a_2 b_1 - 3 a_1 b_2 = 0.$$

Wenn man die Coefficienten der cubischen Covarianten beider Formen abkürzend durch $A_3, \ldots A_6$; B_3, etc. bezeichnet (§ 350; nur zwei Zeichenwechsel unterscheiden sie von den Ableitungen der Discriminante) und ebenso die der quadratischen Covarianten durch a_{02}, a_{03}, a_{13}; b_{02}, etc., so sind auch

$$A_3 b_3 - A_0 b_0 + 3 A_1 b_1 - 3 A_2 b_2, \quad a_3 B_3 - a_6 B_6 + 2 a_5 B_5 - 3 a_4 B_4,$$
$$A_3 B_0 - A_0 B_3 + 3 A_1 B_2 - 3 A_2 B_1, \quad a_{02} b_{13} + a_{13} b_{02} - 2 a_{03} b_{03}$$

Invarianten, und die geometrische Bedeutung ist die folgende: Die beiden ersten drücken durch ihr Verschwinden aus, dafs die drei den Elementen der einen Form in Bezug auf die jedesmaligen beiden andern conjugirten Elemente eine Gruppe bilden, welche in Bezug auf die drei Elemente der andern Form conjugirt harmonisch ist, wie oben verlangt wurde; die dritte gibt durch ihr Verschwinden die Bedingung, unter welcher die beiden Systeme harmonisch conjugirter Elemente zu den Elementen jedes Systems in Bezug auf die jedesmaligen beiden andern zu einander harmonisch sind; und die letzte gibt die Bedingung, unter welcher die beiden Paare der Elemente der Hesse'schen Covarianten beider Formen mit einander ein harmonisches System bilden.

4) Die Jacobi'sche Determinante der beiden Hesse'schen Covarianten der cubischen Formen ist eine Covariante derselben, durch deren Verschwinden das Elementenpaar bestimmt ist, welches zu beiden Paaren der Hesse'schen Covarianten harmonisch conjugirt ist, oder deren jedes mit den Elementen der cubischen

Formen selbst Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bildet.

5) Wenn $U=0$, $V=0$, $W=0$ drei cubische Formen in Involution sind, und die Coefficienten derselben durch a, b, c bez. bezeichnet werden, so verschwinden die Determinanten des Systems

$$\left\| \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \\ c_0, & c_1, & c_2, & c_3 \end{matrix} \right\| .$$

353. **Covarianten der biquadratischen Form.** In Bezug auf ein Quadrupel $U=0$ (§ 351) gibt es eine lineare, eine quadratische und eine cubische Polare, nämlich bez.

$$\begin{gathered}(a_0y_1^3+3a_1y_1^2y_2+3a_2y_1y_2^2+a_3y_2^3)z_1\\ +(a_1y_1^3+3a_2y_1^2y_2+3a_3y_1y_2^2+a_4y_2^3)z_2=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a_0y_1^2+2a_1y_1y_2+a_2y_2^2)z_1^2+2(a_1y_1^2+2a_2y_1y_2+a_3y_2^2)z_1z_2\\ +(a_2y_1^2+2a_3y_1y_2+a_4y_2^2)z_2^2=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a_0y_1+a_1y_2)z_1^3+3(a_1y_1+a_2y_2)z_1^2z_2+3(a_2y_1+a_3y_2)z_1z_2^2\\ +(a_3y_1+a_4y_2)z_2^3=0.\end{gathered}$$

Die Discriminante der quadratischen Polare ist auch die der cubischen Polare und zugleich die Hesse'sche Covariante der biquadratischen Form

$$\begin{gathered}H\equiv(a_0a_2-a_1^2)y_1^4+2(a_0a_3-a_1a_2)y_1^3y_2\\ +(a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2)y_1^2y_2^2+2(a_1a_4-a_2a_3)y_1y_2^3+(a_2a_4-a_3^2)y_2^4=0.\end{gathered}$$

Sie ist endlich auch die Hesse'sche Covariante der ersten Polare von U, *bezeichnet daher nicht nur die Doppelelemente der ersten oder der zweiten Polare von U, sondern auch diejenigen Elemente, die mit den drei Elementen dieser Polare je eine Gruppe von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bilden.*

Die Jacobi'sche Covariante T von U und H (§ 349) gibt in entwickelter Form

$$\begin{gathered}(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)y_1^6+(a_0^2a_4+2a_0a_1a_3-9a_0a_2^2+6a_1^2a_2)y_1^5y_2\\ +(5a_0a_1a_4-15a_0a_2a_3+10a_1^2a_3)y_1^4y_2^2+(10a_1^2a_4-10a_0a_3^2)y_1^3y_2^3\\ +(15a_1a_2a_4-5a_0a_3a_4-10a_1a_3^2)y_1^2y_2^4+(9a_2^2a_4-a_0a_4^2-2a_1a_3a_4\\ -6a_2a_3^2)y_1y_2^5+(3a_2a_3a_4-a_1a_4^2-2a_3^3)y_2^6=0\end{gathered}$$

und bestimmt jene sechs Elemente, in welchen ein Element der ersten Polare eines Elements in Bezug auf das Quadrupel selbst

mit einem Elemente der ersten Polare desselben Elements in Bezug auf das System der Hesse'schen Covariante derselben zusammenfällt; nach dem Vorigen bildet jedes von ihnen mit den Elementen der ersten Polare eine harmonische Gruppe.

Für $a_1 = a_3 = 0$ reduciren sich die Invarianten und Covarianten der biquadratischen Form und diese selbst auf

$$U = a_0 y_1^4 + 6 a_2 y_1^2 y_2^2 + a_4 y_2^4, \quad J_2 = a_0 a_4 + 3 a_2^2, \quad J_3 = a_0 a_2 a_4 - a_2^3,$$
$$H = a_0 a_2 y_1^4 + (a_0 a_4 - 3 a_2^2) y_1^2 y_2^2 + a_2 a_4 y_2^4,$$
$$T = (a_0 a_4 - 9 a_2^2)(a_0 y_1^4 - a_4 y_2^4) y_1 y_2.$$

Man findet aus diesen reducirten Formen die allgemein gültige Relation

$$T^2 = J_2 H U^2 - J_3 U^3 - 4 H^3.$$

Aber für diese reducirte Form von U und H ergibt sich, dafs sie in Factoren von der Form $y_1^2 - \mu y_2^2 = 0$, $y_1^2 - \nu y_2^2 = 0$ zerlegbar sind, während zugleich die Covariante T drei Paare $y_1 y_2 = 0$, $y_1^2 - \lambda y_2^2 = 0$, $y_1^2 + \lambda y_2^2 = 0$ repräsentirt. Dies gibt den Satz: *Die vier Elemente einer biquadratischen Form und ebenso die ihrer Hesse'schen Covariante bestimmen drei Involutionen, und die drei Paare ihrer Doppelelemente — welche für beide dieselben $T = 0$ sind — sind in solcher gegenseitiger Beziehung, dafs jedes von ihnen für die Involution der beiden andern das Paar der Doppelelemente ist.*

Mit den zwei Invarianten J_2, J_3 und den zwei Covarianten H, T ist die Invariantentheorie der biquadratischen Form im Sinne von § 351 erledigt. Überhaupt aber ist der Nachweis erbracht worden,[124]) *dafs jede binäre Form ein endliches Formensystem besitzt: Alle Invarianten und Covarianten einer Form (oder simultaner Formen) sind als ganze Functionen einer endlichen Anzahl von solchen, mit numerischen Coefficienten, darstellbar.*

Neunzehntes Kapitel.

Invariantentheorie der Kegelschnitte.

354. **Invarianten ternärer Formen.** Die Begriffe und Benennungen des vorigen Kapitels lassen sich unmittelbar auf das Gebiet der ternären Formen und homogenen Gleichungen übertragen. Die ternäre lineare Substitution $x_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k'$, deren Modul Δ nicht Null ist, drückt einerseits die allgemeine Coordinatentransformation, anderseits die collineare Zuordnung ebener Gebilde aus (§ 89). Transformiren wir eine oder gleichzeitig mehrere gegebene ternäre Formen linear, so kann eine gleich Null gesetzte Coefficientenfunction $J(a)$ nur dann eine projectivische Eigenschaft des Gebildes oder der Gebilde ausdrücken, wenn dieselbe Function der transformirten Coefficienten $J(a)$ gleichzeitig verschwindet. Alsdann zeigt sich, dafs dies Invarianten, d. h. wieder Functionen der Coefficienten einer oder mehrerer Formen sind, welche sich bei linearer Transformation derselben nur um eine Potenz des Substitutionsmoduls als Factor ändern

$$J(a') = \Delta^r \cdot J(a) \quad \text{oder} \quad J(a', b', \cdot\cdot) = \Delta^r \cdot J(a, b, \cdot\cdot).$$

Soll insbesondere ein gegebenes Formensystem, das von k Constanten abhängt, in ein anderes System von Formen derselben Grade transformirt werden können, so mufs die Zahl der nötigen Bedingungen kleiner als die der verfügbaren Constanten der Substitution sein. Also mufs entweder $k \leqq 8$ sein oder i Coefficientenrelationen bestehen, so dafs $k - i \leqq 8$ wird. Die Relationen haben wiederum nachweisbar Invariantencharacter und sind überdies von der Substitution

völlig unabhängig ($r = 0$). Demnach besitzt das Formensystem mindestens $k - 8$ absolute Invarianten, eine Form n^{ter} Ordnung also deren $n\frac{n+3}{2} - 8$. *Unter den ternären allgemeinen Formen besitzen (außer den linearen) nur die quadratischen* ($k = 5$) *keine absolute, also nicht mehr als eine gewöhnliche Invariante* (§ 339).

Man pflegt den Namen Invarianten vorzugsweise auf die allgemeinen linearen Umformungen zu beziehen. Jedoch kann man offenbar auch *relative Invarianten* bilden, die nur gegenüber Substitutionen specielleren Characters die Invarianteneigenschaft besitzen. Alle Eigenschaften, welche sich nur bei Umformungen durch Affinität (§ 99) erhalten, werden durch Nullsetzung von Coefficientenfunctionen ausgedrückt, welche sich nur bei Substitutionen mit $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$ um eine Potenz von $\alpha_{33}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})$ ändern. So ist z. B. der Parallelismus von Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$, die Gattung des Kegelschnittes $S = 0$ (§ 145) eine affine Eigenschaft; daher sind $a_1 b_2 - a_2 b_1$ und $a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ *Affinitäts- oder Parallelinvarianten.* Wir erkennen somit, dafs diese eigentlich nur Invarianten binärer Formen sind, weil die unendlich ferne Gerade $x_3 = 0$ in sich selbst $x_3' = 0$ transformirt wird.

Eine noch speciellere Untergruppe der linearen Substitutionen bilden die Ähnlichkeitstransformationen, also die orthogonalen Substitutionen. Auf die ihnen entsprechenden *metrischen oder Orthogonalinvarianten* wird später besonders einzugehen sein (§ 379).

Aus der allgemeinen Invariantentheorie der ternären Formen heben wir hier *nur* die Grundzüge derjenigen der quadratischen Formen heraus.

355. **Discriminante.** Eine quadratische Form S besitzt nur *eine* Invariante, nämlich ihre Discriminante Δ (früher $\mathbf{D}$). Diese ist invariant, da ihr Verschwinden eine projectivische Bedingung, das Zerfallen in ein Linienpaar ausdrückt. In der Tat sind alle nicht-zerfallenden Kegelschnitte unter einander collinear.

Den Invariantencharacter der Discriminante $\varDelta$ erkennen wir rein analytisch, indem

$$\varDelta' = \triangle^2 \cdot \varDelta$$

ist, wenn $\varDelta'$ dieselbe Determinante der Coefficienten a_{ik}' der transformirten Form S' ist, wie $\varDelta$ der a_{ik}. Man hat nämlich zuerst

$$\triangle \cdot \varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \alpha_{31} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \alpha_{32} \\ \alpha_{13}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{a}_{32}, & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix}$$

für $\mathfrak{a}_{ik} = \alpha_{1k} a_{i1} + \alpha_{2k} a_{i2} + \alpha_{3k} a_{i3}$ und sodann

$$\triangle^2 \cdot \varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \alpha_{31} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \alpha_{32} \\ \alpha_{13}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{31} \\ \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{32} \\ \mathfrak{a}_{13}, & \mathfrak{a}_{23}, & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}', & a_{21}', & a_{31}' \\ a_{12}', & a_{22}', & a_{32}' \\ a_{13}', & a_{23}', & a_{33}' \end{vmatrix}$$

für $a_{ik}' = \alpha_{1k}\mathfrak{a}_{1i} + \alpha_{2k}\mathfrak{a}_{2i} + \alpha_{3k}\mathfrak{a}_{3i}$. Durch die Determinantenmultiplication erhält man so

$$a_{ik}' = \sum_l \alpha_{lk}\mathfrak{a}_{li} = \sum_l \alpha_{lk} \sum_m \alpha_{mi} a_{lm} = \sum_{l,\,m} \alpha_{lk}\alpha_{mi} a_{lm}$$

d. h. genau dasselbe, wie für den Coefficienten $x_i' x_k'$ in der Entwickelung

$$\sum_{l,\,m} a_{lm} x_l x_m = \sum_{l,\,m} a_{lm} \left(\sum_k \alpha_{lk} x_k'\right) \left(\sum \alpha_{mi} x_i'\right).$$

Letztere können wir auch durch Benutzung der symbolischen Methode ersetzen, wonach $S \equiv a_x^2$ ist, falls das Product der Symbole a_i und a_k den Coefficienten a_{ik} nur vertritt. Denn die Symbole a_i werden invers transformirt, wie die Variabeln x_i, also ist

$$a_i' a_k' = (\Sigma \alpha_{li} a_l)(\Sigma \alpha_{mk} a_m).$$

Offenbar begründet derselbe Beweisgang die Invarianteneigenschaft der analog gebildeten Discriminante für quadratische Formen von beliebig vielen Variabeln.

Die Bedingung $\varDelta = 0$ wurde in § 324 als diejenige erhalten, welche ausdrückt, dafs die Polaren von willkürlichen Punkten in Bezug auf $S = 0$ durch einen Punkt gehen. Nun ist die Büschelbildung dreier Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ eine projectivische Eigenschaft; *also ist die Coefficienten-*

determinante dreier linearer Formen eine Simultaninvariante derselben. Wirklich ist

$$\begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3' \\ b_1', & b_2', & b_3' \\ c_1', & c_2', & c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \alpha_{31}a_3, \cdot, \cdot \\ \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \alpha_{31}b_3, \cdot, \cdot \\ \alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + \alpha_{31}c_3, \cdot, \cdot \end{vmatrix} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Die Discriminante ändert sich dagegen um das Modulquadrat, weil die Determinante der transformirten Coefficienten nicht einfach die Resultante der transformirten Ableitungen ist, sondern diejenige der Ableitungen der transformirten Form; letztere sind lineare Aggregate der ersteren und zwar beweist man nach § 342 allgemein: *Die Ableitungen einer Form von beliebig vielen Variabeln werden contragredient zu letzteren transformirt* (§ 88).

356. **Harmonische Invarianten.** *Aus der Discriminante entspringen auch die Simultaninvarianten zweier und dreier Kegelschnitte,* wie in § 340 für Elementenpaare. Wir bilden die Discriminante eines Kegelschnittbüschels $S_1 + kS_2 = 0$ oder (symbolisch) $a_x^2 + kb_x^2 = 0$, d. h. wir ersetzen die Coefficienten a_{ij} durch $a_{ij} + kb_{ij}$ und erhalten so

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kb_{11}, & a_{12} + kb_{12}, & a_{13} + kb_{13} \\ a_{21} + kb_{21}, & a_{22} + kb_{22}, & a_{23} + kb_{23} \\ a_{31} + kb_{31}, & a_{32} + kb_{32}, & a_{33} + kb_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Entwickelung dieser in k cubischen Function liefert augenscheinlich als constantes Glied die Discriminante Δ_1 von $S_1 = 0$ und als Coefficienten von k^3 die Discriminante Δ_2 von $S_2 = 0$. Bezeichnen wir die Reihen a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} von Δ_1 als die 1., 2., 3., b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} von Δ_2 als die 1.', 2.', 3.', so können wir die Coefficienten Θ_1 von k und Θ_2 von k^2 als Summen von je drei Determinanten schreiben

$$\Theta_1 = |1', 2, 3| + |1, 2', 3| + |1, 2, 3'|, \quad \Theta_2 = |1, 2', 3'| + |1', 2, 3'| + |1', 2', 3|.$$

Explicite ist also die Entwickelung der ersten

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} b_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ b_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ b_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & b_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & b_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & b_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & b_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & b_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{23}b_{23} + 2A_{31}b_{31} + 2A_{12}b_{12},$$

wenn die A_{ij} wiederum als die zu a_{ij} adjungirten Elemente gelten (§ 163). Da auch $A_{ij} = \frac{\partial \varDelta_1}{\partial a_{ij}}$ ist, so geht Θ_1 aus $\varDelta_1$ nach dem Taylor'schen Satze so hervor, wie wenn nach der Ausdrucksweise des § 347 die Polare von $\varDelta_1$ für das Wertsystem b_{ij} gebildet wird. Aus Θ_1 folgt Θ_2 durch Vertauschung von a_{ij}, b_{ij}, A_{ij} mit b_{ij}, a_{ij}, B_{ij} bez.

Das Verschwinden der Discriminante des Büschels[125])

$$\varDelta_1 + \Theta_1 k + \Theta_2 k^2 + \varDelta_2 k^3 = 0$$

definirt die Parameter k', k'', k''' der drei in ihm enthaltenen Linienpaare (§ 270). Durch Elimination von k mittelst der Gleichung $S_1 + kS_2 = 0$ erhält man *die Gleichung dieser drei Linienpaare* geradezu in der Form sechster Ordnung

$$\varDelta_1 S_2^3 - \Theta_1 S_1 S_1^2 + \Theta_2 S_1^2 S_2 - \varDelta_2 S_1^3 = 0.$$

Nun sind aber die drei Wurzeln der cubischen Gleichungen von Collineationen des Büschels *unabhängig*, d. h. geht durch Transformation S_1, S_2 in S_1', S_2' bez. über, so sind auch für jeden Wert von k die Kegelschnitte $S_1 + kS_2 = 0$, $S_1' + kS_2' = 0$ collinear. Wenn also unter den Coefficienten der cubischen Gleichung zwei nur durch den vortretenden Factor Δ^2 geändert werden, so müssen auch die beiden andern dieselbe Änderung erfahren. Somit ist $\Theta_1' = \Delta^2 \cdot \Theta_1$, $\Theta_2' = \Delta^2 \cdot \Theta_2$ und *Θ_1, Θ_2 sind zwei Simultaninvarianten der Formen S_1, S_2 oder Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$* (nicht aber Invarianten des Büschels).

B. Man soll den Ort des Schnittpunktes derjenigen Normalen eines Kegelschnittes finden, welche in den Enden einer durch den Punkt $\alpha \mid \beta$ gehenden Sehne errichtet werden.

Sei $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - 0$ die Gleichung der Curve, so sind nach § 192 die Fuſspunkte der durch einen gegebenen Punkt $x' \mid y'$ gehenden Normalen in den Schnittpunkten von $S_1 = 0$ mit der Hyperbel $S_2 \equiv 2(c^2 xy + b^2 y' x - a^2 x' y) = 0$. Man bildet dann nach dem Texte die Gleichung der sechs Verbindungsgeraden dieser Fuſspunkte, und drückt aus, daſs diese Gleichung durch die Coordinaten $\alpha \mid \beta$ erfüllt werde. Im gegenwärtigen Falle ist

$$\varDelta_1 = -\frac{1}{a^2 b^2}, \quad \Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = -(a^2 x'^2 + b^2 y'^2 - c^4),$$
$$\varDelta_2 = -2a^2 b^2 c^2 x' y';$$

die Gleichung des Ortes also wird

$$\frac{8}{a^2b^2}(a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta)^3 + 2a^2b^2c^2xy\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)^3$$

$$+ 2(a^2x^2+b^2y^2-c^4)(a^2\beta x+b^2\alpha y-c^2\alpha\beta)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)^2=0,$$

und er ist daher im allgemeinen eine *Curve dritter Ordnung.*

Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, d. h. wenn der Punkt in einer der Axen liegt, reducirt sich der Ort auf einen *Kegelschnitt;* die bezügliche Axe ist dann selbst ein Teil des Ortes. Der Ort reducirt sich auch auf einen Kegelschnitt, wenn der gegebene Punkt unendlich entfernt ist, d. h. wenn der Schnittpunkt der Normalen zu bestimmen ist, die in den Enden paralleler Sehnen liegen.

357. Da das Büschel nur *eine,* von k abhängige, Invariante hat, so liegt der Schlufs nahe, dafs das Curvenpaar $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ keine Invarianten hat, die sich nicht auf Δ_1, Δ_2, Θ_1, Θ_2 zurückführen liefsen. In der Tat beweist aber die Invariantentheorie, dafs *alle Invarianten des Kegelschnittpaares rationale Functionen von* Δ_1, Δ_2, Θ_1, Θ_2 *mit numerischen Coefficienten sind.*

Offenbar sind umgekehrt nur solche rationale Functionen der vier Gröfsen, welche sie homogen enthalten, Invarianten. Denn nur solche ändern sich um eine Potenz des Moduls, da Δ_1, Δ_2, Θ_1, Θ_2 sich ganz gleichartig ändern. *Ferner mufs jede Invariante in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogen sein,* während Δ_1, Θ_1, Θ_2, Δ_2 in denen von S_1 vom dritten, zweiten, ersten, nullten Grade bez. sind. Diese beiden Anforderungen erleichtern die Aufstellung des Invariantenausdrucks einer projectivischen Beziehung der beiden Kegelschnitte, denn eine leichte Überlegung zeigt, dafs eine ganze Function von bestimmten Graden in den a_{ij} und b_{ij} nur eine endliche Anzahl von Producten jener vier fundamentalen Invarianten enthalten kann.

Diese Gradverhältnisse in den Coefficienten werden *unkenntlich,* wenn wir für Formen mit numerischen Coefficienten die Invarianten bilden, bleiben aber stets zu berücksichtigen. Für specielle Beziehungen der Kegelschnitte zum Coordinatensystem reduciren sich die vier Invarianten auf einfachere

Ausdrücke. Gerade diese erleichtern es oft sehr, gegebenenfalls homogene Relationen zwischen den Invarianten, d. h. projectivische Beziehungen zu erkennen. Eine jede solche Relation gilt dann, ihrer analytischen Natur gemäfs, nicht nur für die specielle Abhängigkeit vom Coordinatensystem, sondern für *jede* Coordinatenwahl.

Im allgemeinen besitzen zwei Kegelschnitte ein gemeinsames Polardreieck und können in den Normal-Gleichungsformen angenommen werden (§ 314)

$$S_1 \equiv \Sigma a_{ii} x_i^2 = 0, \quad S_2 \equiv \Sigma x_i^2 = 0.$$

Alsdann sind die vier Invarianten

$$\Delta_1 = a_{11} a_{22} a_{33}, \quad \Theta_1 = a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22},$$
$$\Theta_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad \Delta_2 = 1$$

einfach die elementarsymmetrischen Functionen der a_{ij}. Als die Parameter der Linienpaare folgen also $-a_{11}$, $-a_{22}$, $-a_{33}$ (§ 356).

B. 1) Wenn $S_2 = 0$ wie im Text vorausgesetzt wird, aber $S_1 = 0$ die allgemeine Gleichung repräsentirt, so ist

$$\Theta_1 = (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + (a_{33} a_{11} - a_{31}^2) + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$
$$\Theta_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

2) Für zwei Kreise, welche dargestellt sind durch

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 - \varrho_1^2 = 0, \quad S_2 \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho_2^2 = 0$$

ist $\Delta_1 = -\varrho_1^2$, $\Theta_1 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\varrho_1^2 - \varrho_2^2$, $\Theta_2 = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho_1^2 - 2\varrho_2^2$, $\Delta_2 = -\varrho_2^2$. Ist daher d die Entfernung der Centra beider Kreise von einander, so repräsentirt $S_1 + kS_2 = 0$ Gerade für die Werte von k, die wir aus

$$\varrho_1^2 + (2\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - d^2) k + (\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 - d^2) k^2 + \varrho_2^2 k^3 = 0$$

erhalten. Da nun wie bekannt $S_1 - S_2 = 0$ die Radicalaxe und die unendlich ferne Gerade darstellt, so ist -1 eine Wurzel dieser Gleichung, und dieselbe ist durch $(k + 1)$ teilbar; der Quotient ist $\varrho_1^2 + (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - d^2) k + \varrho_2^2 k^2 = 0$.

3) Wenn $\quad S_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$

$$S_2 \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho^2 = 0,$$

so ist $\Delta_1 = -\frac{1}{a^2b^2}$, $\Theta_1 = \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2-\varrho^2)$,

$$\Theta_2 = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - \varrho^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right), \quad \Delta_2 = -\varrho^2.$$

4) Für die Parabel $S_1 \equiv y^2 - 4mx = 0$ und $S_2' = 0$ als die allgemeine Gleichung des Kreises wie vorher ist

$\Delta_1 = -4m^2$, $\Theta_1 = -4m(\alpha+m)$, $\Theta_2 = \beta^2 - 4m\alpha - \varrho^2$, $\Delta_2 = -\varrho^2$.

5) Berechne die Invarianten für zwei Kegelschnitte, die demselben Dreieck bez. ein- und umgeschrieben sind. Für

$$S_1 \equiv (a_1^2x_1^2 - 2a_2a_3x_2x_3) + \text{etc.} = 0,$$

$$S_2 \equiv 2(a_{23}'x_2x_3 + a_{31}'x_3x_1 + a_{12}'x_1x_2) = 0$$

ist $\Delta_1 = -4a_1^2a_2^2a_3^2$, $\Theta_1 = 4a_1a_2a_3(a_1a_{23}' + a_2a_{31}' + a_3a_{12}')$,

$$\Delta_2 = 2a_{23}'a_{31}'a_{12}', \quad \Theta_2 = -(a_{23}'a_1 + a_{31}'a_2 + a_{12}'a_3)^2.$$

358. **Tactinvariante.** Wenn von den vier Schnittpunkten A, B, C, D der Kegelschnitte zwei, A und B, sich decken, so ist offenbar das Linienpaar AC, BD mit dem Paar BC, AD identisch, und die cubische Gleichung

$$\Delta_1 + \Theta_1 k + \Theta_2 k^2 + \Delta_2 k^3 = 0$$

mufs ein Paar gleiche Wurzeln besitzen. Man findet die Bedingung dafür im Verschwinden der Discriminante der cubischen Gleichung (§ 350) von der Form

$$4(\Theta_1^2 - 3\Delta_1\Theta_2)(\Theta_2^2 - 3\Delta_2\Theta_1) = (\Theta_1\Theta_2 - 9\Delta_1\Delta_2)^2 \quad \text{oder}$$

$$\Theta_1^2\Theta_2^2 + 18\Delta_1\Delta_2\Theta_1\Theta_2 - 27\Delta_1^2\Delta_2^2 - 4\Delta_1\Theta_2^3 - 4\Delta_2\Theta_1^3 = 0.$$

Dies ist *die invariante Bedingung der Berührung zwischen den Kegelschnitten.*

Man beweist in der Theorie der Gleichungen, dafs die linke Seite derselben, die sog. *Tactinvariante,* zu dem Product der Quadrate der Differenzen der Wurzeln proportional ist, welche die Gleichung in k besitzt: wenn sie positiv ist, so sind diese Wurzeln sämmtlich reell, wenn sie negativ ist, so sind zwei von ihnen complex. Im letztern Falle schneiden sich (vgl. § 271) die beiden Kegelschnitte in zwei reellen und zwei imaginären Punkten, im ersten Falle schneiden sie einander entweder in vier reellen oder in vier imaginären Punkten. Diese beiden letzteren Fälle unterscheiden sich nicht durch ein einfaches Kennzeichen.[126])

Wenn die drei Schnittpunkte A, B, C zusammenrücken oder die Kegelschnitte einander osculiren, so sind die Linienpaare AB, CD; BC, AD; CA, BD identisch. Also mufs die linke Seite der cubischen Gleichung ein vollständiger Cubus sein und das erfordert nach § 350, dafs die drei eingeklammerten Gröfsen der Tactinvariante gleichzeitig verschwinden. *Die Invariantenbedingungen der Osculation sind daher* (vgl. Vorles. Art. 377. 8)

$$3\Delta_1 : \Theta_1 = \Theta_1 : \Theta_2 = \Theta_2 : 3\Delta_2.$$

Die Bedingung der Doppelberührung ist anderer Art und wird später erhalten (§§ 368, 371, 5).

B. 1) Man soll nach der Methode des Textes die Bedingung finden, unter der zwei Kreise sich berühren.

Damit die reducirte Schlufsgleichung § 357, 2) gleiche Wurzeln hat, erhält man $\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - d^2 = \pm 2\varrho_1\varrho_2$ oder $d = \varrho_1 \pm \varrho_2$, wie es geometrisch offenbar ist.

2) Man bestimme den *Ort des Centrums für einen Kreis von constantem Radius, welcher stets einen gegebenen Kegelschnitt berührt.*

Dazu setzen wir in die Gleichung des Textes (Dicriminante $= 0$) die Werte von Δ_1, Δ_2, Θ_1, Θ_2 ein, welche in § 347, 3) und 4) gegeben wurden, und betrachten sodann $\alpha \,|\, \beta$ als die laufenden Coordinaten. Der Ort ist im allgemeinen eine *Curve achter Ordnung,* im Falle der *Parabel* eine Curve *sechster* Ordnung. Dieselbe Curve erhält man als den Ort der Endpunkte, wenn man auf allen Normalen der Curve von dieser aus eine constante Länge gleich ϱ abträgt. Man nennt sie auch die *Parallelcurve des Kegelschnittes.* Sie hat mit dem Kegelschnitt selbst die nämliche Evolute (§ 264). Ihre Gleichung liefert auch die Bestimmung der normalen Entfernungen, welche von einem beliebigen Punkte aus zum Kegelschnitt gemessen werden. In voller Entwickelung ist sie für die Parabel $y^2 = 4mx$

$$\varrho^6 - (3y^2 + x^2 + 8mx - 8m^2)\varrho^4 + \{3y^4 + y^2(2x^2 - 2mx + 20m^2) + 8mx^3 + 8m^2x^2 - 32m^3x + 16m^4\}\varrho^2 - (y^2 - 4mx)^2\{y^2 + (x-m)^2\} = 0;$$

und für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn man $c^2 = a^2 - b^2$ setzt,

$$c^4\varrho^8 - 2c^2\varrho^6\{c^2(a^2 + b^2) + (a^2 - 2b^2)x^2 + (2a^2 - b^2)y^2\}$$
$$+\varrho^4\{c^4(a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 2c^2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4)x^2 + 2c^2(3a^4 - a^2b^2 + b^4)y^2$$
$$+(a^4 - 6a^2b^2 + 6b^4)x^4 + (6a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^4 + (6a^4 - 10a^2b^2 + 6b^4)x^2y^2\}$$

$$+\varrho^2\{-2a^2b^2c^4(a^2+b^2)+2c^2(3a^4-a^2b^2+b^4)x^2-2c^2(a^4-a^2b^2+3b^4)y^2$$
$$-b^2(6a^4-10a^2b^2+6b^4)x^4-a^2(6a^4-10a^2b^2+6b^4)y^4$$
$$+(4a^6-6a^4b^2-6a^2b^4+4b^6)x^2y^2+2b^2(a^2-2b^2)x^6$$
$$-2(a^4-a^2b^2+3b^4)x^4y^2-2(3a^4-a^2b^2+b^4)x^2y^4+2a^2(b^2-2a^2)y^6\}$$
$$+(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)^2\{(x-c)^2+y^2\}\{(x+c)^2+y^2\}=0.$$

Darnach ist der Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate seiner normalen Abstände von der Ellipse bez. Parabel gegeben ist (N), ein Kegelschnitt, dargestellt durch

$$(a^2-2b^2)x^2+(2a^2-b^2)y^2+a^4-b^4=N$$

bez.
$$x^2+3y^2+8m(x-m)=N.$$

Wenn wir die Bedingung bilden, unter welcher die Gleichung in ϱ^2 gleiche Wurzeln hat, so erhalten wir das Product aus den linken Seiten der Gleichungen der Axen und der unendlich fernen Geraden in den Cubus der linken Seite der Gleichung der Evolute. Für $\varrho=0$, für Geraden und aus dem finden wir die Curve selbst, doppelt gezählt, und ihre Brennpunkte, nämlich

$$\{(x-c)^2+y^2\}\{(x+c)^2+y^2\}=0 \quad \text{bez.} \quad y^2+(x-m)^2=0$$

d. h. im ersten Falle die vier Verbindungsgeraden je eines reellen und eines imaginären Brennpunktes der Ellipse, welche Tangenten derselben sind. Der Voraussetzung $a=b$ entspricht als Parallelcurve des Kreises ein Paar von concentrischen Kreisen

$$x^2+y^2-(a\pm\varrho)^2=0$$

und die vier Geraden $(x^2+y^2)^2=0$, welche die Tangenten des Kreises aus seinem Centrum oder die nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen gehenden Geraden, doppelt gezählt sind.

Endlich lehrt die allgemeine Form der Gleichung im Texte[127]) (§ 275), dafs die Parallelcurve von den Curven vierter Ordnung $\Theta_1^2-3\Delta_1\Theta_2=0$, $\Theta_2^2-3\Delta_2\Theta_1=0$ ($\alpha\,|\,\beta$ laufende Coordinaten) in den Punkten berührt wird, in welchen sie die Curve vierter Ordnung $\Theta_1\Theta_2-9\Delta_1\Delta_2=0$ schneidet, d. h. in den Punkten, welche zu den Punkten der Krümmungshalbmesser ϱ gehören.

3) *Bestimmung der Krümmungskreise ϱ des Kegelschnittes.*

Setzen wir in die Bedingungen der Osculation im Texte dieselben Werte ein wie in 2), so bestimmen zwei derselben die vier Krümmungsmittelpunkte $\alpha\,|\,\beta$ zu dem gegebenen Krümmungsradius ϱ. Man erhält sie aus $\Theta_1=3(\Delta_1^2\Delta_2)^{\frac{1}{3}}$, $\Theta_2=3(\Delta_1\Delta_2^2)^{\frac{1}{3}}$ als die Schnittpunkte von

$$x^2+y^2-a^2-b^2-\varrho^2=-3(ab\varrho)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{und}$$
$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2-\varrho^2(a^2+b^2)=-3(ab\varrho)^{\frac{4}{3}} \quad \text{(vgl. 2).}$$

Für die Parabel findet man die zwei Schnittpunkte von

$$4m(x+m) = 3(4m^2\varrho)^{\frac{2}{3}}, \quad y^2 - 4mx - \varrho^2 = 3(2m\varrho^2)^{\frac{2}{3}}.$$

4) *Gleichung der Evolute der Ellipse.*

Man hat die Bedingung auszudrücken, unter der die Curven $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in § 356 B. sich berühren. Für $\Theta_1 = 0$ reducirt sich aber die Bedingung der Existenz gleicher Wurzeln in $\Delta_1 + \Theta_1 k + \Theta_2 k^2 + \Delta_2 k^3 = 0$ auf $27\Delta_1\Delta_2^2 + 4\Theta_2^3 = 0$, d. h. die Gleichung der Evolute ist (vgl. § 240)

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0.$$

5) *Gleichung der Evolute der Parabel.*

Weil $S_1 \equiv y^2 - 4mx$, $S_2 \equiv 2xy + 2(2m - x')y - 4my'$, $\Delta_1 = -4m^2$, $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = -4m(2m - x')$, $\Delta_2 = 4my'$ ist, so ist die Gleichung der Evolute $27my^2 = 4(x - 2m)^3$. Es ist zu bemerken, dafs die Schnittpunkte von $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ nicht nur die Fufspunkte der drei Normalen liefern, welche von einem beliebigen Punkte ausgehen (§ 221), sondern auch den unendlich fernen Punkt der Axe $y = 0$. Die sechs Sehnen zwischen diesen Schnittpunkten sind also die Seiten des Dreiecks der Fufspunkte und die drei Parallelen zur Axe durch diese Punkte. Darum ist die in § 356 B. angewendete Methode für die Lösung des entsprechenden Problems bei der Parabel nicht die einfachste; man erhält zwar die Gleichung § 229, 9), aber multiplicirt mit dem Factor

$$4m(2my + y'x - 2my') - y'^3.$$

6) Man zeige, dafs die Bedingung der Berührung für einen dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen und einen ihm umgeschriebenen Kegelschnitt (§ 357, 5) die Relation ist

$$(a_1 a_{24}')^{\frac{1}{3}} + (a_2 a_{31}')^{\frac{1}{3}} + (a_3 a_{12}')^{\frac{1}{3}} = 0,$$
$$4(a_1 a_{33}' + \cdot\cdot)^3 = 27 a_1 a_2 a_3 a_{23}' a_{31}' a_{12}'.$$

359. **Kegelschnitt und Linienpaar.** Wenn von den beiden Kegelschnitten $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ der zweite in ein Linienpaar degenerirt, so ist $\Delta_2 = 0$, und wir dürfen den Kegelschnitt $S_2 = 0$ durch $x_1x_2 = 0$ und das Büschel daher durch $S_1 + 2kx_1x_2 = 0$ dargestellt ansehen. Die Discriminante des Büschels findet man, indem man in Δ_1 für a_{12} die Summe $(a_{12}+k)$ substituirt, in der Form $\Delta_1 + 2k(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) - a_{33}k^2$. Es ist also

$$\Theta_2 = -a_{33}, \quad \Theta_1 = 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) = A_{12},$$

d. h. Θ_2 verschwindet zugleich mit a_{33} und Θ_1 für $a_{13}a_{23} = a_{12}a_{33}$ oder $A_{12} = 0$; jenes bedingt, dafs der Punkt $x_1 = x_2 = 0$ in der Curve $S_1 = 0$ liegt, dieses, dafs die beiden Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in Bezug auf $S_2 = 0$ conjugirt sind. (§ 155, 1.)

Nun gilt aber diese Invariantenrelation auch bei allgemeiner Coordinatenwahl. Also ergibt sich: *Wenn $S_2 = 0$ ein Linienpaar darstellt ($\Delta_2 = 0$), so repräsentirt $\Theta_2 = 0$ die Bedingung, unter welcher der Schnittpunkt der beiden Geraden in der Curve $S_1 = 0$ liegt; $\Theta_1 = 0$ aber die Bedingung, unter welcher diese beiden Geraden in Bezug auf $S_1 = 0$ harmonische Polaren sind.* Schreibt man in den Gleichungen Liniencoordinaten als Variable, so gilt: Wenn $\Sigma_2 = 0$ zwei Punkte darstellt ($\Delta_2 = 0$), so repräsentirt $\Theta_2 = 0$ die Bedingung, unter welcher ihre Verbindungslinie eine Tangente von $\Sigma_1 = 0$ ist, und $\Theta_1 = 0$ die Bedingung, unter welcher beide Punkte in Beziehung auf $\Sigma_1 = 0$ harmonische Pole sind.

In den Beziehungen des Kegelschnittes zu dem Linienpaar kann derselbe offenbar vollständig durch das vom Doppelpunkt $x' \mid y'$ des letzteren an ihn gehende Tangentenpaar vertreten werden. Zur analytischen Prüfung führen wir die Gleichung des Tangentenpaares aus $x_1 = x_2 = 0$ ein (§ 156)

$$A_{22}x_1^2 - 2A_{12}x_1x_2 + A_{11}x_2^2 = 0.$$

Dann ist dasselbe harmonisch zu $x_1x_2 = 0$, wenn $A_{12} = 0$ und eine Doppellinie, wenn $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \Delta_1 \cdot a_{33} = 0$. Somit sind im Grunde genommen *die Simultaninvarianten Θ_1, bez. Θ_2 eines Kegelschnittes und eines Linienpaares einfach die binäre harmonische Invariante Θ_1, bez. die Discriminante Δ des Linienpaares und des mit ihm concentrischen Tangentenpaares.*

Die Discriminante der Gleichung $\Delta_1 + \Theta_1 k + \Theta_2 k^2 = 0$ gibt durch ihr Verschwinden nach § 358 die Bedingung $4\Delta_1\Theta_2 = \Theta_1^2$, damit *eine* der Geraden des Linienpaares $S_2 = 0$ den Kegelschnitt $S_1 = 0$ berührt. In dem oben gewählten Coordinatensystem bestätigt man dies leicht, da dann

$$\Theta_1^2 - 4\Delta_1\Theta_2 = a_{33}\Delta_1 + A_{12}^2 = A_{13} \cdot A_{23} \text{ ist.}$$

360. Wenn insbesondere S_2 ein vollständiges Quadrat ist, so kann man das Büschel transformiren zu $S_1 + kx_1^2 = 0$. Die Discriminante desselben ist dann $\Delta_1 + kA_{11}$, also ist $\Theta_1 = A_{11} = 0$ die Bedingung der Berührung des Kegelschnittes $S_1 = 0$ mit der Geraden $S_2 = 0$. Dies weist auf einen Zusammenhang dieser Invariante Θ_1 mit der Tangentialform von S_1 hin.

Wir können direct die Gleichung der Tangenten des Kegelschnittes $S_1 = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Geraden $\xi_x = 0$ bestimmen. Dieselben bilden unter den den Kegelschnitt $S_1 = 0$ in diesen Punkten doppelt berührenden Kegelschnitten $S_1 + k\xi_x^2 = 0$ denjenigen, welcher in ein Linienpaar degenerirt. Man hat in diesem Falle nicht nur $\Delta_2 = 0$, sondern es verschwinden auch alle Unterdeterminanten von Δ_2, also ist nach § 356 auch $\Theta_2 = 0$. Man findet so für die cubische Gleichung $\Delta_1 + \Theta_1 k = 0$; d. h. aufser der doppelt zu zählenden Wurzel $k = \infty$, die der Geraden $\xi_x = 0$ selbst entspricht, liefert sie nur *einen* Wert von k, der eben die fraglichen Tangenten bestimmen mufs. Nun hat man aber $b_{ik} = \xi_i \xi_k$, also Θ_1

$$\equiv A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{31}\xi_3\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2,$$

d. h. Θ_1 *ist mit dem Polynom* Σ_1 *der Tangentialgleichung des Kegelschnittes* $S_1 = 0$ *identisch* (§ 323). Aus $\Delta_1 + k\Sigma_1 = 0$ ergibt sich daher die Gleichung des Tangentenpaares

$$\Sigma_1 S_1 = \Delta \xi_x^2.$$

Wenn $\xi_x = 0$ den Kegelschnitt $S_1 = 0$ berührt, so fällt das Tangentenpaar mit dieser Geraden selbst zusammen, und die bezügliche Bedingung ist eben $\Theta_1 = 0$ oder $\Sigma_1 = 0$. Wenn die ξ_i speciell durch die Seitenlängen l_i des Fundamentaldreiecks ersetzt werden, so liefert die erhaltene Gleichung die *Bestimmung der Asymptoten* des durch die allgemeine homogene Gleichung in trimetrischen Coordinaten ausgedrückten Kegelschnittes.

B. 1) Für $S^{(1)} = 0$, $S^{(2)} = 0, \ldots$ als Gleichungen von fünf festen Kegelschnitten, ist es immer in unendlich vielen Arten

möglich, fünf Constanten k_1, k_2, ... so zu bestimmen, dafs die Summe

$$k_1 S^{(1)} + k_2 S^{(2)} + k_3 S^{(3)} + k_4 S^{(4)} + k_5 S^{(5)}$$

entweder ein vollständiges Quadrat L^2, oder das Product von zwei linearen Factoren MN ist. Man soll zeigen, *dafs die Gerade $L = 0$ einen festen Kegelschnitt $V = 0$ umhüllt, und dafs die Geraden $M = 0$, $N = 0$ in Bezug auf denselben einander conjugirt sind.*

Wir können $V = 0$ so bestimmen, dafs die Invariante Θ_1 für V und jeden der fünf Kegelschnitte verschwindet, weil dies für A_{ij} als die Coefficienten der Gleichung von V in Liniencoordinaten durch fünf Gleichungen von der Form bedingt wird

$$A_{11}a_{11}^{(1)} + A_{22}a_{22}^{(1)} + A_{33}a_{33}^{(1)} + 2A_{23}a_{23}^{(1)} + 2A_{31}a_{31}^{(1)} + 2A_{12}a_{12}^{(1)} = 0,$$

die zur Bestimmung der Verhältnisse der sechs A_{ij} hinreichen.

Aus der Erfüllung dieser Gleichungen folgt aber zugleich

$$\Sigma A_{ij}(k_1 a_{ij}^{(1)} + k_2 a_{ij}^{(2)} + k_3 a_{ij}^{(3)} + k_4 a_{ij}^{(4)} + k_5 a_{ij}^{(5)}) = 0,$$

d. h. Θ_1 verschwindet für $V = 0$ und einen beliebigen Kegelschnitt des Systems $\Sigma k_\lambda S^{(\lambda)} = 0$, womit der Satz bewiesen ist. Wenn die Gerade $M = 0$ gegeben ist, so geht $N = 0$ durch einen festen Punkt, nämlich durch den Pol von $M = 0$ in Bezug auf $V = 0$.

2) Wenn sechs Gerade $x_1 = 0, \ldots, x_6 = 0$ Tangenten desselben Kegelschnittes sind, so sind die Quadrate ihrer Gleichungen durch eine lineare Relation

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 + k_5 x_5^2 + k_6 x_6^2 = 0$$

verbunden.[128]) Dies ist ein specieller Fall des vorigen, ergibt sich aber direct, wie folgt.

Man schreibt die sechs Bedingungen nach § 163 für die Berührung der sechs Geraden mit dem Kegelschnitt und eliminirt die unbekannten Coefficienten A_{ij} seiner Gleichung; die Bedingung des Satzes ist das Verschwinden der Determinante aus den sechs Zeilen ($i = 1, \ldots, 6$)

$$\xi_1^{(i)2}, \ \xi_2^{(i)2}, \ \xi_3^{(i)2}, \ \xi_2^{(i)}\xi_3^{(i)}, \ \xi_3^{(i)}\xi_1^{(i)}, \ \xi_1^{(i)}\xi_2^{(i)}$$

und dies ist auch die Bedingung, unter welcher die sechs Quadrate der $\xi_1^{(i)}x_1 + \xi_2^{(i)}x_2 + \xi_3^{(i)}x_3$ durch eine lineare Relation verbunden sind.

3) Wenn nur vier Kegelschnitte $S^{(1)} = 0, \ldots S^{(4)} = 0$ gegeben sind, und $V = 0$ so bestimmt werden soll, dafs die Relation $\Theta_1 = 0$ für ihn und jeden der vier erfüllt wird, so bleibt einer der Coefficienten A_{ij} unbestimmt, aber alle andern können

durch ihn ausgedrückt werden. Also ist die Gleichung von V in Liniencoordinaten von der Form $\Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0$, d. h. der Kegelschnitt berührt vier feste Gerade. Wir zeigen später direct (§ 378), daſs die Constanten in vier Arten so bestimmt werden können, daſs $k_1 S^{(1)} + k_2 S^{(2)} + k_3 S^{(3)} + k_4 S^{(4)} = 0$ ein vollständiges Quadrat ist. Indem wir $M = 0$ als die unendlich ferne Gerade denken, erkennen wir ferner, daſs die Aufgabe eine bestimmte und eine lineare ist, für eine gegebene Gerade $M = 0$ die Constanten so zu bestimmen, daſs $k_1 S^{(1)} + \ldots$ von der Form MN ist. Nach 1) ist $N = 0$ der Ort des Pols von $M = 0$ in Bezug auf $V = 0$. (Vgl. § 317, 1.)

361. **Bedeutung der Relationen $\Theta_1 = 0$ und $\Theta_2 = 0$.** Auch im Falle der allgemeinen Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ liegt es nun nahe, das Verschwinden einer ihrer Simultaninvarianten auf binäre harmonische Relationen zurückzuführen. Den Weg dazu bietet die Betrachtung der Tangentenpaare aus einem Punkte oder der Schnittpunktpaare in einer Geraden.

Nehmen wir irgend einen Punkt A_3 von $S_2 = 0$ als $x_1 = x_2 = 0$ und seine Polare in Bezug auf $S_1 = 0$ als $x_3 = 0$, so bedingt dies $b_{33} = 0$, $a_{13} = a_{23} = 0$ und $A_{11} = a_{23} a_{33}$, $A_{22} = a_{33} a_{11}$, $A_{23} = A_{31} = 0$, $A_{12} = - a_{33} a_{12}$. Also ist dann der Wert der Invariante

$$\Theta_1 = \Sigma A_{ij} b_{ij} = a_{33} (a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - 2 a_{12} b_{12}),$$

und dieser ist Null nur, wenn die binäre Invariante $\Theta = 0$ ist (§ 340), falls nämlich der gewählte Fundamentalpunkt keiner der Schnittpunkte der Curven ist ($a_{33} \gtrless 0$). Daher besteht — und zwar offenbar auch noch für die Schnittpunkte gültig — der Satz: *Wenn $\Theta_1 = 0$ ist, so schneidet die Polare eines jeden Punktes von $S_2 = 0$ in Bezug auf $S_1 = 0$ beide Kegelschnitte harmonisch.* Bei $\Theta_2 = 0$ gilt dasselbe für die Polaren der Punkte von $S_1 = 0$ bezüglich $S_2 = 0$.

Heiſsen die Schnittpunkte der Polare von A_3 mit $S_2 = 0$ A_1 und A_2, so ist $A_1 A_2 A_3$ ein Polardreieck in Bezug auf $S_1 = 0$, falls $\Theta_1 = 0$ ist. Zu jedem Punkt von $S_2 = 0$ existirt ein solches Polardreieck, d. h. es gibt unendlich viele solche, sobald *eines* existirt. *Umgekehrt hat die Invariante Θ_1 den Wert Null, wenn ein Polardreieck von $S_1 = 0$ in $S_2 = 0$*

eingeschrieben ist. Denn die beiden Gleichungen haben dann die Formen

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0, \quad b_{23}x_2x_3 + b_{31}x_3x_1 + b_{12}x_1x_2 = 0$$

und bei $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$ verschwindet Θ_1.

Das Verschwinden der Simultaninvariante Θ_1 ist notwendig und hinreichend, damit unendlich viele Polardreiecke von $S_1 = 0$ in $S_2 = 0$ eingeschrieben werden können.

Der dualistisch entsprechende Satz lautet: *Das Verschwinden der Simultaninvariante Θ_2 ist notwendig und hinreichend, damit unendlich viele Polardreiecke von $S_1 = 0$ um $S_2 = 0$ umgeschrieben werden können.* In der Tat kann man die ganze Entwickelung dualistisch interpretiren, wenn man statt x_i, a_{ij}, b_{ij} setzt ξ_i, A_{ij}, B_{ij}. Alsdann geht aber zugleich A_{ij}, B_{ij} über in Δa_{ij}, Δb_{ij}, also $\Sigma A_{ij} b_{ij}$ in $\Delta \Sigma a_{ij} B_{ij}$, d. h. Θ_1 in $\Delta \cdot \Theta_2$ und ebenso Θ_2 in $\Delta \cdot \Theta_1$, ein wohl zu beachtender Wechsel. In der Tat verificirt man sofort, dafs $\Theta_1 = 0$ ist, wenn $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$ und $b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0$ oder $B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0$ ist.

Somit kann die Bedingung $\Theta_1 = 0$, ebenso natürlich $\Theta_2 = 0$, in doppelter Weise ausgesprochen werden, wie in dem Satze liegt: *Wenn ein erster Kegelschnitt einem Polardreieck eines zweiten eingeschrieben werden kann, so kann auch der zweite einem Polardreieck des ersten umgeschrieben werden.* Man pflegt Kegelschnitte von dieser Eigenschaft *harmonische Kegelschnitte*[129]) zu nennen und unterscheidet Kegelschnitte, welche einem andern, d. h. eigentlich unendlich vielen Polardreiecken desselben, *harmonisch um- oder eingeschrieben* sind. Diejenige Simultaninvariante, welche für harmonische Kegelschnitte verschwindet, enthält die Coefficienten der Punktcoordinatengleichung des umgeschriebenen und die Coefficienten der Liniencoordinatengleichung des eingeschriebenen Kegelschnittes.

B. 1) Nennen wir das Perspectivcentrum zweier polarconjugirten Dreiecke das polare Centrum eines jeden der Dreiecke in Bezug auf den Kegelschnitt (§§ 118; 312, 3) und die Perspectivaxe die polare Axe, so bedingt die Relation $\Theta_1 = 0$, *dafs das*

in Bezug auf $S_1 = 0$ genommene polare Centrum eines dem Kegelschnitt $S_2 = 0$ eingeschriebenen Dreiecks auf $S_2 = 0$ liegt, und dafs die in Bezug auf $S_2 = 0$ genommene polare Axe eines dem Kegelschnitt $S_1 = 0$ umgeschriebenen Dreiecks $S_1 = 0$ berührt.

Denn $x_1 x_2 x_3 = 0$ und das polare Dreieck

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

haben ein Perspectivcentrum, dessen Coordinaten die reciproken Werte von A_{23}, A_{31}, A_{12} sind. Substituirt man sie in die Gleichung von $S_2 = 0$ $(b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0)$, so erhält man

$$2A_{23}b_{23} + 2A_{31}b_{31} + 2A_{12}b_{12} = 0 \quad \text{oder} \quad \Theta_1 = 0.$$

Den zweiten Teil des Satzes beweist man in analoger Weise.

2) Wenn gleichzeitig $\Theta_1 = 0$ und $\Theta_2 = 0$ ist, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte der Kegelschnitte auf beiden äquianharmonisch (§ 320).

3) Zwei Tripel harmonischer Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt $S_2 = 0$ liegen auf einem zu ihm harmonischen Kegelschnitt. (§ 312, 2.) Die Polaren berühren einen andern.

Denken wir einen Kegelschnitt durch die Ecken des einen Dreiecks und durch zwei des andern gelegt, welches als Fundamentaldreieck gewählt werde, so folgt

$$\Theta_2 = 0 \quad \text{oder} \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

aus der Voraussetzung, dafs er dem ersten Dreieck umgeschrieben sei (§ 357, 1). Da zwei Ecken des Fundamentaldreiecks dem Kegelschnitt angehören, so ist $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, und man erkennt somit, dafs auch $a_{33} = 0$ ist. Ebenso beweist man den zweiten Teil des Satzes.

362. **Harmonische Kegelschnitte.** Die Simultaninvarianten sind nach ihrer allgemeinen Form symmetrische Summen der Producte der Coefficienten der Gleichung des einen Kegelschnittes in Punktcoordinaten in die gleichnamigen Coefficienten der Gleichung des andern Kegelschnittes in Liniencoordinaten, nämlich $\Theta_1 = \Sigma A_{ij} b_{ij} = A_{11} b_{11} + 2A_{23}b_{23} + \cdots$. Das Verschwinden einer solchen Invariante ist also entweder eine lineare Bedingung für den einen Kegelschnitt als Ort oder für den andern als Enveloppe, je nach der Reihe von Coefficienten, welche man als gegeben ansieht. Offenbar kann man so jede lineare Relation zwischen den Coefficienten einer Orts-

oder Enveloppengleichung sowohl mit Θ_1 als Θ_2 identificiren, indem man die sechs *gegebenen* Coefficienten als diejenigen einer gegebenen Enveloppen- oder Ortsgleichung auffafst.

Die allgemeine lineare Bedingung für einen Kegelschnitt bedeutet geometrisch, dafs er zu einem gegebenen Kegelschnitt harmonisch ist. Dieser durch die numerischen Coefficienten der Bedingung gegebene Kegelschnitt kann natürlich von ganz specieller Art sein, also z. B. ein Punktepaar (auch Doppelpunkt) oder ein Linienpaar (auch Doppellinie). In diesen Besonderheiten sind die in § 336 interpretirten linearen Bestimmungen enthalten. Bilden wir nämlich die Bedingung, dafs zwei gegebene Punkte y_i, z_i in Bezug auf $S_2 = 0$ conjugirte Pole seien, so besteht für die k_{ij} die Gleichung des § 320; also folgt die nach $\Theta_1 = 0$ harmonische Enveloppe $\Sigma_1 = 0$ aus

$$\frac{A_{11}}{y_1 z_1} = \frac{A_{22}}{y_2 z_2} = \frac{A_{33}}{y_3 z_3} = \frac{A_{23}}{y_2 z_3 + y_3 z_2} = \frac{A_{31}}{y_3 z_1 + y_1 z_3} = \frac{A_{12}}{y_1 z_2 + y_2 z_1}$$

und dies sind dieselben Bedingungen, welche ausdrücken, dafs $\Sigma_1 = 0$ mit $\xi_y \cdot \xi_z = 0$ identisch ist. Also ist dann $S_2 = 0$ dem aus den beiden Polen gebildeten Kegelschnitt $\Sigma_1 = 0$ harmonisch umgeschrieben, wie auch geometrisch evident ist. Das Punktepaar y_i, z_i kann sich auf einen doppelt zählenden Punkt reduciren, durch welchen der Kegelschnitt einfach hindurchgeht.

Sind für eine Enveloppe Σ zweiten Grades $r + 1$ lineare Bedingungen gegeben $(r + 1 < 5)$, so sind alle ihnen genügenden Kegelschnitte $r + 1$ gegebenen Kegelschnitten $S_1, \ldots S_{r+1}$ harmonisch eingeschrieben. Dieselbe Eigenschaft hat Σ dann in Bezug auf alle Curven des punctuell-linearen Gebildes r^{ter} Stufe

$$\lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_{r+1} S_{r+1} = 0 \qquad (\S\ 283).$$

Umgekehrt bilden alle jene Enveloppen ein tangentiallineares Gebilde $(4 - r)^{\text{ter}}$ Stufe, dessen Gleichung, wenn $\Sigma_1^{(1)}, \ldots \Sigma^{(5-r)}$ die Polynome der Gleichungen linear unabhängiger Enveloppen desselben sind, lautet

$$\mu_1 \Sigma^{(1)} + \cdots + \mu_{5-r} \Sigma^{(5-r)} = 0.$$

Alsdann sind die Örter $S_1, \ldots S_{r+1}$ den Enveloppen $\Sigma^{(1)}, \ldots \Sigma^{(5-r)}$, also allen Enveloppen ihres Gebildes harmonisch umgeschrieben. *Somit sind alle Kegelschnitte des Ortsgebildes r^{ter} Stufe harmonisch zu allen Kegelschnitten des Enveloppengebildes s^{ter} Stufe, wo $r+s=4$ ist.* Die ersteren sind den letzteren harmonisch umgeschrieben, die letzteren den ersteren harmonisch eingeschrieben, wenn dies für jeden von $r+1$ ersten und $s+1$ zweiten, linear unabhängigen Kegelschnitten der Fall ist. Solche harmonische Systeme werden wir später *contravariante lineare Gebilde* nennen (§ 366).

So bilden also alle Kegelschnitte, welche Polardreiecken eines gegebenen ein- bez. umgeschrieben werden können, ein Enveloppen- bez. Ortsgebilde vierter Stufe. Die conjugirten Pole bez. Polaren der gegebenen Curve bilden die degenerirten harmonischen Curven. Die harmonischen Enveloppen zu einem Büschel bilden ein Gewebe, die harmonischen Örter zu einer Schaar ein Netz, und umgekehrt.

B. 1) In einem Büschel $S' + kS'' = 0$ gibt es immer einen und nur einen Kegelschnitt, der ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt $S = 0$ enthält.

Für Θ_1', Θ_1'' als die Werte der Invariante Θ_1 von S' und S, bez. S'' und S ist die Gleichung desselben

$$\Theta_1' S'' + \Theta_1'' S' = 0.$$

Denn es ist für den Kegelschnitt k die Invariante Θ_1 mit S

$$= (a_{11}' + k a_{11}'') A_{11} + \cdots = \Theta_1' + k\Theta_1''.$$

2) Wenn zwei Kegelschnitte $S' = 0$, $S'' = 0$ je ein Tripel harmonischer Pole von $S = 0$ enthalten, so liegen auf jedem Kegelschnitt des durch sie bestimmten Büschels solche Tripel. Denn aus $\Theta_1' = 0$, $\Theta_1'' = 0$ folgt das Verschwinden der Invariante Θ_1 für die Kegelschnitte $S = 0$ und $S' + kS'' = 0$, weil diese sich aus jenen linear zusammensetzt

$$\Theta_1 \equiv A_{11}(a_{11}' + k a_{11}'') + \cdots + 2A_{12}(a_{12}' + k a_{12}'') \equiv \Theta_1' + k\Theta_1''.$$

(Vgl. § 361, 1. 3.) Reciprok: Wenn zwei Kegelschnitte von Tripeln harmonischer Polaren eines festen Kegelschnittes berührt werden, so gilt dies für alle Kegelschnitte ihrer Schaar; etc.

3) Man soll einen Kegelschnitt bestimmen, welcher drei gegebene Punkte A, B, C und je ein Tripel harmonischer Pole des Kegelschnittes K_1 und des Kegelschnittes K_2 enthält.

Sind $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ die polaren Dreiecke zu ABC in Bezug auf diese Kegelschnitte, so sind die polaren Centra AA_1, BB_1, CC_1 und AA_2, BB_2, CC_2 (§ 361, 1) des Dreiecks ABC in ihnen zwei Punkte des gesuchten Kegelschnittes, der somit durch fünf Punkte bestimmt ist.

In Folge dessen bilden die Kegelschnitte, welche der Bedingung genügen, je ein Tripel harmonischer Pole für zwei gegebene Kegelschnitte zu enthalten, ein Gebilde dritter Stufe von Kegelschnitten.

4) Man construire den Kegelschnitt, welcher zwei gegebene Punkte A, B und je ein Tripel harmonischer Pole für drei feste Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 enthält.

Wenn C_1, C_2, C_3 die Pole von AB in Bezug auf K_1, K_2, K_3 sind und eine Gerade aus A von den Polen P_1, P_2, P_3 in P den gesuchten Kegelschnitt trifft, so liegen nach § 361, 1) die drei Punkte PC_1, BP_1; PC_2, BP_2; PC_3, BP_3 mit A, B und P auf dem gesuchten Kegelschnitt, so dafs die Büschel $(P\,.\,AC_1C_2C_3)$ und $(B\,.\,AP_1P_2P_3)$ projectivisch sind. Da hiernach P auf dem durch A, C_1, C_2, C_3 gehenden Kegelschnitt liegt, für den das Doppelverhältnis dieser vier Punkte gleich dem von $(B\,.\,AP_1P_2P_3)$ ist, so ist P linear bestimmt und man hat sechs Punkte des gesuchten Kegelschnittes.

5) Man bestimme den Kegelschnitt durch einen Punkt A und je ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf vier gegebene Kegelschnitte, und den Kegelschnitt, welcher in Bezug auf fünf gegebene Kegelschnitte je ein Tripel harmonischer Pole enthält.

Das letzte Problem umfafst die ersteren.

6) Man bestimme einen Kegelschnitt, welcher fünf gegebene Strecken harmonisch teilt, indem man die Paare ihrer Endpunkte als degenerirte Kegelschnitte betrachtet, von denen Tripel harmonischer Pole in dem gesuchten enthalten sind.

363. **Harmonische Kreise zu einem Kegelschnitt** sind von besonderem Interesse. Setzen wir rechtwinklige Coordinaten $x\,|\,y$ und $S = 0$ als die gegebene Curve voraus, so ist die Tangentialgleichung des Kreises vom Centrum $\alpha\,|\,\beta$ und und vom Radius ϱ (§ 110)

$$(\alpha\xi + \beta\eta + 1)^2 - \varrho^2(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Also ist für $S = 0$ und den Kreis die Invariante $\Theta_1 =$

$$a_{11}(\alpha^2 - \varrho^2) + a_{22}(\beta^2 - \varrho^2) + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33}.$$

Bezeichnet man das Substitutionsresultat von $\alpha\,|\,\beta$ in S mit S_0,

so ist *die Bedingung für die dem Kegelschnitt harmonisch eingeschriebenen Kreise*

$$S_0 - (a_{11} + a_{22})\varrho^2 = 0.$$

Somit gibt es zu jedem Punkt als Centrum einen einzigen der Curve harmonisch eingeschriebenen Kreis. Die sämmtlichen Kreise bilden also ein Netz (§ 128). So ergibt sich *das Substitutionsresultat eines Coordinatenpaares $x \mid y$ in ein Polynom zweiten Grades als proportional zum Radiusquadrat des zum Centrum $x \mid y$ gehörigen, $S = 0$ harmonisch eingeschriebenen Kreises.*

Bilden wir ebenso die zweite Invariante für $\Sigma = 0$ und die Normalform der Kreisgleichung, so liefert sie *die Bedingung für die dem Kegelschnitt harmonisch umgeschriebenen Kreise*

$$A_{11} + A_{22} + A_{33}\pi - 2A_{13}\alpha - 2A_{23}\beta = 0.$$

Diese Bedingung zeigt (§ 122), dafs diese Kreise ebenfalls ein Netz bilden und zwar mit dem Orthogonalkreise

$$A_{33}(x^2 + y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} = 0.$$

Dies werden wir aber im folgenden Kapitel als die Gleichung des Hauptkreises (§ 181, 5) des Kegelschnittes $\Sigma = 0$ erkennen. *Also sind alle Kreise, welche Polardreiecken eines Kegelschnittes umgeschrieben sind, orthogonal zum Hauptkreise desselben.*

Diesen Sätzen gibt man einen scheinbar verschiedenen Ausdruck, indem man bedenkt, dafs nun (§ 118) die Kreise des ersten bez. zweiten Netzes auch Polardreiecke besitzen, welchen der gegebene Kegelschnitt um- bez. eingeschrieben ist. Der Kreismittelpunkt ist aber stets Höhenschnittpunkt in diesen Dreiecken. Daher sind die harmonisch eingeschriebenen Kreise der gleichseitigen Hyperbel ($a_{11} + a_{22} = 0$) für Curvenpunkte, und die harmonisch umgeschriebenen Kreise der Parabel ($A_{33} = 0$) für Punkte ihrer Directrix unbestimmt, für alle andern Punkte aber unendlich grofs (§§ 179, 3; 229, 1).

B. 1) Das Quadrat der Länge der Tangenten, welche vom Centrum eines Kegelschnittes an den einem seiner Polardreiecke umgeschriebenen Kreis gehen, ist constant und gleich der Summe der Quadrate der Halbaxen.[130])

Dies ist die geometrische Interpretation der speciellen Form

der Relation $\Theta_1 = 0$, wie sie in § 357, 4) gefunden ward, nämlich $\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = a^2 + b^2$.

2) Das Centrum des Kreises, welcher die Seiten eines Polardreiecks einer gleichseitigen Hyperbel berührt, liegt in der Curve. Die Relation $\Theta_2 = 0$ in § 357, 3) beweist dies für $b^2 = - a^2$.

3) Wenn das Rechteck unter den Segmenten der Höhen des einem Kegelschnitte umgeschriebenen Dreiecks constant und gleich ϱ^2 ist, so ist der Ort des Höhenschnittpunktes der Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + \varrho^2$.

Denn $\Theta_1 = 0$ (§ 357, 3) ist die Bedingung, unter welcher ein System harmonischer Polaren in Bezug auf den Kreis den Kegelschnitt $S_1 = 0$ berührt. Wenn man in diesem Beispiel $\varrho^2 = 0$ voraussetzt, so erhält man den Hauptkreis.

4) Wenn das Rechteck unter den Segmenten der Höhen für ein in den Kegelschnitt $S_1 = 0$ eingeschriebenes Dreieck constant und gleich ϱ^2 ist, so ist der Ort des Höhenschnittpunktes der mit $S_1 = 0$ coaxiale und ähnliche Kegelschnitt[131]) $S_1 = \varrho^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$.

5) Man soll den Ort des Höhenschnittpunktes für ein Dreieck finden, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben und zugleich einem andern Kegelschnitt umgeschrieben ist.[132])

Wenn man das Centrum des letzteren Kegelschnittes zum Coordinatenanfangspunkt wählt und die Werte von ϱ^2 einander gleich setzt, die sich aus 3) und 4) ergeben, so ist für a', b' als die Axen des Kegelschnittes $S = 0$, in welchen das Dreieck eingeschrieben ist, die Gleichung des Ortes

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)(a'^2 + b'^2) = a'^2 b'^2 S.$$

Der Ort ist daher ein Kegelschnitt, dessen Axen denen von $S = 0$ parallel sind, und der mit $S = 0$ zugleich ein Kreis wird.

6) Das Centrum eines Kreises, der ein Polardreieck einer Parabel enthält, liegt in der Directrix.

Der Höhenschnitt eines Dreiecks, welches einer Parabel umgeschrieben ist, liegt in der Directrix.

Der Beweis für beide Sätze liegt in der Relation $\Theta_1 = 0$ in § 357, 4).

7) Für den eingeschriebenen Kreis eines Polardreiecks der Parabel ist die vom Fuſspunkt seiner Mittelpunktsordinate in der Axe an ihn zu legende Tangente der bezüglichen Parabelordinate gleich.

Der Beweis liegt in der Relation $\Theta_2 = 0$ in § 357, 4).

8) Wenn der Radius des einem Polardreieck einer Parabel eingeschriebenen Kreises gegeben ist, so ist der Ort seines Centrums eine Parabel von gleichem Parameter mit der gegebenen.

9) Der Ort der Mittelpunkte der den Kegelschnitten eines Büschels harmonisch eingeschriebenen Kreise ist die gleichseitige Hyperbel des Büschels (§ 272).

Denn sind $S' = 0$, $S'' = 0$ zwei Kegelschnitte, so ist $x \mid y$ das Centrum eines Kreises vom Radiusquadrat

$$\frac{S'}{a_{11}' + a_{22}'} = \frac{S''}{a_{11}'' + a_{22}''}.$$

10) Die den Kegelschnitten einer Schaar harmonisch umgeschriebenen Kreise bilden ein Büschel, dessen Radicalaxe die Directrix der Parabel der Schaar ist (§ 262).

Die Hauptkreise der Kegelschnitte bilden daher das conjugirte Büschel (§ 127).

364. *Es ist im allgemeinen nicht möglich, dem einen von zwei beliebigen Kegelschnitten ein Dreieck einzuschreiben, welches zugleich dem andern umgeschrieben ist.* Wenn aber zwischen beiden Kegelschnitten eine gewisse Relation stattfindet, so können unendlich viele solche Dreiecke gefunden werden.

Denn ist ein solches Dreieck möglich, und ist es zum Fundamentaldreieck gewählt, so sind die Gleichungen beider Kegelschnitte auf die einfachen Formen

$$S_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0,$$
$$S_2 \equiv 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

reducirbar (vgl. § 357, 5) und wir erhalten für ihre Invarianten die Werte

$$\Delta_1 = -4, \quad \Delta_2 = 2a_{23}a_{31}a_{12}, \quad \Theta_1 = 4(a_{23} + a_{31} + a_{12}),$$
$$\Theta_2 = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2.$$

Zwischen diesen besteht aber die Relation[133])

$$\Theta_1^2 = 4\Delta_1\Theta_2,$$

eine Gleichung von der Art, von welcher im § 357 erörtert wurde, daſs sie durch eine Veränderung der Coordinatenbeziehung ungestört bleibt. Also muſs dieselbe Relation unter den Coefficienten der Gleichungen beider Kegelschnitte immer stattfinden, wenn es überhaupt möglich sein soll, sie in die vorher angenommenen einfachen Formen zu transformiren. Sie ist so die analytische Bedingung der geforderten geometrischen Beziehung.

In der Tat gehört umgekehrt, unter Voraussetzung dieser

Relation auch die dritte Ecke eines dem Kegelschnitt $S_1 = 0$ umgeschriebenen Dreiecks dem Kegelschnitt $S_2 = 0$ an, wenn seine zwei ersten Ecken auf ihm liegen. Denn ergänzen wir obiges Polynom S_2 zu $S_2 + a_{33}x_3^2$, so geht Θ_2 über in $\Theta_2 - a_{12}a_{33}$; aber die frühere Relation ist mit der jetzt erforderlichen $\Theta_1^2 = 4\Delta_1(\Theta_2 - a_{12}a_{33})$ nur verträglich, wenn $a_{33} = 0$ ist.

Man kann auch Invariantenrelationen benutzen, um die Kegelschnitte auf einfachere Gleichungsformen zu bringen. So folgt z. B., dafs Kegelschnitte von der durch $\Theta_1\Theta_2 = \Delta_1\Delta_2$ ausgedrückten Beziehung allgemein auf

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_1^2 - x_2^2 + cx_3^2 = 0$$

reducirt werden können.

Damit überhaupt ein Curvenpaar $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in ein anderes $S_1' = 0$, $S_2' = 0$ transformirt werden könne, müssen nach unserer Abzählung *zwei absolute Invarianten bez. gleich* sein. Die einfachsten sind die Quotienten

$$\Theta_1^2 : \Delta_1\Theta_2 = \Theta_1'^2 : \Delta_1'\Theta_2', \quad \Theta_2^2 : \Delta_2\Theta_1 = \Theta_2'^2 : \Delta_2'\Theta_1'.$$

Nur von den Werten derselben müssen also Doppelverhältniswerte abhängen, wie z. B. die der Schnittpunktpaare in den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks, von denen wirklich nur zwei unabhängig sind.

B. 1) Man bestimme die Bedingung für diejenige Lage von zwei Kreisen, bei welcher dem einen ein Dreieck eingeschrieben werden kann, das zugleich dem andern umgeschrieben ist. Für $d^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2 = e^2$ ist nach § 357, 2) die fragliche Bedingung

$$(e^2 - \varrho_1^2)^2 + 4\varrho_1^2(e^2 - \varrho_2^2) = 0 \quad \text{oder} \quad (e^2 + \varrho_1^2)^2 = 4\varrho_1^2\varrho_2^2,$$

also

$$d^2 = \varrho_2^2 \pm 2\varrho_1\varrho_2,$$

der wohlbekannte Ausdruck, welchen bereits *Euler* für die Entfernung zwischen dem Centrum des einem Dreieck umgeschriebenen und dem eines ihm eingeschriebenen Kreises gegeben hat.

Der Ort der Höhenschnittpunkte aller solcher Dreiecke ist ein Kreis, der den Überschufs des Radius vom umgeschriebenen Kreis über den Durchmesser des eingeschriebenen zum Radius hat.

2) Man soll den Ort des Centrums für einen Kreis von gegebenem Halbmesser finden, welcher einem dem Kegelschnitt $S = 0$ umgeschriebenen Dreieck umgeschrieben oder einem ihm eingeschriebenen Dreieck eingeschrieben ist.

Die fraglichen Örter sind Curven vierter Ordnung, ausgenommen den Fall vom Centrum des umgeschriebenen Kreises für das Dreieck der Parabeltangenten; dieser ist ein Kreis, der den Brennpunkt zum Mittelpunkt hat, wie auch sonst geschlossen werden kann.

3) Unter welcher Bedingung kann in den Kegelschnitt $S_2 = 0$ ein Dreieck eingeschrieben werden, dessen Seiten die Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 eines Büschels $S_1 + kS_2 = 0$ der Reihe nach berühren?

Setzen wir $S_2 \equiv 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$, $S_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(1+k_1a_{23})x_2x_3 - 2(1+k_2a_{31})x_3x_1 - 2(1+k_3a_{12})x_1x_2 = 0$, so wird $S_1 + k_iS_2 = 0$ durch $x_i = 0$ berührt und die Invarianten sind

$$\Delta_1 = -(2 + k_1a_{23} + k_2a_{31} + k_3a_{12})^2 - 2k_1k_2k_3a_{23}a_{31}a_{12},$$
$$\Theta_1 = 2(a_{23} + a_{31} + a_{12})(2 + k_1a_{23} + k_2a_{31} + k_3a_{12}) + 2a_{23}a_{31}a_{12}(k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2),$$
$$\Theta_2 = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2 - 2(k_1 + k_2 + k_3)a_{23}a_{31}a_{12},$$
$$\Delta_2 = 2a_{23}a_{31}a_{12}$$

und erfüllen die verlangte Relation

$$\{\Theta_1 - \Delta_2(k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2)\}^2 = 4(\Delta_1 + k_1k_2k_3\Delta_2)\{\Theta_2 + \Delta_2(k_1 + k_2 + k_3)\}.$$

365. **Covarianten, Contravarianten, Zwischenformen.** Die Definition der Covarianten in § 342 ist auch auf ternäre Formen anwendbar. Bildet man aus der allgemeinen Gleichung einer Curve oder den Gleichungen der Curven eines Systems *die Gleichung* $\mathbf{C} = 0$ *eines Ortes, der zur Curve oder zu dem System eine durch lineare Transformation (Verwandtschaft) unzerstörbare gesetzmäſsige Beziehung hat, so ist* $\mathbf{C} = 0$ *eine covariante Curve zu der oder den gegebenen.* Die Gleichung der in einer gegebenen Collineation $\mathbf{C} = 0$ entsprechenden Curve $\mathbf{C}' = 0$ wird sowol erhalten, indem wir die Gleichung $\mathbf{C} = 0$ selbst transformiren, als auch, indem wir die gegebene Gleichung oder das gegebene Gleichungssystem transformiren und nun dieselbe Function $\mathbf{C}$ mit den transformirten Coefficienten bilden. Die beiden so entstehenden Polynome sind alsdann nur um eine Potenz des Transformationsmoduls als Factor verschieden, denn es ist

$$\mathbf{C}(a', x') = \Delta^r \cdot \mathbf{C}(a, x).$$

Eine quadratische Form S besitzt *keine* von $c \cdot S$ ver-

schiedene Covariante, dagegen besitzen zwei oder drei quadratische Formen simultane Covarianten.

Im ternären Gebiet gehören zu den drei Variabeln x_i drei contragrediente Variabele ξ_i. Wenn eine gegebene collineare Punktverwandtschaft durch die Substitution $x_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k'$ definirt ist, so wird die Strahlenverwandtschaft gleichzeitig durch $\Delta \xi_i = \Sigma \mathbf{A}_{ik} \xi_k'$ ausgedrückt. Bei gleichzeitiger Anwendung beider Substitutionen besteht dann die Identität

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \equiv \xi_1' x_1' + \xi_2' x_2' + \xi_3' x_3'.$$

Demnach kann man Invarianten eines aus Curven und Geraden $\xi_i, \eta_i, \ldots$ bestehenden Systems als homogene Functionen der contragredienten Variabeln auffassen. Wenn wir eine solche Invariante $\mathbf{K}(a, b, \xi)$ aus den Coefficienten des transformirten Formensystems bilden $\mathbf{K}(a', b', \xi')$, so ist auch

$$\mathbf{K}(a, b, \xi') \equiv \Delta^r \cdot \mathbf{K}(a', b', \xi).$$

Man nennt solche Formen contragredienter Variabeln, welche die Invarianteneigenschaft haben, *zugehörige Formen oder Contravarianten*[134]) der gegebenen Formen oder des gegebenen Systems. *Eine zu Ortscurven contravariante Curve ist eine Enveloppe, deren Gleichung eine projectivische Relation einer beweglichen Geraden zu dem System ausdrückt.* Denn dieselbe Function der transformirten Coefficienten des Systems wird bis auf einen constanten Factor auch erhalten, wenn man in der ursprünglichen Contravariante die Variabeln selbst invers transformirt. Sie gleicht darin einer Covariante, nur dafs nicht die ursprünglichen, sondern die transformirten Substitutionen auf ihre Variabeln anzuwenden sind*).

Ihrer geometrischen Bedeutung nach sind die *Reciprocalformen Contravarianten der ursprünglichen Formen,* also Ortsgleichung und Tangentialgleichung sind contravariant. Die übrigen Contravarianten stehen zur Tangentialgleichung in demselben Verhältnis, wie die Covarianten zur Ortsgleichung. Eine einzelne quadratische Gleichung $S = 0$ hat *keine* andere

*) Man kann daher die Variabeln ξ_i auch durch die Ableitungen nach den gleich benannten x_i ersetzen, um aus der Contravariante eine neue Covariante entstehen zu lassen (§ 355).

Contravariante als die Tangentialgleichung $\Sigma \equiv \Sigma A_{ik} \xi_i \xi_k = 0$, wobei die Identität besteht $\Sigma' \equiv \Delta^2 \cdot \Sigma$.

Endlich können für das aus Curven und Geraden gebildete System wiederum Covarianten gebildet werden, welche somit nicht nur die Coefficienten der Gleichungen jener, sondern auch die Coordinaten ξ_i dieser aufser den laufenden Coordinaten x_i enthalten. *Solche Functionen von beiderlei Variabeln nennt man Zwischenformen, wenn sie Invarianteneigenschaft besitzen*, d. h. ihren Wert nicht oder nur durch Hinzutritt eines constanten Factors ändern, wenn man die eine Reihe der Variabeln durch die ursprüngliche, die andere Reihe aber durch die transponirte Substitution transformirt. Also sind z. B. alle Producte von Covarianten und Contravarianten Zwischenformen.

Die Form ξ_x oder x_ξ, welche dieser Definition entspricht, heifst *die identische Zwischenform. Eine quadratische Form besitzt nur solche Zwischenformen, welche sich als ganze Functionen von S, Σ, Δ und ξ_x darstellen lassen.* Diese vier invarianten Formen bilden also das vollständige System der quadratischen Form im früheren Sinne.

366. **Contravarianter Kegelschnitt Φ zu zwei gegebenen.** Nach dem vorstehenden knüpft die Bildung der simultaninvarianten Formen zu zwei gegebenen an die Tangentialform an. Diese wird von irgend einem Kegelschnitt des Büschels $S_1 + kS_2 = 0$ gebildet, indem man in

$$-\Sigma_1 \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\S\ 324)$$

für die Coefficienten a_{ij} die Summen $a_{ij} + kb_{ij}$ substituirt. Die Determinante läfst sich nach der binomischen Zusammensetzung von drei Reihen ihrer Elemente in sieben andere Determinanten als Summanden zerlegen, von denen die erste keine der Verticalreihen b enthält und so mit $-\Sigma_1$ identisch ist, drei weitere je eine Verticalreihe der b und damit den Factor k enthalten, die drei letzten je zwei Verticalreihen

der b und damit den Factor k^2. Die Summe dieser letzteren erweist sich als die mit $-\Sigma_1$ ganz gleich gebildete Determinante der b und ist also durch $-\Sigma_2$ zu bezeichnen. Daher ist das Substitutionsresultat, d. h. die Tangentialgleichung des Kegelschnittes k durch

$$\Sigma_1 + k\Phi + k^2\Sigma_2 = 0$$

dargestellt, wenn wir durch Φ die negative Summe der drei Partialdeterminanten mit dem Factor k bezeichnen. So ist

$$-\Phi \equiv \begin{vmatrix} b_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ b_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ b_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ 0, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & b_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & b_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & b_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & 0, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & b_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & b_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & b_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & 0, & 0 \end{vmatrix},$$

oder

$$-\Phi \equiv \sum \frac{d\Theta_1}{d a_{ij}} \xi_i \xi_j = \sum \frac{d\Theta_2}{d b_{ij}} \xi_i \xi_j,$$

$$\begin{aligned}\Phi \equiv (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\xi_1^2 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33} - 2a_{31}b_{31})\xi_2^2 \\ + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})\xi_3^2 + 2(a_{13}b_{12} + a_{12}b_{13} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})\xi_2\xi_3 \\ + 2(a_{21}b_{23} + a_{23}b_{21} - a_{22}b_{31} - a_{31}b_{22})\xi_3\xi_1 \\ + 2(a_{32}b_{31} + a_{31}b_{32} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})\xi_1\xi_2.\end{aligned}$$

Nun besteht die Invarianteneigenschaft dieser Tangentialform für jeden beliebigen Parameter k, also besitzen die drei Coefficienten Σ_1, Φ, Σ_2 dieselbe schon. *Somit ist Φ eine simultane Contravariante des Formenpaares S_1, S_2, und $\Phi = 0$ ein contravarianter Kegelschnitt.*

367. **Covarianter Kegelschnitt F zu zwei gegebenen.** Genau dualistisch verfahrend, geht man von der Gleichung der Kegelschnitte einer Schaar $\Sigma_1 + k\Sigma_2 = 0$ zu ihrer Gleichung in Punktcoordinaten über (§ 323). Dieselbe lautet

$$\begin{vmatrix} A_{11} + kB_{11}, & A_{12} + kB_{12}, & A_{13} + kB_{13}, & x_1 \\ A_{21} + kB_{21}, & A_{22} + kB_{22}, & A_{23} + kB_{23}, & x_2 \\ A_{31} + kB_{31}, & A_{32} + kB_{32}, & A_{33} + kB_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mit ganz derselben Entwickelung wie vorhin, nur daſs statt der a_{ik}, b_{ik}, x_i die A_{ik}, B_{ik}, ξ_i stehen. Daher ist das constante Glied $\Delta_1 S_1$ statt Σ_1, der Factor von k^2 $\Delta_2 S_2$ statt Σ_2, und der Coefficient F von k

$$F \equiv (A_{22}B_{33} + A_{33}B_{22} - 2A_{23}B_{23})x_1^2$$
$$+(A_{33}B_{11}+A_{11}B_{33}-2A_{31}B_{31})x_2^2+(A_{11}B_{22}+A_{22}B_{11}-2A_{12}B_{12})x_3^2$$
$$+ 2(A_{13}B_{12} + A_{12}B_{13} - A_{11}B_{23} - A_{23}B_{11})x_2x_3$$
$$+ 2(A_{21}B_{23} + A_{23}B_{21} - A_{22}B_{31} - A_{31}B_{22})x_3x_1$$
$$+ 2(A_{32}B_{31} + A_{31}B_{32} - A_{33}B_{12} - A_{12}B_{33})x_1x_2.$$

Weil nun die linke Seite der Gleichung

$$\Delta_1 S_1 + kF + k^2\Delta_2 S_2 = 0$$

die Invarianteneigenschaft unabhängig von k besitzt, so ist F *eine simultane Covariante des Formenpaares* S_1, S_2 und $F = 0$ ein covarianter Kegelschnitt. Die projectivischen Beziehungen der beiden Kegelschnitte $\Phi = 0$ und $F = 0$ werden völlig dualistisch sein.

Ist das Kegelschnittpaar auf das gemeinsame Polardreieck bezogen

$$S_1 \equiv a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0, \quad S_2 \equiv b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2=0,$$

so ist, wegen $A_{ii} = a_{11}a_{22}a_{33} : a_{ii}$, $B_{ii} = b_{11}b_{22}b_{33} : b_{ii}$ die Gleichung des covarianten Kegelschnittes

$$F \equiv a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2$$
$$+ a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2 = 0$$

und die Gleichung des contravarianten Kegelschnittes

$$\Phi \equiv (a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22})\xi_1^2+(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33})\xi_2^2+(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11})\xi_3^2=0.$$

Diese beiden Kegelschnitte haben somit mit den gegebenen dasselbe gemeinsame Polardreieck.

368. **Gleichungen der gemeinsamen Elemente.** Die in k zum zweiten Grade ansteigende Tangentialgleichung des Büschels gestattet unmittelbar die Gleichung der Enveloppe dieser Kegelschnitte zu bilden. Fragt man, wann die beiden eine Gerade ξ_i berührenden Kegelschnitte des Büschels zusammenfallen, so wird die Bedingung durch das Verschwinden der Discriminante jener ausgedrückt als

$$\Phi^2 - 4\Sigma_1\Sigma_2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung der vier Grundpunkte des Büschels in Liniencoordinaten, da keine andere Enveloppe des Büschels existirt.

Ganz analog findet man die Enveloppe der Kegelschnitte einer Schaar aus $\Delta_1 S_1 + kF + \Delta_2 S_2 = 0$ als

$$F^2 - 4\Delta_1\Delta_2 S_1 S_2 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung der vier gemeinsamen Tangenten der Schaar. Die beiden Quadrupel von dem Kegelschnittpaar gemeinsamen Elementen sind zu Σ_1, Σ_2 oder S_1, S_2 covariant.

Hieraus ergeben sich hinreichende Bestimmungsstücke der Kegelschnitte $F = 0$ und $\Phi = 0$. Denn die Gleichung $F^2 - 4\Delta_1\Delta_2 S_1 S_2 = 0$ bezeichnet nach ihrer Form (§ 275) einen Ort, welcher die Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in den Punkten berührt, in denen $F = 0$ sie schneidet. *Daher liegen die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte mit ihren gemeinsamen Tangenten auf dem covarianten Kegelschnitt $F = 0$ des Paares* (§ 325, 3). Ganz dieselbe Überlegung bezieht sich auf die Gleichung $\Phi^2 - 4\Sigma_1\Sigma_2 = 0$. *Also berühren die acht Tangenten zweier Kegelschnitte in ihren Schnittpunkten den contravarianten Kegelschnitt $\Phi = 0$ des Paares.*[135])

Wenn sich die Kegelschnitte $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ berühren, so berührt auch $F = 0$ sie in ihrem Berührungspunkt, weil die Tangente dort ihnen gemeinsam ist. *Daher berührt die Covariante $F = 0$ zu Kegelschnitten, welche in Doppelberührungen stehen, diese in den beiden Berührungsstellen,* gehört also ihrem Büschel an. Genau dasselbe gilt auch hinsichtlich $\Phi = 0$.

Die dann zwischen S_1, S_2 und F oder Σ_1, Σ_2 und Φ bestehende Relation erhält man folgendermafsen. Für den Parameter k, für welchen $S_1 + kS_2 = 0$ die Doppelberührungssehne darstellt, mufs die Reciprocalform $\Sigma_1 + k\Phi + k^2\Sigma_2 = 0$ identisch verschwinden. Da aber jene Doppelgerade *zwei* Linienpaare im Büschel vertritt, so mufs k eine Doppelwurzel der Gleichung $\Delta_1 + k\Theta_1 + k^2\Theta_2 + k^3\Delta_2 = 0$ oder eine gemeinsame Wurzel ihrer Ableitungen

$$\Theta_1 + 2k\Theta_2 + 3k^2\Delta_2 = 0, \quad 3\Delta_1 + 2k\Theta_1 + k^2\Theta_2 = 0$$

sein. Gleichzeitig gilt dasselbe für die dualistisch entsprechenden Gleichungen. Demnach ist *die Bedingung der Doppelberührung* die durch Elimination von k aus der Tan-

gentialgleichung und den Ableitungen der Discriminante entspringende identische Relation

$$\begin{vmatrix} \Sigma_1, & \Phi, & \Sigma_2 \\ 3\Delta_1, & 2\Theta_1, & \Theta_2 \\ \Theta_1, & 2\Theta_2, & 3\Delta_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} S_1, & F, & S_2 \\ 3\Delta_1, & 2\Delta_1\Theta_2, & \Theta_1 \\ \Theta_2, & 2\Delta_2\Theta_1, & 3\Delta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

aufser der schon in § 358 gefundenen Invariantenbedingung der Berührung.

B. 1) Welches ist die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte, bezogen auf das gemeinsame Polardreieck? Mit dem F des Textes wird die fragliche Gleichung

$$\{a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22})x_1^2+a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33})x_2^2 + a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11})x_3^2\}^2$$
$$=4a_{11}a_{22}a_{33}b_{11}b_{22}b_{33}(a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2)(b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2).$$

In lineare Factoren aufgelöst, gibt sie die Gleichung der Tangenten durch alle Zeichencombinationen in

$$x_1\sqrt{a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22})} \pm x_2\sqrt{a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33})} \pm \cdot = 0.$$

2) Man bestimme die gemeinschaftlichen Tangenten von zwei Kegelschnitten, welche demselben Dreieck umgeschrieben sind.

Der Kegelschnitt $F = 0$, welcher ihre acht Berührungspunkte enthält, ist in diesem Falle ausgedrückt durch

$$(a_{12}b_{13}-a_{13}b_{12})^2x_1^2+\cdots+(a_{12}b_{23}+a_{23}b_{12})(a_{13}b_{23}+a_{23}b_{13})x_2x_3+\cdots=0.$$

3) Wenn $S_2 = 0$ ein Linienpaar repräsentirt, so ist $F = 0$ der Ausdruck des von ihrem Schnittpunkte aus an den Kegelschnitt $S_1 = 0$ gehenden Tangentenpaares.

4) *Die Bedingung der Osculation der Kegelschnitte* $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ wird durch analoge Betrachtungen darin gefunden, dafs die Coefficienten der Doppelproportion des § 358 genügen und aufserdem

$$\Theta_2\Sigma_1 - 2\Theta_1\Phi + 3\Delta_1\Sigma_2 = 0, \quad 3\Delta_2\Sigma_1 - 2\Theta_2\Phi + \Theta_1\Sigma_2 = 0$$

zu Identitäten machen.

369. **Binärer Ursprung von F und Φ.** Eine Gerade der Enveloppe $\Phi = 0$, bez. ein Punkt des Ortes $F = 0$, mufs nach der Definition zu dem Paar der Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ eine projectivische Beziehung haben. Diese kann nur in einer projectivischen Eigenschaft ihrer beiden Schnittpunktepaare mit der Geraden, bez. ihrer beiden Tangenten-

paare mit dem Punkte gesucht werden. Also müssen die ternären Formen Φ und F durch eine gewisse Übertragung aus Invarianteneigenschaften von zwei binären quadratischen Formen zu erhalten sein.

Wenn man zwischen der Gleichung der Geraden und der allgemeinen Gleichung des Kegelschnittes $S_1 = 0$ die Variable x_3 eliminirt, so erhält man für die Schnittpunkte die Gleichung

$$(a_{11}\xi_3^2 - 2a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{33}\xi_1^2)x_1^2 + 2(a_{12}\xi_3^2 - a_{23}\xi_1\xi_3 - a_{13}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_1\xi_2)x_1x_2 \\ + (a_{22}\xi_3^2 - 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_2^2)x_2^2 = 0,$$

und eine ganz gleichgebildete Gleichung mit den Coefficienten b an Stelle der a ergibt sich für die Schnittpunkte der Geraden mit dem zweiten Kegelschnitt. Sollen diese zwei Punktepaare ein harmonisches System bilden, so mufs durch die Coefficienten beider Gleichungen die harmonische Invariante (§ 335) verschwinden machen. Man hat so die Bedingung

$$(a_{11}\xi_3^2 - 2a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{33}\xi_1^2)(b_{22}\xi_3^2 - 2b_{23}\xi_2\xi_3 + b_{33}\xi_2^2) \\ + (b_{11}\xi_3^2 - 2b_{13}\xi_1\xi_3 + b_{33}\xi_1^2)(a_{22}\xi_3^2 - 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_2^2) = \\ 2(a_{12}\xi_3^2 - a_{23}\xi_1\xi_3 - a_{13}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_1\xi_2)(b_{12}\xi_3^2 - b_{23}\xi_1\xi_3 - b_{13}\xi_2\xi_3 + b_{33}\xi_1\xi_2)$$

d. h. durch Entwickelung und Reduction genau $\Phi = 0$. *Somit ist der Kegelschnitt $\Phi = 0$ die Enveloppe aller der Geraden, welche zwei gegebene Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in harmonischen Punktepaaren schneiden.*

Mit dualistischer Interpretation beweist man ebenso (vgl. § 341, 2): *Der Kegelschnitt $F = 0$ ist der Ort aller der Punkte, aus welchen an die Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ harmonische Tangentenpaare gehen.*

Alle Kegelschnitte, deren Gleichungen lineare Aggregate von S_1, S_2, F bez. von Σ_1, Σ_2, Φ sind, sind covariant bez. contravariant zu den gegebenen. Aber auch die Umkehrung gilt: *Die Ortsgleichung jedes mit $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ covarianten Kegelschnittes ist eine lineare Function von S_1, S_2 und F. Die Enveloppengleichung jedes contravarianten Kegelschnittes ist eine lineare Function von Σ_1, Σ_2 und Φ.*

Dabei bilden covariante und contravariante Kegelschnitte nicht verschiedene Systeme, sondern *jeder nicht-zerfallende in-*

variante Kegelschnitt ist als Tangentengebilde contravariant, d. h. die Tangentialform jedes in S_1, S_2, F linearen Aggregates ist in Σ_1, Σ_2, Φ linear, und umgekehrt. So ist z. B. $\Phi = 0$, als Ort betrachtet, ein zu $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ covarianter Kegelschnitt. Nun entspringt aus der entwickelten Form Φ (§ 367) unter Bezug auf das gemeinsame Polardreieck die Gleichung in Punktcoordinaten:

$$(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_1^2 + \cdots = 0.$$

Diese kann man in der Tat ändern in

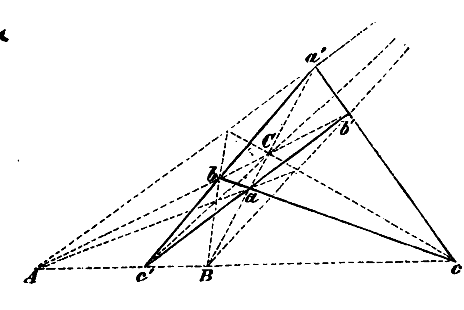
$$(b_{11}a_{22}a_{33} + \cdots)(a_{11}x_1^2 + \cdots) + (a_{11}b_{22}b_{33} + \cdots)(a_{11}x_1^2 + \cdots)$$
$$- \{a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + \cdots\} = 0,$$

so dafs die Reciprocalform von $\Phi = 0$ lautet

$$\Theta_1 S_2 + \Theta_2 S_1 - F = 0.$$

Die Beispiele zeigen zahlreiche Anwendungen desselben Princips, weitere folgen im XXI. Kapitel.

B. 1) *Vierzehnpunkte-Kegelschnitt des Vierecks.* Die Doppelpunkte der drei Involutionen aa', BC; bb', CA; cc', AB in den Diagonalen eines Vierecks $aba'b'$ und die vier Paare von Punkten, welche in den Seiten mit den ihnen angehörigen Gruppen abc, $a'bc'$, $a'b'c$, $ab'c'$ Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bilden (§ 345, 1), liegen auf demselben Kegelschnitt.



Werden drei Seiten des Vierecks als Fundamentallinien genommen, und hat die vierte die Gleichung $a_x = 0$, so dafs

$$y_1 \equiv a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$y_2 \equiv a_3 x_3 + a_1 x_1 = 0,$$
$$y_3 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

die Diagonalen sind, so sind durch $x_2 x_3 (a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0$ die drei Punkte einer Viereckseite und durch deren Hesse'sche Determinante (§ 348)

$$a_2^2 x_2^2 + a_2 a_3 x_2 x_3 + a_3^2 x_3^2 = 0$$

die beiden Punkte bestimmt, die mit ihnen gleiche fundamentale Doppelverhältnisse bestimmen. Diese und die beiden analogen Paare

$$a_3^2 x_3^2 + a_3 a_1 x_3 x_1 + a_1^2 x_1^2 = 0, \quad a_1^2 x_1^2 + a_1 a_2 x_1 x_2 + a_2^2 x_2^2 = 0$$

liegen auf dem Kegelschnitt

$$a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 + a_2a_3x_2x_3 + a_3a_1x_3x_1 + a_1a_2x_1x_2 = 0$$

oder
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,$$

für die drei Diagonalen als Fundamentallinien. Auch die vierte Seite schneidet ihn in zwei Punkten der bezeichneten Art. Die Diagonale $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ gibt als Gleichung ihrer Schnittpunkte mit ihm $a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 = 0$, d. h. die Doppelpunkte der auf ihr bestimmten Involution. (Vgl. § 343.) Für ein reelles Viereck ist unser Kegelschnitt imaginär; er ist übrigens derselbe, der in § 317, 10 betrachtet wurde.

2) Man drücke die Gleichung des vorigen Kegelschnittes als Covariante des Systems von zwei Kegelschnitten aus. Wenn die beiden Kegelschnitte auf das gemeinsame System harmonischer Pole bezogen sind und $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$ eine ihrer gemeinsamen Tangenten ist, so sind $c_1x_1 \pm c_2x_2 \pm c_3x_3 = 0$ die vier Tangenten, und der fragliche Kegelschnitt hat die Gleichung

$$c_1^2x_1^2 + c_2^2x_2^2 + c_3^2x_3^2 = 0.$$

Für die c_i aber gelten die Bedingungen

$$a_{22}a_{33}c_1^2 + \text{etc.} = 0, \quad b_{22}b_{33}c_1^2 + \text{etc.} = 0, \quad \text{d. h. } c_1^2 : c_2^2 : c_3^2$$
$$= a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22}) : a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33}) : a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}).$$

Haben dann $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $F = 0$ dieselben Bedeutungen wie im Text, so sei $\lambda S_1 + \mu S_2 + \nu F = 0$ die Gleichung unseres Kegelschnittes; dann ergeben sich die Relationen

$$\lambda a_{11} + \mu b_{11} + \nu a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22}) = a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})$$

mit zwei cyclisch gleichgebildeten. Multiplicirt man diese Relationen bez. mit $a_{22}a_{33}$, $a_{33}a_{11}$, $a_{11}a_{22}$ und addirt die Producte, so erhält man

$$3\lambda a_{11}a_{22}a_{33} + \mu(b_{11}a_{22}a_{33} + \text{etc.}) + 2\nu a_{11}a_{22}a_{33}(a_{11}b_{22}b_{33} + \text{etc.}) = 0,$$

wo alle Glieder Invarianten sind. Also gilt allgemein die Relation

$$3\lambda\Delta_1 + \mu\Theta_1 + 2\nu\Delta_1\Theta_2 = 0 \text{ und ebenso } \lambda\Theta_2 + 2\mu\Delta_2 + 2\nu\Delta_2\Theta_1 = 0,$$

so dafs für die allgemeine Gleichung des Vierzehnpunkte-Kegelschnitts die Parameterwerte folgen:

$$\lambda : \mu : \nu = 2\Delta_2(\Theta_1^2 - 3\Delta_1\Theta_2) : 2\Delta_1(\Theta_2^2 - 3\Delta_2\Theta_1) : (9\Delta_1\Delta_2 - \Theta_1\Theta_2).$$

3) Das dem vorigen dual entsprechende Problem liefert einen covarianten Kegelschnitt $\Psi = 0$, mit

$$\Psi \equiv 3(3F - \Theta_2S_1 - \Theta_1S_2).$$ [136]

4) Die Bedingung, unter welcher der Kegelschnitt $F = 0$ in ein Linienpaar degenerirt, ist ($b_{ii} = 1$)

$$a_{11} a_{22} a_{33} \{(a_{22} + a_{33})(a_{33} + a_{11})(a_{11} + a_{22})\} = 0 \quad \text{oder}$$
$$a_{11} a_{22} a_{33} \{(a_{11} + a_{22} + a_{33})(a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22}) - a_{11} a_{22} a_{33}\} = 0$$

oder (vgl. § 368, 3)) $\Delta_1 \Delta_2 (\Theta_1 \Theta_2 - \Delta_1 \Delta_2) = 0.$

$\Theta_1 \Theta_2 = \Delta_1 \Delta_2$ *ist auch die Bedingung, unter welcher* $\Phi = 0$ *zerfällt,* d. h. unter welcher alle Gerade, welche von den beiden Kegelschnitten harmonisch geteilt werden, durch einen oder den andern von zwei festen Punkten gehen. Diese Bedingung wird z. B. erfüllt für zwei Kreise, welche sich rechtwinklig schneiden, und in der Tat wird in diesem Falle jeder Durchmesser des einen Kreises durch den andern harmonisch geteilt, und der Ort der Punkte, deren Tangenten ein harmonisches Büschel bilden, reducirt sich auf zwei Gerade. Ort und Enveloppe reduciren sich auf analoge Weise für

$$d^2 = 2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2).$$

5) Die Gleichung der vier Tangenten zu $S_1 = 0$ in den Schnittpunkten mit $S_2 = 0$ ist

$$(\Theta_1 S_1 - \Delta_1 S_2)^2 = 4 \Delta_1 S_1 (\Theta_2 S_1 - F).$$

6) Ein Dreieck ist einem gegebenen Kegelschnitt umgeschrieben, und zwei seiner Ecken bewegen sich in festen Geraden $\xi_x = 0$, $\eta_x = 0$; Ort der dritten Ecke.

In § 307, 1) wurde gefunden, dafs, falls $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$, $a x_1 - x_3 = 0$, $b x_1 - x_3 = 0$ gegeben sind,

$$(a+b)^2 x_1 x_3 = 4 a b x_2^2 \quad \text{oder} \quad (a+b)^2 (x_2^2 - x_1 x_3) = (a-b)^2 x_2^2$$

die Gleichung des Ortes ist. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber das Quadrat der Polaren des Schnittpunktes der Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt, welches im Falle der allgemeinen Gleichungen $P \equiv$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)$$
$$+ (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$$

ist; und $a + b = 0$ ist die Bedingung, unter welcher die Geraden in Bezug auf denselben conjugirt sind; sie ist im allgemeinen Falle durch Θ_1 zu ersetzen, wenn

$$\Theta_1 \equiv A_{11}\xi_1\eta_1 + A_{22}\xi_2\eta_2 + A_{33}\xi_3\eta_3 + A_{23}(\xi_2\eta_3 + \eta_2\xi_3)$$
$$+ A_{13}(\xi_3\eta_1 + \eta_3\xi_1) + A_{12}(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2).$$

Die specielle Gleichung des Ortes ist also zu ersetzen durch die allgemeine $\Theta_1^2 S_1 + \Delta_1 P^2 = 0.$

7) Man soll die Enveloppe der Basis eines Dreiecks bestimmen, welches dem Kegelschnitt $S_1 = 0$ eingeschrieben ist, und von dessen Seiten zwei den Kegelschnitt $S_2 = 0$ berühren.

Wird das Dreieck als Fundamentaldreieck genommen, sind daher die Gleichungen der Kegelschnitte

$$S_1 \equiv 2\,(a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2) = 0,$$
$$S_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2(1 + ka_{12})x_1x_2 = 0,$$

wo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die durch $S_2 = 0$ berührten Seiten bezeichnen, so wird der Kegelschnitt $kS_1 + S_2 = 0$ durch die Seite $x_3 = 0$ berührt. Nach den Werten der Invarianten des Falles erkennt man dies als die Gleichung eines festen Kegelschnittes. Denn wegen

$$\varDelta_1 = 2a_{23}a_{31}a_{12}, \quad \Theta_1 = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2 - 2ka_{23}a_{31}a_{12},$$
$$\Theta_2 = 2(a_{23} + a_{31} + a_{12})(2 + ka_{12}), \quad \varDelta_2 = -(2 + ka_{12})^2$$

ist $\Theta_2^2 - 4\Theta_1\varDelta_2 = 4k\varDelta_1\varDelta_2$, und die Gleichung $kS_1 + S_2 = 0$ geht daher über in $(\Theta_2^2 - 4\Theta_1\varDelta_2)\,S_1 + 4\varDelta_1\varDelta_2S_2 = 0$, die Gleichung eines festen Kegelschnittes, den die dritte Seite des Dreiecks berührt. Für $\Theta_2^2 = 4\Theta_1\varDelta_2$ berührt die dritte Seite denselben Kegelschnitt $S_2 = 0$, wie die zwei ersten. (§ 364.)

8) Man soll den Ort für die Spitze eines Dreiecks finden, dessen drei Seiten einen Kegelschnitt $S_1 = 0$ berühren, während zwei seiner Ecken einem andern Kegelschnitt $S_2 = 0$ angehören.

Um die Aufgabe zu lösen, bilden wir die Gleichung des Tangentenpaares von $S_1 = 0$ aus dem Punkte x_i', sodann die Gleichung der Geraden, welche die Schnittpunkte derselben mit $S_1 = 0$ verbinden, endlich die Bedingung, dafs eine dieser Geraden, die die Basis des fraglichen Dreiecks sein mufs, den Kegelschnitt $S_2 = 0$ berühre. Ist dann $P = 0$ die Gleichung der Polare von x_i' in Bezug auf $S_1 = 0$ und S_1' das Resultat der Substitution von x_i' in S_1, so ist die Gleichung des Tangentenpaares $S_1S_1' - P^2 = 0$. Die Bedingung, unter welcher $S_1S_1' - P^2 + \lambda S_2 = 0$ ein Linienpaar repräsentirt, liefert zur Bestimmung der Schnittsehnen dieses Tangentenpaares mit dem Kegelschnitt die Relation

$$\lambda^2\varDelta_2 + \lambda F' + \varDelta_1S_1'S_2' = 0.$$

Um sodann die Bedingung zu finden, unter welcher eine dieser Sehnen den Kegelschnitt $S_1 = 0$ berührt, bilden wir nach § 358 die Discriminante von $\mu S_1 + (S_1S_1' - P^2 + \lambda S_2) = 0$ und stellen die Bedingung auf, unter welcher sie in μ gleiche Wurzeln hat; jene Discriminante ist

$$\mu^2\varDelta_1 + \mu(2\varDelta_1S_1' + \lambda\Theta_1) + \{\varDelta_1S_1'^2 + \lambda(\Theta_1S_1' + \varDelta_1S_2') + \lambda^2\Theta_2\} = 0,$$

und die Bedingung der Existenz gleicher Wurzeln gibt

$$\lambda(4\varDelta_1\Theta_2 - \Theta_1^2) + 4\varDelta_1^2S_2' = 0.$$

Die Substitution des entsprechenden Wertes von λ in

$$\lambda^2 \Delta_2 + \lambda F' + \Delta_1 S_1' S_2' = 0$$

gibt die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$16 \Delta_1^3 \Delta_2 S_2 - 4 \Delta_1 (4 \Delta_1 \Theta_2 - \Theta_1^2) F + S_1 (4 \Delta_1 \Theta_2 - \Theta_1^2)^2 = 0.$$

Sie reducirt sich wirklich für $4 \Delta_1 \Theta_2 = \Theta_1^2$ auf $S_2 = 0$.[137])

9) Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, von dessen Seiten zwei den Kegelschnitt $S_1 = 0$ berühren, während die dritte den andern Kegelschnitt $aS_1 + bS_2 = 0$ berührt, und die beiden Basisecken sich in $S_2 = 0$ bewegen.

Man findet nach der Methode des letzten Beispiels, dafs der Ort der eine oder der andere von den Kegelschnitten ist, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten von $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ berühren. Sie sind durch die Gleichung dargestellt

$$\lambda^2 \Delta_1 \Delta_2 S_2 + \lambda \mu F + \mu^2 S_1 = 0,$$

wenn $\lambda : \mu$ aus der Gleichung bestimmt wird

$$a \{ 4 \Delta_1 \Delta_2 b - (\Theta_1^2 - 4 \Delta_1 \Theta_2) a \} \lambda^2 + a (4 \Delta_1 a + 2 \Theta_1 b) \lambda \mu - b^2 \mu^2 = 0.$$

10) Man soll den Ort der freien Ecke eines Polygons bestimmen, dessen sämmtliche Seiten den Kegelschnitt $S_1 = 0$ berühren, während seine Ecken bis auf eine in $S_2 = 0$ liegen.

Diese Aufgabe reducirt sich auf die letztvorhergehende; denn die Verbindungslinie zweier Ecken des Polygons, die der freien Ecke benachbart sind, berührt einen Kegelschnitt von der Gleichung $aS_1 + bS_2 = 0$. Wenn $\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''; \lambda''', \mu'''$ die den Polygonen von $(n - 1)$, n und $(n + 1)$ Seiten entsprechenden Werte sind, so ist

$$\lambda''' = \mu' \mu''^2, \quad \mu''' = \Delta_2 \lambda' \lambda'' \{ 4 \Delta_1 \Delta_2 \mu'' - (\Theta_1^2 - 4 \Delta_1 \Theta_2) \Delta_2 \lambda'' \}.$$

In dem Falle des Dreiecks ist

$$\lambda' = 4 \Delta_1 \Delta_2, \quad \mu' = \Delta_2 (\Theta_1^2 - 4 \Delta_1 \Theta_2);$$

im Falle des Vierecks wird

$$\lambda'' = (\Theta_1^2 - 4 \Delta_1 \Theta_2)^2, \quad \mu'' = 8 \Delta_1 \Delta_2 \{ 8 \Delta_1^2 \Delta_2 + \Theta_1 (\Theta_1^2 - 4 \Delta_1 \Theta_2^2) \}$$

und aus diesen ergeben sich Schritt für Schritt die Werte für jedes andere Polygon.[138])

11) Das von den Polaren der Mittelpunkte der Seiten eines gegebenen Dreiecks in Bezug auf einen jeden eingeschriebenen Kegelschnitt gebildete Dreieck hat eine constante Fläche.[139])

12) Die drei Paare von Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Schnittpunkten seiner Gegenseiten mit einem Kegelschnitt verbinden, bilden zwei Gruppen von drei Geraden durch *einen* Punkt, wenn man hat

$$\Delta_1 = 4 a_{12} a_{23} a_{31}.$$

370. **Berührungsbedingungen.** *Die projectivische Verallgemeinerung der Beziehungen zwischen Kreisen* findet sich in dem Zusammenhang der Kegelschnitte, welche mit einem festen Kegelschnitt in doppelter Berührung stehen. Der analytischen Behandlung dieser Probleme in Beispielen liegen gewisse Covariantenrelationen zu Grunde.

Man soll die Bedingung aufstellen, *unter welcher die Gerade* ξ_i *den Kegelschnitt* $S + (\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3)^2 = 0$ *berührt.* Die zugeordnete Form liefert dieselbe durch die Substitution von $a_{ik} + \eta_i \eta_k$ für a_{ik} als

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \eta_1'^2 & , a_{12} + \eta_1'\eta_2', & a_{13} + \eta_1'\eta_3', & \xi_1 \\ a_{21} + \eta_2'\eta_1', & a_{22} + \eta_2'^2 & , a_{23} + \eta_2'\eta_3', & \xi_2 \\ a_{31} + \eta_3'\eta_1', & a_{32} + \eta_3'\eta_2', & a_{33} + \eta_3'^2 & , \xi_3 \\ \xi_1 & , \xi_2 & , \xi_3 & , 0 \end{vmatrix} = 0;$$

sie zerfällt in Partialdeterminanten, deren erste $-\Sigma$ selbst ist; die drei, welche je zwei Reihen der $\eta_i' \eta_k'$ enthalten, verschwinden identisch, weil zwei proportionale Verticalreihen in sie eintreten, und die drei, in die nur eine Reihe $\eta_i' \eta_k'$ eintritt, geben durch Entwickelung ein Aggregat von Gliedern, welches sich von dem Polynom $-S$ nur dadurch unterscheidet, dafs für die x_i die Differenzen $(\xi_k \eta_j - \xi_j \eta_k)$ in sie eintreten. Also ist die Tangentialgleichung des Systems

$$\Sigma + \{a_{11}(\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3)^2 + \cdots + 2a_{12}(\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3)(\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3)\} = 0.$$

Dieselbe kann in anderer Form geschrieben werden, wenn man die dualistische zur Relation des § 326

$$SS' - P^2 = C$$

zu der Umformung benutzt, also

$$\Sigma\Sigma' - \Pi^2 \equiv \Delta\Gamma, \qquad \text{wo}$$

$$\Gamma \equiv a_{11}(\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3)^2 + \cdots + 2a_{12}(\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3)(\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3).$$

Man erkennt nach § 320 in dem Subtrahenden das Quadrat der als Polare Π zu bezeichnenden Function, durch deren Verschwinden bedingt ist, dafs die beiden Geraden ξ_i und η_i in Bezug auf den Kegelschnitt $S = 0$ harmonische Polaren sind. So kann, wenn Σ' durch die Substitution von η_i in Σ entsteht, die oben gewonnene Bedingung in der Form geschrieben werden

$$(\Delta + \Sigma')\,\Sigma = \Pi^2.$$

Dieselbe Gleichung kann endlich in eine für gewisse Anwendungen bequeme neue Form dadurch gebracht werden, daſs man statt der Coordinaten ξ_i der Geraden die Coordinaten ihres in Bezug auf den Kegelschnitt $S=0$ genommenen Pols einführt und die Bedingung bildet, unter welcher die als die Polare $P'=0$ von x' gegebene Gerade den Kegelschnitt $S+P''^2=0$ berührt. Die Polare von x_i' berührt $S=0$, wenn x_i' in der Curve liegt, und wirklich, wenn wir in Σ für die ξ_i die halben Ableitungen S_1, S_2, S_3, d. h. die Coefficienten der x_1, x_2, x_3 bez. in der Gleichung der Polare, substituiren, so erhalten wir das Product $\Delta S'$ *). Es sind ferner zwei Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt $S=0$ harmonische Polaren, wenn ihre Pole in Bezug auf ihn harmonische Pole sind; und in der Tat liefert die der vorigen gleiche Substitution für die ξ_i in Π das Product ΔR, wenn R das Resultat der Substition der Coordinaten des einen der Punkte x_i', x_i'' in die Gleichung der Polare des andern bezeichnet. In Folge alles dessen wird die Bedingung, unter welcher die Gerade $P'=0$ den Kegelschnitt $S+P''=0$ berührt, in der Form erhalten

$$(1+S'')\,S'=R^2.$$

Man kann schlieſslich zur Bildung der *Bedingung* weitergehen, *unter welcher die beiden Kegelschnitte*

$$S+(\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3)^2=0,\quad S+(\zeta_1x_1+\zeta_2x_2+\zeta_3x_3)^2=0$$

einander berühren. Denn diese Kegelschnitte berühren einander, wenn eine der gemeinschaftlichen Sehnen $\eta_x\pm\zeta_x=0$ einen der Kegelschnitte berührt; man erhält daher die gesuchte Bedingung, indem man in der Bedingung

$$(\Delta+\Sigma')\,\Sigma=\Pi^2$$

für die ξ_i die $\eta_i\pm\zeta_i$ substituirt. Man erhält

$$(\Delta+\Sigma')(\Sigma'\pm2\Pi+\Sigma'')=(\Sigma'\pm\Pi)^2$$

und bringt dies auf die mehr symmetrische Form

$$(\Delta+\Sigma_\eta)(\Delta+\Sigma_\zeta)=(\Delta\pm\Pi)^2.$$

---

*) Wir bemerken, daſs man damit die Form einer Determinante für die allgemeine homogene Gleichung des Kegelschnittes gewonnen hat.

Man bildet ebenso aus der Bedingung $(1+S'')S'=R^2$ die Bedingung der Berührung der Kegelschnitte $S+P'^2=0$, $S+P''^2=0$ in der Form

$$(1+S')(1+S'')=(1\pm R)^2.$$

B. 1) Man soll einen $S=0$ doppelt berührenden Kegelschnitt $S+P^2=0$ so bestimmen, daſs er zugleich die Kegelschnitte

$$S+P'^2=0,\quad S+P''^2=0,\quad S+P'''^2=0$$

berührt, die selbst mit $S=0$ in doppelter Berührung sind.[140])

Denken wir den Punkt x_i als den Pol der Sehne der Berührung zwischen $S=0$ und $S+P^2=0$, so gelten die Relationen

$$(1+S)(1+S')=(1+P')^2,\quad (1+S)(1+S'')=(1+P'')^2,$$
$$(1+S)(1+S''')=(1+P''')^2,$$

in welchen S', S'', S''' bekannte Constanten sind und S, P', P'', P''' die Coordinaten des gesuchten Punktes x_i enthalten. Sei

$$1+S=k^2,\quad 1+S'=k'^2,\quad 1+S''=k''^2,\quad 1+S'''=k'''^2,$$

so ist $kk'=1+P'$, $kk''=1+P''$, $kk'''=1+P'''$.

Dabei ist zu bemerken, daſs P', P'', P''' je mit doppeltem Zeichen zu schreiben wären, und daſs in Folge der Quadratwurzelziehung auch die k', k'', k''' doppelte Zeichen erhalten; daher zeigen diese Zeichenverschiedenheiten die Existenz von zweiunddreiſsig Auflösungen des Problems an.

Dis letztgeschriebenen Gleichungen geben

$$k(k'-k'')=P'-P'',\quad k(k''-k''')=P''-P'''$$

und somit durch Elimination von k

$$P'(k''-k''')+P''(k'''-k')+P'''(k'-k'')=0,$$

die Gleichung einer Geraden, in welcher der in Bezug auf $S=0$ genommene Pol der Berührungssehne des gesuchten Kegelschnittes liegen muſs. Durch die Werte $P'=P''=P'''$ wird die Gleichung erfüllt, d. h. der durch diese Relationen gegebene Punkt, eines der Radicalcentra der Kegelschnitte

$$S+P'^2=0,\quad S+P''^2=0,\quad S+P'''^2=0,$$

liegt in ihr. (Vgl. § 279.) Auch die Relationen

$$P':k'=P'':k''=P''':k'''$$

erfüllen die Gleichung und haben folgende geometrische Bedeutung: Die Gleichungen von $S+P'^2=0$, $S+P''^2=0$ in Tangentialcoordinaten sind bez.

$$(1+S')\Sigma=\Delta\xi_{x'}^2,\quad (1+S'')\Sigma=\Delta\xi_{x''}^2,$$

und durch $\frac{\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3'}{k'} \pm \frac{\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3''}{k''} = 0$

werden daher Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von $S + P'^2 = 0$, $S + P''^2 = 0$ dargestellt. Die Coordinaten dieser Punkte sind $\frac{x_i'}{k'} \pm \frac{x_i''}{k''}$, oder die Polaren derselben in Bezug auf $S = 0$ haben die Gleichungen $\frac{P'}{k'} \pm \frac{P''}{k''} = 0$. Daraus folgt, dafs $P' : k' = P'' : k'' = P''' : k'''$ den in Bezug auf $S = 0$ genommenen Pol einer Axe der Ähnlichkeit der drei gegebenen Kegelschnitte bezeichnet. Man hat also den Satz: *Der Pol der gesuchten Berührungssehne liegt in einer der Geraden, welche eines der vier Radicalcentra mit dem in Bezug auf* $S = 0$ *genommenen Pol einer der vier Ähnlichkeitsaxen verbinden.* Dies ist die allgemeine Form des in § 133 gegebenen Satzes.

Zur Vervollständigung der Auflösung suchen wir auch die Coordinaten des Punktes zu bestimmen, in welchem $S + P^2 = 0$ und $S + P'^2 = 0$ sich berühren. Da dieser Punkt ein Centrum der Ähnlichkeit der beiden Kegelschnitte ist, so sind seine Coordinaten $\frac{x_i}{k} - \frac{x_i'}{k'}$ und wir müssen $x_i + \frac{k}{k'} x_i'$ für x_i in die Gleichungen $kk' = 1 + P'$, etc. substituiren, wodurch wir erhalten

$$kk' = 1 + P' + \frac{k}{k'} S', \quad kk'' = 1 + P'' + \frac{k}{k'} R, \quad kk''' = 1 + P''' + \frac{k}{k'} R',$$

wenn wir durch R, R' die Resultate andeuten, die aus der Substitution von x_i'', x_i''' bez. in die Gleichung der Polare von x_i' hervorgehen. Dann ist

$$k(k' - k'') = P' - P'' + \frac{k}{k'}(S' - R), \quad k(k' - k''') = P' - P''' + \frac{k}{k'}(S' - R'),$$

und durch Elimination von k erhalten wir in der Form

$$P'\left\{k'' - \frac{R}{k'} - \left(k''' - \frac{R'}{k'}\right)\right\} + P''\left\{k''' - \frac{R'}{k'} - \left(k' - \frac{S'}{k'}\right)\right\}$$
$$+ P'''\left\{k' - \frac{S'}{k'} - \left(k'' - \frac{R}{k'}\right)\right\} = 0$$

die Gleichung einer Geraden, welche den gesuchten Berührungspunkt enthält. Dieselbe verbindet ein Radicalcentrum mit demjenigen Punkte, in welchem P', P'', P''' bez. zu

$$k' - \frac{S'}{k'}, \quad k'' - \frac{R}{k'}, \quad k''' - \frac{R'}{k'} \quad \text{oder zu } 1, \; k'k'' - R, \; k'k''' - R'$$

proportional sind. Wenn wir aber die Gleichungen der Polaren der drei Ähnlichkeitcentra einer Ähnlichkeitsaxe in Bezug auf den Kegelschnitt $S + P'^2 = 0$ bilden, wie oben, so erhalten wir $(k'k'' - R)P' = P''$, $(k'k''' - R')P' = P'''$, etc. Also verbindet

die Linie, welche wir zu construiren wünschen, eines der vier Radicalcentra mit dem Pole, welcher einer der vier Ähnlichkeitsaxen in Bezug auf den Kegelschnitt $S + P'^2 = 0$ entspricht. Aus Sätzen, welche unter den Anwendungen der Methode der reciproken Polaren in einem folgenden Kapitel (§ 396 f.) gegeben werden sollen, läſst sich dieselbe Construction auch ganz ebenso geometrisch ableiten, wie es im § 133 für das Problem des Apollonius geschehen ist. Die sechszehn Geraden, welche man so erhält, schneiden den Kegelschnitt $S + P'^2 = 0$ in den zweiunddreiſsig Punkten, in welchen ihn die verschiedenen den Bedingungen des Problems genügenden Kegelschnitte berühren.

2) Zu einer zweiten Lösung des Problems führt die Entwickelung einer identischen Relation, welche die Invarianten von vier Kegelschnitten verbindet, die alle *einen* Kegelschnitt doppelt berühren und zugleich alle von *einem* andern Kegelschnitt berührt werden. Wenn
$$S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$
ist und
$$L^{(1)} \equiv a_1^{(1)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + a_3^{(1)} x_3, \quad L^{(2)} \equiv a_1^{(2)} x_1 + a_2^{(2)} x_2 + a_3^{(2)} x_3$$
sind, so ist die Bedingung, unter welcher die Kegelschnitte
$$S - L^{(1)2} = 0 \quad \text{und} \quad S - L^{(2)2} = 0$$
einander berühren, für
$$S^{(1)} = a_1^{(1)2} + a_2^{(1)2} + a_3^{(1)2}, \quad S^{(2)} = a_1^{(2)2} + a_2^{(2)2} + a_3^{(2)2};$$
$$R^{(12)} = a_1^{(1)} a_1^{(2)} + a_2^{(1)} a_2^{(2)} + a_3^{(1)} a_3^{(2)};$$
$$(1 - S^{(1)})(1 - S^{(2)}) = (1 - R^{(12)})^2.$$
Wir werden nun auf die beiden Gruppen von Elementen mit sechs horizontalen und nur fünf verticalen Reihen
$$\begin{array}{lllll|lllll} 1, & 0 & , 0 & , 0 & , 0 & 0, & 0 & , 0 & , 0 & , 1 \\ 1, & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, & \sqrt{(1 - S^{(1)})} & -1, & a_1^{(1)}, & a_2^{(2)}, & a_3^{(1)}, & \sqrt{(1 - S^{(1)})} \\ : & : & : & & & : & : & : & & \\ 1, & a_1^{(5)}, & a_2^{(5)}, & a_3^{(5)}, & \sqrt{(1 - S^{(5)})} & -1, & a_1^{(5)}, & a_2^{(5)}, & a_3^{(5)}, & \sqrt{(1 - S^{(5)})} \end{array}$$
die Regel für die Multiplication der Determinanten anwenden, so daſs wir (vgl. § 140, 1. 2) ein verschwindendes Product erhalten, und setzen zur kurzen Darstellung desselben
$$\sqrt{(1 - S^{(1)})}\sqrt{(1 - S^{(2)})} - (1 - R^{(12)}) = (12), \text{ etc.}$$
Dadurch erhalten wir die *identische Relation*
$$\begin{vmatrix} 0 & , 1 & , 1 & , 1 & , 1 & , 1 \\ \sqrt{(1 - S^{(1)})}, & 0 & , (12), & (13), & (14), & (15) \\ \sqrt{(1 - S^{(2)})}, & (12), & 0 & , (23), & (24), & (25) \\ \sqrt{(1 - S^{(3)})}, & (13), & (23), & 0 & , (34), & (35) \\ \sqrt{(1 - S^{(4)})}, & (14), & (24), & (34), & 0 & , (45) \\ \sqrt{(1 - S^{(5)})}, & (15), & (25), & (35), & (45), & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die die Invarianten von fünf Kegelschnitten verbindet, welche sämmtlich mit einem und demselben Kegelschnitt $S=0$ in doppelter Berührung sind.

Wenn aber der Kegelschnitt (5) die vier übrigen Kegelschnitte berührt, so verschwinden die (15), ... (45) sämmtlich, und wir finden, *dafs die Invarianten von vier Kegelschnitten, welche den nämlichen Kegelschnitt doppelt berühren und selbst alle von einem und demselben fünften jenen auch doppelt berührenden Kegelschnitt S berührt werden, die Bedingung erfüllen*

$$\begin{vmatrix} 0, & (12), & (13), & (14) \\ (12), & 0, & (23), & (24) \\ (13), & (23), & 0, & (34) \\ (14), & (24), & (34), & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\text{vgl. § 150})$$

oder $\sqrt{\{(12)(34)\}} \pm \sqrt{\{(13)(24)\}} \pm \sqrt{\{(14)(23)\}} = 0.$

3) Mit Hilfe der Relation von 2) ergibt sich eine Lösung des Problems von der Bestimmung des Kegelschnittes, welcher drei gegebene Kegelschnitte berührt, und, so wie jeder von diesen, selbst einen festen Kegelschnitt doppelt berührt, welche vollständig der zweiten Auflösung des Problems vom Berührungskreis zu drei Kreisen entspricht, die wir in § 140 gegeben haben.

Wenn die Discriminante eines Kegelschnittes verschwindet, so ist $S = 1$, und die Bedingung seiner Berührung mit einem der andern Kegelschnitte reducirt sich auf $R = 1$.

Für u_i als Coordinaten eines Punktes von $S - L^2 = 0$ oder von

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0$$

bezeichnet dann offenbar

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \left\{\frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}\right\}^2 = 0$$

einen Kegelschnitt, dessen Discriminante verschwindet, und welcher $S - L^2 = 0$ berührt. Wenn daher drei Kegelschnitte

$$S - L_1^2 = 0, \quad S - L_2^2 = 0, \quad S - L_3^2 = 0$$

gegeben sind, und u_i einen Punkt bezeichnet, der dem berührenden Kegelschnitt angehört, und wenn der Kegelschnitt von der vorher geschriebenen Gleichung als vierter Kegelschnitt genommen wird, so sind die Functionen (14), (24), (34) bez.

$$1 - \frac{L_1}{\sqrt{S}}, \quad 1 - \frac{L_2}{\sqrt{S}}, \quad 1 - \frac{L_3}{\sqrt{S}},$$

und die Coordinaten der Punkte des Berührungskegelschnittes der drei gegebenen genügen daher der Gleichung[141])

$$\sqrt{[(23)(\sqrt{S} - L_1)]} \pm \sqrt{[(31)(\sqrt{S} - L_2)]} \\ \pm \sqrt{[(12)(\sqrt{S} - L_3)]} = 0.$$

4) Die vier Kegelschnitte, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt $S=0$ eine doppelte Berührung haben und durch drei gegebene Punkte gehen, werden sämmtlich von vier andern Kegelschnitten berührt, die selbst mit $S=0$ eine doppelte Berührung haben.[142]) Sei

$$S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3\cos\varphi_1 - 2x_3x_1\cos\varphi_2 - 2x_1x_2\cos\varphi_3 = 0,$$

so sind die vier gedachten Kegelschnitte durch $S = (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^2$ dargestellt, und diese werden alle durch

$$S = \{x_1\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + x_2\cos(\varphi_3 - \varphi_1) + x_3\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\}^2$$

und die drei andern Kegelschnitte berührt, die man hieraus durch die bez. Zeichenwechsel von φ_1, φ_2, φ_3 erhält.

5) Die vier von den Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berührten Kegelschnitte, welche den Kegelschnitt $S=0$ doppelt berühren, werden durch vier andere Kegelschnitte berührt, welche gleichfalls $S=0$ doppelt berühren. Jene sind für

$$\psi = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \qquad \text{durch}$$

$$S = \{x_1\sin(\psi - \varphi_1) + x_2\sin(\psi - \varphi_2) + x_3\sin(\psi - \varphi_3)\}^2$$

und die drei andern Gleichungen dargestellt, welche durch die Zeichenwechsel bei φ_1, φ_2, φ_3 bez. aus dieser entstehen; einer der berührenden Kegelschnitte ist daher

$$S = \left\{\frac{x_1\sin\frac{1}{2}\varphi_2\sin\frac{1}{2}\varphi_3}{\sin\frac{1}{2}\varphi_1} + \frac{x_2\sin\frac{1}{2}\varphi_3\sin\frac{1}{2}\varphi_1}{\sin\frac{1}{2}\varphi_2} + \frac{x_3\sin\frac{1}{2}\varphi_1\sin\frac{1}{2}\varphi_2}{\sin\frac{1}{2}\varphi_3}\right\}^2,$$

und man erhält die übrigen durch Veränderung des Vorzeichens bei x_1 und gleichzeitigen Übergang vom Sinus zum Cosinus bei φ_2 und φ_3, etc.

6) Die Bedingung, unter welcher drei Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ mit demselben vierten Kegelschnitt eine doppelte Berührung haben, wird gebildet, indem man λ, μ, ν zwischen den drei Gleichungen eliminirt, welche ausdrücken, dafs

$$\lambda S_1 - \mu S_2 = 0, \quad \mu S_2 - \nu S_3 = 0, \quad \nu S_3 - \lambda S_1 = 0$$

in Linienpaare zerfallen, d. h. zwischen

$$\Delta_1\lambda^3 - \Theta_1\lambda^2\mu + \Theta_2\lambda\mu^2 - \Delta_2\mu^3 = 0$$

und den gleichgebildeten übrigen.

371. **Transformation zu Normal-Gleichungen.** Eine Anwendung von fundamentaler Bedeutung hat die Invariantentheorie auf die Bestimmung des gemeinsamen Polardreiecks zweier Kegelschnitte. Denn die Beziehung derselben zu den

Curven ist derart, dafs das Tripel seiner Seiten zu diesen covariant sein mufs. *Infolge dessen mufs die Coordinatentransformation $x_i = \Sigma a_{ik} x_k'$, welche zwei Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polardreieck bezieht oder zwei quadratische Formen gleichzeitig auf die Normalform reducirt, mit Hilfe der Invarianten des Paares ausführbar sein.*[143])

Wir setzen die Gleichungen der Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in den allgemeinen Formen voraus und denken sie durch die linearen Substitutionen in die jener Beziehung entsprechende Form

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 0, \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$$

übergeführt, wobei wir gewisse Constanten implicite in den x_i' voraussetzen. Die Aufgabe der Ermittelung der Werte der Substitutionscoefficienten α_{ik} und der λ ist völlig bestimmt, denn den zwölf Unbekannten entsprechen nach den Identitäten der transformirten und der ursprünglichen Formen zwölf Bedingungsgleichungen.

Die Untersuchung der Discriminante Δ und der Tangentialform Σ des Systems $S_1 - \lambda S_2 = 0$ führt zur Bestimmung sämmtlicher Unbekannten; jene ist

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11}, & a_{12}-\lambda b_{12}, & a_{13}-\lambda b_{13} \\ a_{21}-\lambda b_{21}, & a_{22}-\lambda b_{22}, & a_{23}-\lambda b_{23} \\ a_{31}-\lambda b_{31}, & a_{32}-\lambda b_{32}, & a_{33}-\lambda b_{33} \end{vmatrix} = \Delta_1 - \lambda\Theta_1 + \lambda^2\Theta_2 - \lambda^3\Delta_2 \equiv f(\lambda);$$

die Discriminante des transformirten Systems ist notwendig

$$\Delta^2 \cdot f(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda).$$

Also liefert die cubische Gleichung $f(\lambda) = 0$, wie auch aus der des § 356 hervorgeht, die Werte von λ, welche die Coefficienten in der transformirten Form sind.

Bildet man ferner die Tangentialform (§ 366)

$$\Sigma_1 - \lambda\Phi + \lambda^2\Sigma_2 \equiv - \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11}, & a_{12}-\lambda b_{12}, & a_{13}-\lambda b_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}-\lambda b_{21}, & a_{22}-\lambda b_{22}, & a_{23}-\lambda b_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}-\lambda b_{31}, & a_{32}-\lambda b_{32}, & a_{33}-\lambda b_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix},$$

so geht dieselbe durch die transponirte Substitution in die Tangentialform des transformirten Systems über

$$\Delta^2\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda, & 0, & 0, & \xi_1' \\ 0, & \lambda_2 - \lambda, & 0, & \xi_2' \\ 0, & 0, & \lambda_2 - \lambda, & \xi_3' \\ \xi_1', & \xi_2', & \xi_3', & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)\left\{\frac{\xi_1'^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\xi_2'^2}{\lambda_2 - \lambda} + \frac{\xi_3'^2}{\lambda_3 - \lambda}\right\}.$$

Denken wir dann die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die sich aus der cubischen Gleichung der Discriminante ergeben haben, in diese Gleichung nach einander substituirt, so erhalten wir das System

$$\Delta^2\varphi(\lambda_1) = -(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\xi_1'^2,$$
$$\Delta^2\varphi(\lambda_2) = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)\xi_2'^2,$$
$$\Delta^2\varphi(\lambda_3) = -(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)\xi_3'^2.$$

Nun zeigt die Vergleichung der beiden Ausdrücke von $f(\lambda)$, dafs der Coefficient von λ^3 in dem einen $(-1)^3\varDelta_2\Delta^2$, im andern $(-1)^3$ ist; somit ist $\varDelta_2\Delta^2 = 1$ oder die Bestimmung von Δ^2 gegeben. Damit bestimmen die vorigen drei Gleichungen die Werte der ξ_i.

Die Substitutionen $x_i = \Sigma\alpha_{ik}x_i'$, $\xi_k' = \Sigma\alpha_{ik}\xi_i$ machen die vorigen Gleichungen zu

$$\varphi(\lambda_1) = -\varDelta_2(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\{\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3\}^2, \text{ etc.}$$

Denkt man $\varphi(\lambda_1)$ durch $\varDelta_2$ und das Product der Differenzen der λ_i dividirt und den Quotienten nach Potenzen der ξ_i geordnet, so liefert die Vergleichung der Coefficienten entsprechender Potenzen von ξ_i auf beiden Seiten die zur Bestimmung der α_{ik} hinreichende Anzahl von Gleichungen. Das Product der Differenzen der λ, mit welchem zu dividiren war, ist aber wegen

$$\Delta^2 f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$

derselbe Ausdruck, welchen man erhält, indem man $\Delta^2 f(\lambda)$ zuerst nach λ differentiirt und dann für jene Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bez. einsetzt, d. h. $\Delta^2 f'(\lambda_1)$ oder $f'(\lambda_1) : \varDelta_2$, etc. Die vorigen Bestimmungsgleichungen für die α_{ik} nehmen also die Endgestalt an

$$-\frac{\varphi(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)} \equiv (\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3)^2,$$
$$-\frac{\varphi(\lambda_2)}{f'(\lambda_2)} \equiv (\alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{32}\xi_3)^2,$$
$$-\frac{\varphi(\lambda_3)}{f'(\lambda_3)} \equiv (\alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3)^2;\text{*})$$

oder in vollständig entwickelter Gestalt in den Tangentialformen ausgedrückt

$$\Sigma_1 - \lambda_i \Phi + \lambda_i^2 \Sigma_2 = f'(\lambda_i)\, \xi_i'^2.$$

Die Substitutionscoefficienten selbst erhält man endlich wie folgt: Man findet aus den Relationen $\Sigma_1' = \Delta^2 \Sigma_1$, $\Sigma_2' = \Delta^2 \Sigma_2$, $\Phi' = \Delta^2 \Phi$ und erhält aus ihnen die ξ_i' in Function der ξ_i oder $\xi_i' = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ und somit

$$\alpha_{1i}\xi_1 + \alpha_{2i}\xi_2 + \alpha_{3i}\xi_3 = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Durch die successiven Substitionen

$\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 = 0;\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = 0;\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 = 1$

folgen dann die Werte

$$\alpha_{1i} = \psi_i(1, 0, 0); \quad \alpha_{2i} = \psi_i(0, 1, 0); \quad \alpha_{3i} = \psi_i(0, 0, 1),$$

und daher für unser Problem

$$\alpha_{1i} = \sqrt{\frac{\Sigma_1(1, 0, 0) - \lambda_i \Phi(1, 0, 0) + \lambda_i^2 \Sigma_2(1, 0, 0)}{f'(\lambda_i)}},$$
$$\alpha_{2i} = \sqrt{\frac{\Sigma_1(0, 1, 0) - \lambda_i \Phi(0, 1, 0) + \lambda_i^2 \Sigma_2(0, 1, 0)}{f'(\lambda_i)}},$$
$$\alpha_{3i} = \sqrt{\frac{\Sigma_1(0, 0, 1) - \lambda_i \Phi(0, 0, 1) + \lambda_i^2 \Sigma_2(0, 0, 1)}{f'(\lambda_i)}}.$$

Die Bestimmung des Polardreiecks wird vereinfacht, wenn eine seiner Ecken, also auch die Gegenseite von vornherein schon bekannt ist. Die beiden andern Seiten des Dreiecks sind zu ermitteln als *das einzige Paar conjugirter Polaren, welches die beiden Kegelschnitte an jenem Pol gemeinsam haben.*

Ein Hauptbeispiel für dieses Problem bieten concentrische Kegelschnitte, deren gemeinsames Paar conjugirter Durchmesser gesucht wird. Ist dann insbesondere einer der Kegel-

*) Diese Entwickelungen lassen sich ohne Veränderung auf quadratische Formen von n Veränderlichen ausdehnen.

schnitte ein Kreis, so ist das geforderte Durchmesserpaar rectangulär, d. h. man kommt auf *die Axenbestimmung der Centralcurven*[144]) zurück und erkennt $a_{11} + a_{22}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ als *Kegelschnitts-Invarianten der Beziehung auf rechtwinklige Systeme um den Mittelpunkt* (§§ 166—168). Die Ausführung dieses Gedankens in B. 9) zeigt die bloſse binäre Gestaltung der Theorie des Textes.

B. 1) Normalformen der Gleichungen

$$S_1 \equiv 9x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_2x_3 - 10x_3x_1 - 6x_1x_2 = 0,$$
$$S_2 \equiv 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0.$$

Man erhält für die Coefficienten A_{11}, A_{22} etc. der Tangentialgleichungen der Kegelschnitte die Werte

$$A_{11} = -4,\ A_{22} = -61,\ A_{33} = -36;\ A_{23} = 51,\ A_{31} = -3,\ A_{12} = 8;$$
$$B_{11} = 2,\ B_{22} = 9,\ B_{33} = 14;\ B_{23} = -11,\ B_{31} = 5,\ B_{12} = -4;$$

für die Invarianten $\Delta_1 = -45$, $\Delta_2 = 1$, $\Theta_1 = -49$, $\Theta_2 = -3$; also für die cubische Gleichung

$$f(\lambda) \equiv -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 49\lambda - 45 = 0$$

und für ihre Wurzeln $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -9$; also für die reducirten Gleichungen

$$5x_1'^2 + x_2'^2 - 9x_3'^2 = 0, \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0.$$

Es erübrigt die Bestimmung der Substitutionscoefficienten. Man erhält $f'(\lambda_1) = -56$, $f'(\lambda_2) = 40$, $f'(\lambda_3) = -140$;

$$\varphi(\lambda_1) = 56\xi_1^2 + 224\xi_2^2 + 224\xi_3^2 - 448\xi_2\xi_3 + 224\xi_3\xi_1 - 224\xi_1\xi_2,$$
$$\varphi(\lambda_2) = -40\xi_2^2 - 40\xi_3^2 + 80\xi_2\xi_3,$$
$$\varphi(\lambda_3) = 140\xi_1^2 + 560\xi_2^2 + 1260\xi_3^2 - 1680\xi_2\xi_3 + 840\xi_3\xi_1 - 560\xi_1\xi_2,$$

also jene negativen Quotienten von $\varphi(\lambda_i)$ und $f'(\lambda_i)$ bez. gleich

$$\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 4\xi_3^2 - 8\xi_2\xi_3 + 4\xi_3\xi_1 - 4\xi_1\xi_2,\quad \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3,$$
$$\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 9\xi_3^2 - 12\xi_2\xi_3 + 6\xi_3\xi_1 - 4\xi_1\xi_2,$$

so daſs die Bestimmungsgleichungen der Coefficienten werden

$$\alpha_{11}^2 = 1,\ \alpha_{21}^2 = 4,\ \alpha_{31}^2 = 4,\ \alpha_{21}\alpha_{31} = -4,\ \alpha_{31}\alpha_{11} = 2,\ \alpha_{11}\alpha_{21} = -2;$$
$$\alpha_{12}^2 = 0,\ \alpha_{22}^2 = 1,\ \alpha_{32}^2 = 1,\ \alpha_{22}\alpha_{32} = -1,\ \alpha_{32}\alpha_{12} = 0,\ \alpha_{12}\alpha_{22} = 0;$$
$$\alpha_{13}^2 = 1,\ \alpha_{23}^2 = 4,\ \alpha_{33}^2 = 9,\ \alpha_{23}\alpha_{33} = -6,\ \alpha_{33}\alpha_{13} = 3,\ \alpha_{13}\alpha_{23} = -2;$$

und diese selbst $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = 1$;

$$\alpha_{21} = -2,\ \alpha_{22} = 1,\ \alpha_{23} = -2;\quad \alpha_{31} = 2,\ \alpha_{32} = -1,\ \alpha_{33} = 3.$$

Die Determinante der Substitution ist $= 1$, wie der Wert von Δ_2 es bedingt.

2) Man soll für den Kegelschnitt $\varkappa S_1 + \lambda S_2 = 0$ das Doppelverhältnis der vier Punkte bestimmen, welche den Kegelschnitten $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ gemeinschaftlich sind (§ 361, 2).[145])

Wir denken den Scheitelpunkt des Büschels in einem dieser gemeinschaftlichen Punkte, so dafs dasselbe von der Tangente des Kegelschnittes in ihm und den Strahlen nach den drei übrigen gebildet wird; dafs die Doppelverhältnisse desselben also mit denen der vier Wurzeln der in $\varrho : \sigma$ biquadratischen Gleichung

$$(\varDelta_1 \varrho^3 + \Theta_1 \varrho^2 \sigma + \Theta_2 \varrho \sigma^2 + \varDelta_2 \sigma^3)(\varkappa \varrho - \lambda \sigma) = 0$$

identisch sind; und wir bestimmen die letztern nach einer linearen Transformation, bei welcher sie ja ungeändert bleiben.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: Die Discriminante des Büschels $\varkappa^3 \varDelta_1 + \varkappa^2 \lambda \Theta_1 + \varkappa \lambda^2 \Theta_2 + \lambda_2{}^3 \varDelta_2$ sei $G(\varkappa, \lambda)$ oder G; dazu die sog. Hesse'sche bez. Jacobi'sche Function (vgl. § 348)

$$\tfrac{1}{18}\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa \partial \lambda}\right)\right\} = H(\varkappa, \lambda),$$

$$\tfrac{1}{6}\left\{\frac{\partial G}{\partial \varkappa}\frac{\partial H(\varkappa, \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}\frac{\partial H(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa}\right\} = Q(\varkappa, \lambda).$$

Dann substituiren wir τ und v nach den Relationen

$$\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial G(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa}\varrho + \frac{\partial G(\varkappa, \lambda)}{\partial \lambda}\sigma\right\} = \tau, \quad \varkappa \varrho - \lambda \sigma = v$$

und erhalten

$$G^2(\varkappa, \lambda)\, G(\varrho, \sigma)(\varkappa \varrho - \lambda \sigma) = \{\tau^3 + \tfrac{3}{2} H(\varkappa, \lambda)\tau v^2 + Q(\varkappa, \lambda) v^3\} v.$$

Bedeutet dann $(\tau - \omega v)$ einen linearen Factor φ der Klammergröfse rechts, so hat man

$$v\{\tau^3 + \tfrac{3}{2} H(\varkappa, \lambda)\tau v^2 + Q(\varkappa, \lambda) v^3\} = v\varphi(\varphi - \omega_1 v)(\varphi - \omega_2 v)$$
$$= v\varphi^3 - (\omega_1 + \omega_2) v^2 \varphi^2 + \omega_1 \omega_2 v^3 \varphi$$

und es müssen die absoluten Invarianten der beiden biquadratischen Formen rechts und links gleichwertig sein; man erhält somit für d gleich $\omega_1 : \omega_2$, als das fragliche Doppelverhältnis der Beziehung (vgl. § 351)

$$-\frac{H^3(\varkappa, \lambda)}{Q^2(\varkappa, \lambda)} = \frac{(1 - d + d^2)^3}{(1 + d)^2 (2 - d)^2 (1 - 2d)^2},$$

oder $H^3(\varkappa, \lambda)(1 + d)^2(2 - d)^2(1 - 2d)^2 + Q^2(\varkappa, \lambda)(1 - d + d^2)^3 = 0$

als Ausdruck der Abhängigkeit zwischen d und dem Parameterverhältnis $\varkappa : \lambda$.

3) Der besonderen Wahl $H(\varkappa, \lambda) = 0$ entsprechen zwei Kegelschnitte des Büschels, für welche das Doppelverhältnis der Grundpunkte gleich einer imaginären Cubikwurzel aus der negativen Einheit, d. h. äquianharmonisch ist. (Vgl. § 345, 1.)

Ebenso der Festsetzung $Q(\varkappa, \lambda) = 0$ die drei Kegelschnitte des Büschels, für welche das Doppelverhältnis der Grundpunkte harmonisch ist. Dieselben sind dem gemeinsamen Polardreieck in der Weise zugeordnet, daſs die Doppelstrahlen der Involution aus dem Geradenpaar des Büschels und dem Diagonalenpaar des Pols die Tangenten eines solchen Kegelschnittes in Punkten der Polare oder dritten Diagonale sind.

4) Welches ist der geometrische Ort der Punkte, von denen aus an die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ vier Normalen von gegebenem Doppelverhältnis gehen?

Man erhält seine Gleichung, indem man das Doppelverhältnis der biquadratischen Form

$$k^4\varDelta_1 + k^3\Theta_1 + k^2\Theta_2 + k\varDelta_2$$

bildet, in welcher $\varDelta_1$, Θ_1, etc. die Bedeutungen aus § 356 B. haben (vgl. auch § 358, 4). Insbesondere ergibt sich

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^4 = 0$$

für den Ort der Punkte, von denen vier Normalen von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen ausgehen.

5) *Bedingung der doppelten Berührung von zwei Kegelschnitten.*

Im Falle der Berührung der beiden Kegelschnitte werden die Ausdrücke $\varphi(\lambda) : f'(\lambda_1)$ für die Doppelwurzel (§ 358) der cubischen Gleichung unendlich groſs, d. h. es ergibt sich kein Dreieck der gemeinsamen harmonischen Pole. Für eine doppelte Berührung wird dasselbe unbestimmt, weil $\varphi(\lambda)$ für die Doppelwurzel λ für beide Kegelschnitte den Wert Null haben muſs. Dies heiſst geometrisch: die Sehne der Berührung und ihr Pol sind eine Seite und die Gegenecke für alle Dreiecke jener Art, und die beiden andern Ecken liegen in der Sehne als ein Paar von conjugirten Punkten; und es heiſst analytisch, daſs auſser der Determinante $f(\lambda)$ auch deren sämmtliche Unterdeterminanten verschwinden. Also ist zugleich

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und auch}$$

$$(a_{22} - \lambda b_{22})(a_{33} - \lambda b_{33}) = (a_{23} - \lambda b_{23})^2,$$
$$(a_{33} - \lambda b_{33})(a_{11} - \lambda b_{11}) = (a_{31} - \lambda b_{31})^2,$$
$$(a_{11} - \lambda b_{11})(a_{22} - \lambda b_{22}) = (a_{12} - \lambda b_{12})^2, \quad \text{also}$$

$$(a_{11}-\lambda b_{11}):(a_{12}-\lambda b_{12}):(a_{13}-\lambda b_{13})=(a_{21}-\lambda b_{21}):(a_{22}-\lambda b_{22}):(a_{23}-\lambda b_{23}).$$

Die Elemente der Determinante verhalten sich somit wie die Quadrate und Producte von drei Gröſsen a_1, a_2, a_3, oder man hat

$$a_{11} - \lambda b_{11} = m a_1^2,\quad a_{22} - \lambda b_{22} = m a_2^2,\quad a_{33} - \lambda b_{33} = m a_3^2,$$
$$a_{12} - \lambda b_{12} = m a_1 a_2,\quad a_{23} - \lambda b_{23} = m a_2 a_3,\quad a_{31} - \lambda b_{31} = m a_3 a_1.$$

Die Substitution dieser Werte in die Gleichung $S_1 = 0$ liefert aber

$$S_1 \equiv \lambda S_2 + m(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2$$

und führt auf die Gleichungsform des § 275 zurück.

Der Berührung zweiter Ordnung entsprechen drei gleiche Wurzeln und damit die Bedingungen des § 358.

Berührung dritter Ordnung verlangt die Berührung der Sehne der doppelten Berührung mit den Kegelschnitten, also das Verschwinden der Tangentialform jedes der Kegelschnitte für die a_i ihrer Gleichung (§ 368, 4).

6) Man soll die Gleichungen der gemeinsamen Punkte für die durch die allgemeinen Gleichungen bestimmten Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in schliefslicher Endform angeben.[146]

Wir ermitteln die lineare Function der Wurzeln x_1, x_2, x_3 durch die ihr äquivalente ξ_x' (§ 365). Nun ist aus den transformirten Formen

$$x_1' : x_2' : x_3' = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3} : \sqrt{\lambda_3 - \lambda_1} : \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2};$$

also auch

$$\xi_x' = \xi_x = \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\Sigma_1 - \lambda_1 \Phi + \lambda_1^2 \Sigma_2)}{f'(\lambda_1)}}$$
$$+ \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\Sigma_1 - \lambda_2 \Phi + \lambda_2^2 \Sigma_2)}{f'(\lambda_2)}} + \sqrt{\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\Sigma_1 - \lambda_3 \Phi + \lambda_3^2 \Sigma_2)}{f'(\lambda_3)}},$$

wo noch für $f'(\lambda_i)$ sein Wert $(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)\Delta_2^2$ gesetzt werden kann. Die Function ξ_x gibt die Werte von $x_1 : x_2 : x_3$ für die successiven Substitutionen $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$; $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ unter den Wurzelzeichen.

7) Man kann die Transformation auch in allgemeinster Form an die Covariante anknüpfen, welche man als zugeordnete Form Ξ von Φ erhält, während die zugeordneten Formen von Σ_1 und Σ_2 wieder S_1 und S_2 sind. In der transformirten Form ist

$$\Phi' = (\lambda_2 + \lambda_3)\xi_1'^2 + (\lambda_3 + \lambda_1)\xi_2'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\xi_3'^2$$

und die entsprechende zugehörige Form (§ 367)

$$\Xi' = (\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)x_1'^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)x_2'^2 + (\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)x_3'^2 = 0.$$

Man hat also wegen $\Delta^2 \Xi = \Xi'$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Delta^2 \Xi &= (\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)x_1'^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)x_2'^2 + (\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)x_3'^2,\\
S_1 &= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2,\\
S_2 &= x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,
\end{aligned}$$

also durch Auflösung derselben

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)x_1'^2=\Delta^2\Xi-(\lambda_2+\lambda_3)S_1-\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)S_2,$$
$$(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)x_2'^2=\Delta^2\Xi-(\lambda_3+\lambda_1)S_1-\lambda_2(\lambda_3+\lambda_1)S_2,$$
$$(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)x_3'^2=\Delta^2\Xi-(\lambda_1+\lambda_2)S_1-\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)S_2.$$

Da nach den vorigen Entwickelungen und wie oben ist

$$\Delta^2\varDelta_2=1,\quad \lambda_2+\lambda_3=\Delta^2\Theta_2-\lambda_1,\ \text{etc.},$$

so ist $(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\varDelta_2{}^2x_i'^2=\Xi+(\lambda_i\varDelta_2-\Theta_2)(S_1-\lambda_iS_2)$,

$$x_i'=\sqrt{\frac{\Xi(x_1,x_2,x_3)+(\lambda_i\varDelta_2-\Theta_2)(S_1-\lambda_iS_2)}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\varDelta_2}}.$$

Durch eine analoge Schlufsweise wie in der vorigen Aufgabe folgen, weil x_i' eine lineare Function $H_1(x_1, x_2, x_3)$ der x_i wird, die Coefficienten der inversen Substitution, d. h. derjenigen, welche man durch Auflösung der Substitutionsgleichungen $x_i=\Sigma\alpha_{ik}x_k'$ erhält,

$$A_{1i}^*=\sqrt{\frac{\Xi(1,0,0)+(\lambda_i\varDelta_2-\Theta_2)\{S_1(1,0,0)-\lambda_iS_2(1,0,0)\}}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\varDelta_2{}^2}},$$

$$A_{2i}^*=\sqrt{\frac{\Xi(0,1,0)+(\lambda_i\varDelta_2-\Theta_2)\{S_1(0,1,0)-\lambda_iS_2(0,1,0)\}}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\varDelta_2{}^2}},$$

$$A_{3i}^*=\sqrt{\frac{\Xi(0,0,1)+(\lambda_i\varDelta_2-\Theta_2)\{S_1(0,0,1)-\lambda_iS_2(0,0,1)\}}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\varDelta_2{}^2}}.$$

8) Die Einführung der in 6) benutzten Verhältnisse der x_i

$$x_1':x_2':x_3'=\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}:\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}:\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}$$

in die obigen Ausdrücke für x_i ergibt die Gleichungen der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Kegelschnitte.

9) *Transformation zweier Centralgleichungen* (§ 168)

$$a_{11}x_1{}^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2{}^2=1,\quad b_{11}x_1{}^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2{}^2=1$$

auf das gemeinschaftliche Paar conjugirter Durchmesser, d. h. in

$$\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2=1,\quad x_1'^2+x_2'^2=1.$$

Um sie zu vollziehen, hat man die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$f(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda b_{11}, & a_{12}-\lambda b_{12}\\ a_{21}-\lambda b_{21}, & a_{22}-\lambda b_{22}\end{vmatrix}=0 \qquad \text{oder}$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)-2\lambda\{a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-2a_{12}b_{12}\}+\lambda^2(b_{11}b_{22}-b_{12}{}^2)=0$$

zu bestimmen. Man hat ferner

$$f'(\lambda)=-\{a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-2a_{12}b_{12}-\lambda(b_{11}b_{22}-b_{12}{}^2)\},$$

sagen wir $= -2(A - \lambda C)$. Sind dann die zu benutzenden Substitutionen $x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2'$, $x_2 = \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2'$, also die transponirten $\xi_1' = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2$, $\xi_2' = \alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2$, so bilden wir

$$\varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & \xi_1 \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & \xi_2 \\ \xi_1 \quad , & \xi_2 \quad , & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\{(a_{22} - \lambda b_{22})\xi_1^2 - 2(a_{12} - \lambda b_{12})\xi_1\xi_2 + (a_{11} - \lambda b_{11})\xi_2^2\}$$

und erhalten die nach ξ_i identischen Gleichungen

$$-\frac{\varphi(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)} = (\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2)^2, \quad -\frac{\varphi(\lambda_2)}{f'(\lambda_2)} = (\alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2)^2.$$

Sie liefern, unter Einführung der Wurzeln λ_1, λ_2, für die Substitutionscoefficienten die Werte

$$\alpha_{11}^2 = \frac{a_{22} - \lambda_1 b_{22}}{2(A - \lambda_1 C)}, \quad \alpha_{12}^2 = \frac{a_{22} - \lambda_2 b_{22}}{2(A - \lambda_2 C)}, \quad \alpha_{21}^2 = \frac{a_{11} - \lambda_1 b_{11}}{2(A - \lambda_1 C)}, \quad \alpha_{22}^2 = \frac{a_{11} - \lambda_2 b_{11}}{2(A - \lambda_2 C)};$$

und $\alpha_{11}\alpha_{21} = -\dfrac{a_{12} - \lambda_1 b_{12}}{A - \lambda_1 C}, \quad \alpha_{12}\alpha_{22} = -\dfrac{a_{12} - \lambda_2 b_{12}}{A - \lambda_2 C}$

zur Bestimmung der Vorzeichen.

Der Voraussetzung $f'(\lambda) = 0$ entspricht ein *Ausnahmefall;* $f(\lambda) = 0$ hat dann gleiche Wurzeln, d. h. es ist

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})^2.$$

Da die Coordinaten der Schnittpunkte beider Curven, im allgemeinen Falle, in den Coefficienten der Transformation durch

$$x_1' = \pm\sqrt{\frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad x_2' = \pm\sqrt{\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

gegeben sind, so fallen für $\lambda_1 = \lambda_2$ die Schnittpunkte in unendliche Entfernung; *die beiden Curven sind concentrische Hyperbeln, die eine Asymptote gemein haben.*

Für $f'(\lambda) = 0$ und $\varphi(\lambda) = 0$ als gleichzeitig erfüllt oder für das Verschwinden der Unterdeterminanten von $f(\lambda)$ sind

$$a_{11} = \lambda b_{11}, \quad a_{22} = \lambda b_{22}, \quad a_{12} = \lambda b_{12},$$

d. h. *die Kegelschnitte sind ähnlich* (§ 242).

Für den Fall, dass $b_{11}x_1^2 + \cdots = 1$ ein Kreis ist, d. i. für die *Bestimmung der Axen des Kegelschnittes*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 1$$

hat man $\quad b_{11} = b_{22} = 1$ und $b_{12} = 0$, d. h $f(\lambda) \equiv$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

eine Gleichung, welche stets reelle Wurzeln hat, weil ihre Discriminante $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$ positiv ist; ferner

$$f'(\lambda) = 2\lambda - (a_{11} + a_{22});$$

$$\varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \xi_2 \\ \xi_1, & \xi_2, & 0 \end{vmatrix} = (a_{22}-\lambda)\xi_1^2 + (a_{11}-\lambda)\xi_2^2 - 2a_{12}\xi_1\xi_2;$$

also $$\alpha_{1i}\xi_1' + \alpha_{2i}\xi_2' = \sqrt{\frac{(a_{22}-\lambda_i)\xi_1^2 + (a_{11}-\lambda_i)\xi_2^2 - 2a_{12}\xi_1\xi_2}{2\lambda_i - a_{11} - a_{22}}},$$

wo noch für den Nenner bez. $\lambda_1 - \lambda_2$ oder $\lambda_2 - \lambda_1$ zu setzen statthaft ist.

Den Annahmen $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ entspricht die Unbestimmtheit des Problems; dann sind *beide Curven Kreise.*

10) Die Schnittpunkte von zwei concentrischen Kegelschnitten liegen in zwei Durchmessern, welche mit dem Paar der gemeinsamen conjugirten Durchmesser ein harmonisches Büschel bilden, und die gemeinschaftlichen Tangenten bilden ein Parallelogramm, dessen Ecken auf diesen Durchmessern liegen.

Für die gemeinsamen Elemente im Falle der allgemeinen Lage gilt der Satz: Jedes der Dreiseite aus gemeinsamen Tangenten ist perspectivisch zu jedem Dreieck aus gemeinsamen Punkten. Axen und Centra derselben?

372. **Jacobi'sche Determinante.** Die Invariantentheorie der Kegelschnittpaare findet ihren Abschlufs nicht ohne die Berücksichtigung des Systems von drei gleichzeitigen quadratischen Gleichungen. Die eigentliche Untersuchung derselben greift überall in die Theorie der ternären cubischen Formen hinüber, welche wir hier ausschliefsen müssen. Wir werden uns deshalb auf die an das Frühere anschliefsenden Entwickelungen beschränken, welche ohne Kenntnis der Lehre von den Curven dritter Ordnung bez. Classe erledigt werden können.

Für drei ternäre quadratische Formen S_1, S_2, S_3 kann eine Covariante auf demselben Wege gebildet werden, wie in § 348 für zwei binäre Formen. Es ist dies *die Jacobi'sche Determinante der partiellen ersten Ableitungen der drei Formen,* also, wenn die Differentiationen durch obere Indices angedeutet werden:

$$J \equiv \begin{vmatrix} S_1^{(1)}, & S_2^{(1)}, & S_3^{(1)} \\ S_1^{(2)}, & S_2^{(2)}, & S_3^{(2)} \\ S_1^{(3)}, & S_2^{(3)}, & S_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Ihre Invarianteneigenschaft erhellt daraus, dafs bei der Transformation die Ableitungen $S_1^{(i)}$, $S_2^{(i)}$, $S_3^{(i)}$ die transponirten Substitutionen von denen der Variabeln x_i erleiden (§ 355).

Da die Ableitungen die Variabeln linear enthalten, stellt $\mathbf{J} = 0$ eine covariante Curve dritter Ordnung, *die Jacobi'sche Curve der drei Kegelschnitte* dar. *Diese ist der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf drei gegebene Kegelschnitte* S_1, S_2, S_3 *sich in einem Punkte schneiden.* Denn $\mathbf{J} = 0$ entsteht durch die Elimination der x_i aus den Gleichungen der Polaren $S_1^{(1)}x_1 + S_1^{(2)}x_2 + S_1^{(3)}x_3 = 0$, etc. Durch denselben Punkt geht aber dann auch die Polare von x_i in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0 \qquad (\S\ 283).$$

Also hat $\mathbf{J} = 0$ genau dieselbe geometrische Bedeutung für irgend drei Kegelschnitte des durch S_1, S_2, S_3 bestimmten Kegelschnittnetzes. In der Tat, bilden wir für die Kegelschnitte von den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$; $\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3''$ die Determinante der Ableitungen, so ist dieselbe gleich $\mathbf{J}$ multiplicirt mit der Determinante der neun Parameter.

Fassen wir die drei Kegelschnitte als Enveloppen, so bestimmen sie ein Kegelschnittgewebe

$$\mu_1 \Sigma_1 + \mu_2 \Sigma_2 + \mu_3 \Sigma_3 = 0 \qquad (\S\ 283).$$

Die Jacobi'sche Determinante dreier Enveloppen dieses Systems definirt durch ihr Verschwinden eine Curve dritter Classe

$$I \equiv \begin{vmatrix} \Sigma_1^{(1)}, & \Sigma_2^{(1)}, & \Sigma_3^{(1)} \\ \Sigma_1^{(2)}, & \Sigma_2^{(2)}, & \Sigma_3^{(2)} \\ \Sigma_1^{(3)}, & \Sigma_2^{(3)}, & \Sigma_3^{(3)} \end{vmatrix} = 0,$$

die Jacobi'sche Curve der drei Enveloppen, oder des Gewebes. Sie ist dualistisch *die Enveloppe der Geraden, deren Pole in Bezug auf die Kegelschnitte des Gewebes in einer Geraden liegen.*

373. **Cubische Covariante des Kegelschnittpaares.** Die Einführung der Jacobi'schen Determinante ist schon in der Theorie von zwei Kegelschnitten erforderlich. Denn ein Kegelschnittpaar S_1, S_2 bestimmt mit seiner quadratischen Covariante F ein Kegelschnittnetz, wenn auch besonderer Art; dieses besitzt eine cubische Covariante, welche eine neue

Simultancovariante von S_1, S_2 ist. Die drei Kegelschnitte S_1, S_2, F haben aber ein gemeinsames Polardreieck, das schon als covariant zu characterisiren war (§ 371).

Die Jacobi'sche Curve eines Netzes mit gemeinsamem Polardreieck besteht aus den drei Seiten desselben. Denn sind S_1, S_2, S_3 Summen von je drei Quadraten, so sind ihre partiellen Ableitungen $S_1^{(i)}$, $S_2^{(i)}$, $S_3^{(i)}$ proportional zu x_i, also ihre Determinante proportional zu $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, nämlich

$$\mathsf{J} = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)\, x_1 x_2 x_3.$$

Demnach bestimmt man analytisch das zu zwei Kegelschnitten $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ gemeinsame Polardreieck auch als die Jacobi'sche Curve $\mathsf{J} = 0$ des speciellen Netzes, welches mit ihnen die Covariante $F = 0$ bestimmt.

Nun können wir aber die Gleichungen der Dreiecksseiten direct berechnen. Denn nach § 357 können wir mit $-a_1, -a_2, -a_3$ als den Wurzeln von $\Delta_1 + \Theta_1 k + \Theta_2 k^2 + \Delta_2 k^3 = 0$ die gegebenen Curvengleichungen auf die Formen bringen:

$$S_1 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2, {}^{*)} \quad S_2 = a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + a_3 x_3'^2, \quad \text{wo}$$

$$F = a_1 (a_2 + a_3) x_1'^2 + a_2 (a_3 + a_1) x_2'^2 + a_3 (a_1 + a_2) x_3'^2.$$

Aus diesen drei Gleichungen können sofort $x_1'^2$, $x_2'^2$, $x_3'^2$ als Functionen von S_1, S_2, F berechnet werden, nämlich

$$(a_i - a_j)(a_k - a_i) x_i'^2 = F - a_j a_k S_1 - a_i S_2.$$

Das Product dieser drei Gleichheiten ergibt links das Quadrat der Jacobi'schen Determinante, rechts eine Function der drei Symbole, deren Coefficienten in den a_1, a_2, a_3 symmetrisch, also durch die Invarianten Δ_1, Θ_1, Θ_2, Δ_2 (§ 357) rational darstellbar sind. Man erhält so *eine zwischen den Covarianten bestehende Identität*

$$\begin{aligned} \mathsf{J}^2 = F^3 - F^2 \{\Theta_2 S_1 + \Theta_1 S_2\} + F\{(\Delta_2 \Theta_1 S_1^2 + \Delta_1 \Theta_2 S_2^2) \\ + (\Theta_1 \Theta_2 - 3\Delta_1 \Delta_2) S_1 S_2\} - \Delta_1 \Delta_2 \{\Delta_2 S_1^3 + \Delta_1 S_2^3\} \\ + S_1 S_2 \{\Delta_2 (2\Delta_1 \Theta_2 - \Theta_1^2) S_1 + \Delta_1 (2\Delta_2 \Theta_1 - \Theta_2^2) S_2\}. \end{aligned}$$

Aus den Contravarianten

---

*) Dabei ist vorausgesetzt, dafs die Discriminante von S_1 Eins ist; sonst mufs S_1 und S_2 durch $\sqrt[3]{\Delta_1}$ zuerst dividirt werden, wofür jedoch auch, ohne Anwendung von S_1, S_2, nachher F durch Δ_1 dividirt werden kann.

$$\Sigma_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad \Sigma_2 = a_2 a_3 \xi_1^2 + a_3 a_1 \xi_2^2 + a_1 a_2 \xi_3^2,$$
$$\Phi = (a_2 + a_3)\xi_1^2 + (a_3 + a_1)\xi_2^2 + (a_1 + a_2)\xi_3^2$$

geht als die Determinante der Ableitungen hervor

$$I = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)\xi_1 \xi_2 \xi_3.$$

Die Jacobi'sche Curve eines Gewebes mit gemeinsamem Polardreieck besteht aus den drei Ecken desselben. Zwischen diesen vier Contravarianten besteht eine zur vorigen analoge Identität.

Endlich haben drei Kegelschnitte eines Büschels eine identisch verschwindende Jacobi'sche Determinante, denn eine Zeile derselben ist ein lineares Aggregat der beiden andern. Auch die Umkehrung ist gültig.

B. 1) Die im Text gegebene Methode, die x_i zu berechnen, kann von neuem zur Transformation zweier Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polardreieck dienen (§ 371). So findet man die gleichzeitigen Normalformen der Gleichungen. Mit Benutzung der Covariante ψ in § 369, 3 erhält man die Identität einfacher $J^2 = \psi^3 + 3\psi H(S_2, -S_1) + Q(S_2, -S_1)$. (Vgl. für die Bezeichnung § 371, 2 und $\varkappa : \lambda = S_2 : - S_1$ § 356 Schlufs.)

Der covariante Kegelschnitt $\psi = 0$ wird von jedem der drei harmonischen Kegelschnitte des Büschels (§ 371, 3) in einer Seite des gemeinsamen Tripels doppelt berührt.

2) Drei Kreise besitzen einen Jacobi'schen Kegelschnitt, welcher selbst ein Kreis und zwar der *Orthogonalkreis der drei Kreise* ist (§ 128). Die Gleichung des Orthogonalkreises gibt den Satz: *Für jeden Punkt des Orthogonalkreises ist die Summe der Producte Null, welche die Längen der von ihm ausgehenden Tangenten der drei Kreise mit den Flächen der Dreiecke bestimmen, welche den Punkt zur Spitze und die Centrallinie der beiden andern Kreise bez. zur Basis haben.*

3) Es ist möglich, vier Kegelschnitte so zu bestimmen, dafs sie einen gegebenen Kegelschnitt $S = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Geraden $L = 0$ und überdies einen andern Kegelschnitt $S' = 0$ berühren. Denn der Schnitt des Jacobi'schen Kegelschnittes mit $S' = 0$ bestimmt die Berührungspunkte.

Wenn insbesondere die gegebenen Kegelschnitte als ein Kegelschnitt, ein Kreis und die doppelt zählende unendlich entfernte Gerade angenommen werden, so geht die Jacobi'sche Curve durch die *Fufspunkte der Normalen, welche aus dem Centrum des Kreises an den gegebenen Kegelschnitt gezogen werden können.*

4) Die Jacobi'sche Curve des Systems $x_1^2 - x_2^2 = 0, x_1^2 - x_3^2 = 0,$

$a_x = 0$ oder der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf die beiden Linienpaare sich in der Geraden a_i schneiden, ist

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0;$$

d. h. ein dem Fundamentaldreieck umgeschriebener Kegelschnitt.[147]) Er ist auch der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf die Kegelschnitte des durch $(x_1^2 - x_2^2) + k(x_1^2 - x_3^2) = 0$ bestimmten Büschels mit der Geraden a_i zusammenfallen. Die beiden Linienpaare bilden ein Viereck, für welches das Fundamentaldreieck das Diagonaldreieck ist. Die Gerade a_i schneidet die sechs Seiten des Vierecks in je einem Punkt, dessen in Bezug auf die entsprechenden Ecken harmonisch conjugirter dem Ortskegelschnitt angehört. Auch gehören zu demselben die Doppelpunkte der Involution, welche in der Geraden durch die Gegenseitenpaare des Vierecks, also auch durch das Kegelschnittbüschel erzeugt wird; sie sind die Pole für die die Gerade berührenden Kegelschnitte des Büschels. Durch dieselben gehen je vier Kegelschnitte, welche drei Eckpunkte des Vierecks enthalten und diese berühren sämmtlich den Ortskegelschnitt, den man als den *Neun-* oder eigentlich *Elf-Punkte-Kegelschnitt der Geraden in Bezug auf das Viereck oder das Büschel* bezeichnen kann. Man zeigt dies, indem man für die Gleichung eines solchen Kegelschnittes

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 a_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 + a_x \,.\, b_x = 0$$

nachweist, dafs die zweite Schnittsehne mit jenem ihn berührt. Die entsprechende Bedingung ist

$$(a_1 b_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 b_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 b_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ein dem Dreiseit $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ eingeschriebener Kegelschnitt als von der Gleichungsform

$$l^2(x_2 + x_3)^2 + m^2(x_3 + x_1)^2 + n^2(x_1 + x_2)^2 - 2mn(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) \\ - 2nl(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) - 2lm(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = 0$$

ist aber eben unter dieser Bedingung mit dem der vorigen Gleichung identisch. Ebenso für die andern Dreiecke, *so dafs der Elf-Punkte-Kegelschnitt alle die sechszehn Kegelschnitte berührt, welche den vier Dreiecken des Vierecks eingeschrieben sind.*

Wenn die Gerade unendlich fern ist und die Gegenseitenpaare des Vierecks rechtwinklig sind, so sind die Doppelpunkte der Involution in der Geraden die Kreispunkte; alle Kegelschnitte der vorigen Betrachtung sind Kreise, die harmonischen Punkte werden zu den Seitenmitten, und man hat das *System des Feuerbach'schen Kreises.*

5) Reduction auf die Normalformen für

$$3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y = 0, \quad 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2 = 0.$$

Man beginnt zweckmäſsig mit der Berechnung der Coefficienten der Tangentialgleichung A_{11}, A_{22} etc.; sie sind $-4, -1, 18; -3, 3, -2$ für die erste und $-16, -19, -9; 21, 24, -14$ für die zweite. Dann ergeben sich die Invarianten

$$\Delta_1 = -9, \quad \Theta_1 = -54, \quad \Theta_2 = -99, \quad \Delta_2 = -54,$$

und die Wurzeln der cubischen Gleichung liefern $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Man berechnet sodann

$$F = -9(23x^2 - 50xy + 44y^2 - 18x + 12y - 4)$$

und schreibt endlich

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y, \\ x'^2 + 2y'^2 + 3z'^2 &= 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2, \\ 5x'^2 + 8y'^2 + 9z'^2 &= 23x^2 - 50xy + 44y^2 - 18x + 12x - 4; \end{aligned}$$

diese Gleichungen aber liefern durch die Combinationen

$$6S_1 + S_2 - F, \quad F - 3S_1 - 2S_2, \quad 2S_1 + 3S_2 - F$$

bez. die Substitutionen

$$x'^2 = (3y + 1)^2, \quad y'^2 = (2x - y)^2, \quad z'^2 = -(x + y + 1)^2.$$

374. **Das vollständige Invariantensystem des Kegelschnittpaares** besteht nun aus den vier Invarianten Δ_1, Δ_2, Θ_1, Θ_2 (§ 357), den vier Covarianten S_1, S_2, F, J und den vier Contravarianten Σ_1, Σ_2, Φ, I, in dem Sinne, daſs sich jede Invariante, Covariante und Contravariante des Paares als eine ganze Function der obigen zwölf Formen mit numerischen Coefficienten ausdrücken läſst.

Zu ihnen treten *gemischte* oder *Zwischenformen* (§ 365), welche beide Reihen der Coordinaten enthalten und als Covarianten des Systems der beiden Kegelschnitte S_1, S_2 mit der Geraden $\xi_x = 0$ angesehen werden können. So ist die Jacobi'sche Determinante desselben

$$N = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ S_1^{(1)}, & S_1^{(2)}, & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)}, & S_2^{(2)}, & S_2^{(3)} \end{vmatrix}$$

die linke Seite der Gleichung für den Ort der Punkte, deren Polaren in beiden Kegelschnitten sich auf der Geraden schneiden. Für die Normalformen ist

$$N = \xi_1(a_2 - a_3)x_2x_3 + \xi_2(a_3 - a_1)x_3x_1 + \xi_3(a_1 - a_2)x_1x_2.$$

Man erhält die Reciprocalform N, die die Verbindungslinie der Pole von ξ_i in Bezug auf $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ ausdrückt, auf die nämliche Weise aus Σ_1 und Σ_2, nämlich für die Normalformen

$$\mathsf{N} = a_1 \xi_2 \xi_3 (a_2 - a_3) x_1 + a_2 \xi_3 \xi_1 (a_3 - a_1) x_2 + a_3 \xi_1 \xi_2 (a_1 - a_2) x_3.$$

Der Geraden ξ_i entsprechen ferner zwei begleitende oder associirte Gerade $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$, von denen die erste die Polare in Bezug auf $S_2 = 0$ von ihrem Pol für $S_1 = 0$ und die zweite die Polare in Bezug auf $S_1 = 0$ von ihrem Pol für $S_2 = 0$ ist. Für die Normalformen sind sie

$$K_1 = a_1 \xi_1 x_1 + a_2 \xi_2 x_2 + a_3 \xi_3 x_3, \quad K_2 = a_2 a_3 \xi_1 x_1 + a_3 a_1 \xi_2 x_2 + a_1 a_2 \xi_3 x_3.$$

Die Jacobi'schen Determinanten von K_1, S_1, ξ_x und von K_2, S_2, ξ_x und ihre Reciprocalformen liefern weitere vier Zwischenformen, welche mit den vorigen *das vollständige System*[148]) von solchen Formen bilden, durch welche mit Hilfe der vorher erwähnten Formen alle andern gemischten Formen ausgedrückt werden können. Für die Normalformen sind sie bez.

$$\xi_2 \xi_3 (a_2 - a_3) x_1 + \xi_3 \xi_1 (a_3 - a_1) x_2 + \xi_1 \xi_2 (a_1 - a_2) x_3,$$
$$\xi_2 \xi_3 a_1^2 (a_2 - a_3) x_1 + \xi_3 \xi_1 a_2^2 (a_3 - a_1) x_2 + \xi_1 \xi_2 a_3^2 (a_1 - a_2) x_3;$$
$$\xi_1 a_1 (a_2 - a_3) x_2 x_3 + \xi_2 a_2 (a_3 - a_1) x_3 x_1 + \xi_3 a_3 (a_1 - a_2) x_1 x_2,$$
$$\xi_1 a_2 a_3 (a_2 - a_3) x_2 x_3 + \xi_2 a_3 a_1 (a_3 - a_1) x_3 x_1 + \xi_3 a_1 a_2 (a_1 - a_2) x_1 x_2.$$

375. **Die Jacobi'sche Curve des Netzes** *ist auch der Ort der Doppelpunkte der Linienpaare desselben.* Denn $\mathsf{J} = 0$ ist auch die Bedingung dafür, dafs der Punkt x_i Doppelpunkt in $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$ sei, d. h. dafs die Ableitungen

$$\lambda_1 S_1^{(1)} + \lambda_2 S_2^{(1)} + \lambda_3 S_3^{(1)} = 0, \quad \lambda_1 S_1^{(2)} + \lambda_2 S_2^{(2)} + \lambda_3 S_3^{(2)} = 0,$$
$$\lambda_1 S_1^{(3)} + \lambda_2 S_2^{(3)} + \lambda_3 S_3^{(3)} = 0$$

gleichzeitig verschwinden. Die Covariante J entspricht so der binären Covariante der Doppelpunkte einer quadratischen Involution (§ 343).

Punkte A und B der Curve werden einander in Bezug auf das Netz dadurch paarweise zugeordnet, dafs sie in Bezug auf alle Kegelschnitte desselben conjugirte Pole sind. Denn gehen die Polaren von A durch B, so schneidet die Verbindungs-

gerade AB alle Curven $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$ in Punktepaaren der Involution mit den Doppelpunkten A, B. Letztere sind also die Punkte, in welchen Kegelschnitte des Netzes die Gerade AB berühren. In einem Netze mit gemeinsamem Polardreieck sind daher die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte die Strahlen durch die Ecken desselben (§ 314).

Jede Verbindungsgerade zugeordneter Punkte A, B gehört einem Linienpaare des Netzes an, nämlich demjenigen, dessen Doppelpunkt ihr dritter Schnittpunkt C mit der Jacobi'schen Curve ist. Denn A, B, C sind Doppelpunkte von Linienpaaren, A und B sind Berührungspunkte der Geraden mit allen berührenden Netzcurven, also mufs das Linienpaar vom Doppelpunkt C die Gerade AB, um sie in A oder B zu berühren, als Teil enthalten, während die Paare von den Doppelpunkten A bez. B sie nicht enthalten.

Die Jacobi'sche Curve dritter Ordnung kann in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen. Dies tritt erstens ein, wenn *die Kegelschnitte des Netzes durch zwei feste Punkte* gehen. Denn die gemeinsame Sehne sondert sich als ein Teil ab, da die Paare ihrer Involution mit den festen Punkten als Doppelpunkten conjugirte Pole sind. Auch der Jacobi'sche Kegelschnitt geht durch die festen Punkte, denn da jeder derselben in Bezug auf das Netz sich selbst conjugirt ist, so darf eine durch ihn gehende Gerade mit der gesammten Jacobi'schen Curve nur noch *einen* andern Schnittpunkt haben. (§ 373, 2.)

Dieselbe Degeneration der Curve dritter Ordnung tritt ein, wenn *das Netz mit einer Doppelgeraden* $L^2 = 0$ ausgestattet ist, indem sich offenbar L als ein Factor von $\mathbf{J}$ absondert. Ist noch eine zweite Doppelgerade vorhanden, so zerfällt endlich auch der Kegelschnitt, d. h. die Jacobi'sche Curve besteht aus drei Geraden. Dies ist der Fall des Netzes mit gemeinsamem Polardreieck, wo in der Tat die Seiten Doppelgerade sind.

B. 1) Die allgemeine Gleichung der Jacobi'schen Curve ist

$$(a_{11} a_{13}' a_{12}'') x_1^3 + (a_{22} a_{12}' a_{23}'') x_2^3 + (a_{33} a_{23}' a_{13}'') x_3^3$$
$$- \{(a_{11} a_{22}' a_{13}'') + (a_{11} a_{12}' a_{23}'')\} x_1^2 x_2 - \{(a_{33} a_{11}' a_{12}'')$$

$$+ (a_{11} a_{23}' a_{13}'')\} x_1^2 x_3 - \{(a_{11} a_{22}' a_{23}'') + (a_{22} a_{13}' a_{12}'')\} x_2^2 x_1$$
$$- \{(a_{22} a_{33}' a_{12}'') + (a_{22} a_{23}' a_{13}'')\} x_2^2 x_3 - \{(a_{33} a_{11}' a_{23}'')$$
$$+ (a_{33} a_{13}' a_{12}'')\} x_3^2 x_1 - \{(a_{22} a_{33}' a_{13}'') + (a_{33} a_{12}' a_{23}'')\} x_3^2 x_2$$
$$- \{(a_{11} a_{22}' a_{33}'') + 2 (a_{23} a_{13}' a_{12}'')\} x_1 x_2 x_3 = 0;$$

darin bezeichnen $(a_{11}\, a_{13}'\, a_{12}'')$ etc., Determinanten, welche man aus diesen Elementen der positiven Diagonale leicht bildet (vgl. § 86).

2) Man soll einen Kegelschnitt durch vier feste Punkte so bestimmen, dafs er einen gegebenen Kegelschnitt $S = 0$ berührt.

Wir denken die vier festen Punkte als Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ gegeben und erkennen aus der Bedingung des § 358 für die Berührung von zwei Kegelschnitten $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, indem wir in ihr $a_{ii} + kb_{ii}$ für a_{ii} substituiren, dafs das Problem sechs Lösungen hat; denn dieselbe liefert eine Gleichung vom sechsten Grade in k. Die Jacobi'sche Curve der drei Kegelschnitte bestimmt mit $S = 0$ die sechs Punkte, in welchen dieser von den sechs Kegelschnitten berührt wird, die der Aufgabe genügen; denn die Polare des Berührungspunktes in Bezug auf $S = 0$ geht, weil sie auch die Polare in Bezug auf einen der Kegelschnitte $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$ ist, durch den Schnittpunkt der Polaren in Bezug auf $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.

3) Die Jacobi'sche oder Hermite'sche Curve für das specielle Kegelschnittgewebe

$$\lambda(a\xi + b\eta + 1)^2 + \mu(\xi^2 + \eta^2) + \nu(a_1\xi + b_1\eta + 1)(a_2\xi + b_2\eta + 1) = 0$$

ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt.[149])

4) Die Jacobi-Hermite'sche Curve von Σ, Ω (§ 330) und Π für $\Pi = A_{11}\xi_1\xi_1' + \cdots + A_{23}(\xi_2\xi_3' + \xi_2'\xi_3) + \cdots$ (§ 322) liefert die Parabel des § 297, 2, welche die Gerade ξ_i, die Axen des Kegelschnittes und seine Normalen in ihren Schnittpunkten mit jener berührt.

376. **Cayley'sche Curve des Netzes.** Zu einem gegebenen Netze existirt nach § 362 ein harmonisches Kegelschnittgewebe von der Art, dafs jeder Kegelschnitt des erstern Polardreiecken der letztern umgeschrieben ist. Die beiden Systeme sind contravariant, da sie dualistisch und projectivisch verbunden sind. Sind $\Sigma_{(1)} = 0$, $\Sigma_{(2)} = 0$, $\Sigma_{(3)} = 0$ irgend drei das Gewebe bestimmende Kegelschnitte, so ist ihre Jacobi'sche Enveloppe durch das Verschwinden der Determinante ihrer Ableitungen gegeben (§ 372). Der Jacobi'schen Curve dualistisch entsprechend, ist *diese Curve dritter Classe die Enveloppe der Doppellinien der dem Gewebe angehörigen Punktepaare.* Für das gegebene Netz S_1, S_2, S_3 ist sie eine

contravariante Curve und zwar wird sie als *die Cayley'sche Curve* $\Gamma = 0$ *des Netzes* bezeichnet*).

Die Punktepaare des Gewebes sind als Kegelschnitte, welche denen des Netzes harmonisch eingeschrieben sind, Paare von in Bezug auf das Netz conjugirten Polen, d. h. sie liegen auf der Jacobi'schen Curve desselben (§ 375). *Die Cayley'sche Curve des Netzes ist die Enveloppe der Verbindungsgeraden der zugeordneten Punkte auf der Jacobi'schen Curve.* Also ist sie projectivisch definirt als die Enveloppe der Geraden, welche die Kegelschnitte des Netzes in Punktepaaren einer Involution schneiden. Ihre Gleichung ergibt sich hieraus unmittelbar, indem man aus jeder der drei Gleichungen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ mittelst $\xi_x = 0$ eine der Variabeln z. B. x_3 eliminirt und nach § 344 die Determinante der Coefficienten von $x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$ gleich Null setzt, um die involutorische Lage der drei Punktepaare auszudrücken. Die Entwickelung lautet nach Division durch ξ_3^3

$$(a_{22} b_{33} c_{23}) \xi_1^3 + \cdots + \{2(a_{33} b_{12} c_{23}) - (a_{22} b_{33} c_{13})\} \xi_1^2 \xi_2 + \cdots \cdot \cdot + \{(a_{11} b_{22} c_{33}) - 4(a_{23} b_{13} c_{12})\} \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0.$$

Man nennt diese Curve auch *die Hermite'sche Curve des Netzes, insofern sie die Enveloppe aller Linienpaare desselben ist.* Ihre Gleichung entsteht somit auch aus der Forderung, dafs

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 \equiv \xi_x \cdot \eta_x,$$

oder aus den sechs Coefficientenrelationen

$$\lambda_1 a_{ii} + \lambda_2 b_{ii} + \lambda_3 c_{ii} = \xi_i \eta_i,$$
$$2(\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik} + \lambda_3 c_{ik}) = \xi_i \eta_k + \eta_i \xi_k,$$

durch Elimination der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ in Determinantenform

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33}, & 2a_{23}, & 2a_{31}, & 2a_{12} \\ b_{11}, & b_{22}, & b_{33}, & 2b_{23}, & 2b_{31}, & 2b_{12} \\ c_{11}, & c_{22}, & c_{33}, & 2c_{23}, & 2c_{31}, & 2c_{12} \\ \xi_1, & 0, & 0, & 0, & \xi_3, & \xi_2 \\ 0, & \xi_2, & 0, & \xi_3, & 0, & \xi_1 \\ 0, & 0, & \xi_3, & \xi_2, & \xi_1, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

*) Man hat diese Contravariante Γ des Netzes und die Jacobi'sche Enveloppe der drei Kegelschnitte S_1, S_2, S_3 wol zu unterscheiden; $\Sigma_{(1)}$, $\Sigma_{(2)}$, $\Sigma_{(3)}$ sind nicht die Tangentialformen zu jenen.

Die beiden Geraden eines Linienpaares sind an der Hermite'schen Curve in demselben Sinne zugeordnet, wie die Punkte auf der Jacobi'schen Curve.

Ersetzen wir in der letzten Gleichung ξ_i, a_{ik} etc. durch x_i, A_{ik} etc., so erhalten wir den Ort des Punktes, von dem aus an die Kegelschnitte des contravarianten Gewebes Tangentenpaare einer Involution gehen, d. h. die Cayley'sche Curve $\mathbf{C}=0$ des Kegelschnittgewebes $\mu_1\Sigma_{(1)}+\mu_2\Sigma_{(2)}+\mu_3\Sigma_{(3)}=0$, welche offenbar zugleich die Jacobi'sche Curve $\mathbf{J}=0$ des ursprünglichen Netzes ist.

Zu diesen aus der Jacobi'schen Determinante entspringenden Covarianten und Contravarianten ergeben sich durch die Bildung der Reciprocalgleichung des Netzes nur die früheren Co- und Contravarianten der Paare S_2, S_3; S_3, S_1; S_1, S_2, denn jene lautet

$$\lambda_1^2\Sigma_1+\lambda_2^2\Sigma_2+\lambda_3^2\Sigma_3+\lambda_2\lambda_3\Phi_1+\lambda_3\lambda_1\Phi_2+\lambda_1\lambda_2\Phi_3=0.$$

Ganz ebenso sind die Covarianten F_1, F_2, F_3 einzuführen.

Man kann dann wieder (vgl. § 373) mittelst S_1, Δ_1 etc. die oben angeführte Definition von $\mathbf{C}=0$ ausdrücken und erhält so *die allgemeine Relation zwischen den Covarianten dreier Kegelschnitte:*

$$\mathbf{J}^2=4\Delta_1\Delta_2\Delta_3S_1S_2S_3+F_1F_2F_3-\Delta_1S_1F_1^2-\Delta_2S_2F_2^2-\Delta_3S_3F_3^2.$$

377. **Invarianten dreier Kegelschnitte.** Um Invarianten des Curventripels zu finden, bilden wir wiederum die Discriminante ihres Netzes $\lambda_1S_1+\lambda_2S_2+\lambda_3S_3=0$. Ihre Entwickelung ist zu schreiben

$$\lambda_1^3\Delta_1+\lambda_2^3\Delta_2+\lambda_3^3\Delta_3+\lambda_1^2\lambda_2\Theta_{112}+\lambda_2^2\lambda_3\Theta_{223}+\lambda_3^2\lambda_1\Theta_{331}$$
$$+\lambda_1^2\lambda_3\Theta_{113}+\lambda_2^2\lambda_1\Theta_{221}+\lambda_3^2\lambda_2\Theta_{332}+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Theta_{123},$$

wo die Coeffficienten Θ_{iik} von $\lambda_i^2\lambda_k$ die früheren Invarianten der drei Paare von Kegelschnitten sind. Dagegen entsteht dadurch, dafs man in der Discriminante Δ_1 jedes Glied $a_{11}a_{22}a_{33}$, etc. durch eine Summe wie

$$a_{11}b_{22}c_{33}+a_{11}c_{22}b_{33}+b_{11}c_{22}a_{33}+b_{11}a_{22}c_{33}$$
$$+c_{11}a_{22}b_{33}+c_{11}b_{22}a_{33},\ \text{etc.}$$

ersetzt, die neue *Simultaninvariante* Θ_{123} *des Tripels.*

Bilden wir ebenso die Discriminante des durch dieselben drei Kegelschnitte bestimmten Gewebes $\mu_1\Sigma_1+\mu_2\Sigma_2+\mu_3\Sigma_3=0$, so ist der Θ_{123} entsprechende Coefficient des Gliedes mit $\mu_1\mu_2\mu_3$ *eine Invariante* Θ'_{123} *vom zweiten Grade in den Coefficienten jedes Kegelschnittes,* welche nicht in Function der vorangehenden Invarianten ausgedrückt werden kann.

Unter den aus den bisherigen zusammengesetzten Invarianten befindet sich insbesondere eine, welche zugleich eine Invariante der Jacobi'schen Covariante ist. Sie mag hier nur angegeben werden[150])

$$T=\Theta_{123}^2-4(\Theta_{122}\Theta_{133}+\Theta_{211}\Theta_{233}+\Theta_{311}\Theta_{322})+12\Theta'_{123}.$$

Jedoch genügen jene noch nicht zur rationalen Darstellung *aller* Invarianten.

So kann man die Discriminante der im Netz oder im Gewebe enthaltenen *zerfallenden* Kegelschnitte bilden, deren Verschwinden ausdrückt, dafs sich unter den Kegelschnitten des Systems doppelt zählende Linien bez. Punkte befinden. Diese Invariante M erhalten wir, indem wir die Bedingung ausdrücken, dafs $\lambda_1 S_1+\lambda_2 S_2+\lambda_3 S_3$ ein vollständiges Quadrat wird, oder also, dafs die in den Parametern quadratische Reciprocalform (§ 323) identisch verschwinde. Bezeichnen wir die Coefficienten von $\xi_i\xi_k$ in den Contravarianten Φ_1, Φ_2, Φ_3 mit $\mathfrak{A}_{ik}$, $\mathfrak{B}_{ik}$, $\mathfrak{C}_{ik}$ bez. so ist das Resultat der Elimination der sechs Gröfsen $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_2\lambda_3, \ldots$ zwischen den durch das Nullsetzen der Coefficienten der Reciprocalform entstehenden sechs Gleichungen

$$M=\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{22}, & A_{33}, & A_{23}, & A_{31}, & A_{12}\\ B_{11}, & B_{22}, & B_{33}, & B_{23}, & B_{31}, & B_{12}\\ C_{11}, & C_{22}, & C_{33}, & C_{23}, & C_{31}, & C_{12}\\ \mathfrak{A}_{11}, & \mathfrak{A}_{22}, & \mathfrak{A}_{33}, & \mathfrak{A}_{23}, & \mathfrak{A}_{31}, & \mathfrak{A}_{12}\\ \mathfrak{B}_{11}, & \mathfrak{B}_{22}, & \mathfrak{B}_{33}, & \mathfrak{B}_{23}, & \mathfrak{B}_{31}, & \mathfrak{B}_{12}\\ \mathfrak{C}_{11}, & \mathfrak{C}_{22}, & \mathfrak{C}_{33}, & \mathfrak{C}_{23}, & \mathfrak{C}_{31}, & \mathfrak{C}_{12}\end{vmatrix}.$$

Demnach characterisirt die Bedingung $M=0$ ein Netz von *besonderer* Art.

378. **Netzkegelschnitte durch einen Punkt** bieten ein Beispiel der Invariantenrelationen. Dabei zeigt sich, dafs

einige der Eigenschaften des Systems von drei Kegelschnitten durch Anwendung von Vierercoordinaten (§ 317) mit Vorteil untersucht werden können. Es ist nämlich möglich, sie auf vier Linien $x_1 = 0, \ldots, x_4 = 0$, zwischen deren Gleichungen die Identität $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ besteht, so zu beziehen, dafs ihre Gleichungen die Form

$$S_1 \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$
$$S_2 \equiv b_1 x_1^2 + \text{etc.} = 0, \quad S_3 \equiv c_1 x_1^2 + \text{etc.} = 0$$

annehmen, und zwar auf unendlich viele Arten. Denn jede der eben geschriebenen Gleichungen enthält drei Constanten explicite und jede der linearen Functionen x_i zwei Constanten implicite, so dafs siebenzehn Constanten zur Disposition sind, während S_1, S_2, S_3 zusammen nur fünfzehn unabhängige Constanten enthalten.

Wir suchen nach diesen Voraussetzungen die Bedingung auf, unter welcher die drei Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben. Indem man die Gleichungen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ nach $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ auflöst und die vier Determinanten einführt

$$A_1 = (a_2 b_3 c_4), \quad A_2 = (a_4 b_3 c_1), \quad A_3 = (a_4 b_1 c_2), \quad A_4 = (a_2 b_1 c_3),$$

findet man $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ proportional zu A_1, A_2, A_3, A_4 und erhält durch Substitution in $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ die fragliche Bedingung in der Form

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} + \sqrt{A_4} = 0 \qquad \text{oder}$$
$$(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 - 2A_2A_3 - 2A_3A_1 - 2A_1A_2 - 2A_1A_4$$
$$- 2A_2A_4 - 2A_3A_4)^2 = 64 A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist das Quadrat der in § 377 angegebenen Invariante T. Die rechte Seite ist die Invariante M, welche in den Coefficienten der Gleichung jedes Kegelschnittes vom Grade vier ist. Man erkennt daraus, dafs das System $S + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$ in vier Arten als vollständiges Quadrat bestimmt werden kann; denn wenn wir die Invariante M für $S + \lambda_1 S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ der Null gleich setzen, so haben wir zur Bestimmung von λ eine biquadratische Gleichung. (Vgl. § 360, 3.)

Zwanzigstes Kapitel.

Analytische Grundlagen der Metrik.

379. **Metrische Relationen.** Die Untersuchungen über die allgemeine Gleichung zweiten Grades und über die Theorie der Invarianten und Covarianten in den letzten drei Kapiteln haben zur Entwickelung der Methode gedient, durch welche auf rein analytischem Wege geometrische Wahrheiten gefunden werden können. Die Eigenschaften der homogenen Formen und das Instrument der Determinanten verleihen ihren Ergebnissen jenen Charakter algebraischer Allgemeinheit, der vielleicht der unterscheidende Hauptcharacter der neueren Forschungen genannt werden darf. Was den Kegelschnitt im Allgemeinen betrifft, ist *so* zu erkennen; aber die Eigenthümlichkeiten jener speciellen Kegelschnitte, welche, wie die Parabel, der Kreis, die gleichseitige Hyperbel durch besondere metrische Relationen characterisirt sind, treten in dieser Discussion wenig hervor. Überhaupt sind die metrischen Relationen gegen die allgemein projectivischen zurückgetreten. Im Folgenden ist darum zunächst *nachzuweisen, wie die vorigen Untersuchungen auch zu metrischen Relationen führen.*

Die homogenen Formeln lassen sich, wie wir mehrfach gesehen haben (§ 371 Schlufs, § 85 etc.), ohne weiteres durch Einführung nicht-homogener Coordinaten metrisch specialisiren. Nicht ebenso unmittelbar bieten sich die Äquivalente zu gewissen für Gleichungen in Cartesichen Coordinaten wohlbekannten Functionen bei Anwendung trimetrischer Coordinaten. Zu ihrer leichten Gewinnung hilft die Theorie der Invarianten, sobald es gelingt, *die metrischen Relationen in*

Beziehungen der gegebenen Elemente zum Unendlichfernen, insbesondere zu den absoluten Richtungen umzusetzen. Zur Erläuterung der Methode greifen die folgenden Paragraphe auf die Theorie der Gattungskriterien und Focaleigenschaften zurück.

380. **Homogene Gattungskriterien.** In Cartesischen Coordinaten lautet die Tangentialgleichung des Paares der absoluten Richtungen $\xi^2 + \eta^2 = 0$. Von der Beziehung eines gegebenen Kegelschnittes zu diesem speciellen hängt die Gattung desselben ab. Wir betrachten also die Invariantentheorie einer Kegelschnittschaar $\Sigma_1 + k\Sigma_2 = 0$ in der Absicht, Σ für Σ_1 und $\xi^2 + \eta^2$ für Σ_2 zu setzen, d. h. speciell confocale Kegelschnitte $\Sigma + k(\xi^2 + \eta^2) = 0$ (§ 250) zu betrachten.

Die Discriminante der Schaar wird (§ 361)

$$\Delta_1^2 + k\Delta_1\Theta_2 + k^2\Delta_2\Theta_1 + k^3\Delta_2^2,$$

speciell für die confocale Schaar aber

$$\Delta^2 + k\Delta(a_{11} + a_{22}) + k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Denn in $\Sigma_2 = \xi^2 + \eta^2$ und der Reciprocalform z^2 sind alle Coefficienten Null bis auf $B_{11} = B_{22} = b_{33} = 1$; also ist $\Delta_2 = 0$, $\Theta_1 = A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $\Theta_2 = a_{11} + a_{22}$, der Coefficient von k^2 ist aber in diesem Specialfall $B_{11}B_{22}A_{33}$ und die Zerlegung in $\Delta_2\Theta_1$ nicht gültig. Die Reduction des Ausdrucks auf den zweiten Grad in k zeigt an, dafs im umgeschriebenen Tangentenvierseit das Punktepaar $\xi^2 + \eta^2 = 0$ selbst ein Gegeneckenpaar ist.

Hier erkennt man in Θ_2 und Θ_1 die Functionen wieder, durch deren Verschwinden die gleichseitige Hyperbel und die Parabel characterisirt werden (§§ 179, 145). Da sie Invarianten sind, so schliefst man, dafs für jedes mögliche Coordinatensystem das Verschwinden der Invarianten Θ_2 und Θ_1 für das von einem Kegelschnitt mit den beiden absoluten Richtungen gebildete Curvenpaar die Bedingung gibt, unter welcher jener Kegelschnitt bez. eine *gleichseitige Hyperbel* oder eine *Parabel* ist. Wenn die letzte Gleichung gleiche Wurzeln in k besitzt*), so zeigt dies an, dafs die absoluten Punkte selbst dem betrachteten

*) Sie sind $= (a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33})$. (Vgl. § 102.)

Kegelschnitt angehören, da dann die von ihnen ausgehenden Tangenten nur *ein* zusammenfallendes Paar von Schnittpunkten haben. Die Bedingung $(a_{11} + a_{22})^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ oder $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, welche für keine andern reellen Werte als $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ erfüllt werden kann, ist daher die characteristische *Bedingung für den Kreis* (§ 102).

Nun sagt die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = 0$ aus, dafs der Abstand eines beliebigen Punktes von einer Geraden absoluter Richtung unendlich grofs ist; man erhält die äquivalente Bedingung in trimetrischen Coordinaten, indem man den Nenner in dem Ausdruck des normalen Abstandes (§ 65) gleich Null setzt. Die allgemeine Gleichung der absoluten Richtungen in homogenen Dreiliniencoordinaten ist somit (§ 333) $\Omega \equiv$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos A_1 - 2\xi_3\xi_1 \cos A_2 - 2\xi_1\xi_2 \cos A_3 = 0,$$

und die Reciprocalform derselben

$$(\sin A)_x^2 \equiv x_1^2 \sin A_1 + \cdots + 2x_2x_3 \sin A_2 \sin A_3 + \cdots = 0.$$

Indem man für das vom Absoluten mit einem allgemeinen Kegelschnitt gebildete Curvenpaar die Invarianten Θ_1 und Θ_2 bildet, erhält man die homogene Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung eine *gleichseitige Hyperbel* darstellt, $\Theta_2 = 0$ in der Form

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23} \cos A_1 - 2a_{31} \cos A_2 - 2a_{12} \cos A_3 = 0;$$

weil 1 und $\cos A_i$ die Coefficienten der Gleichung der Kreispunkte sind; und die Bedingung, unter welcher die Curve eine *Parabel* ist, $\Theta_1 = 0$ in der Form

$$(A_{\sin A})^2 \equiv A_{11} \sin^2 A_1 + A_{22} \sin^2 A_2 + A_{33} \sin^2 A_3$$
$$+ 2A_{23} \sin A_2 \sin A_3 + 2A_{31} \sin A_3 \sin A_1 + 2A_{12} \sin A_1 \sin A_2 = 0,$$

nach den Coefficienten der Reciprocalform der Gleichung der Kreispunkte. Endlich unter der Bedingung $\Theta_2^2 = 4\Theta_1$, welche in verschiedenen Arten in eine Summe von zwei Quadraten umgeformt werden kann, geht die Curve, welche die allgemeine Gleichung darstellt, durch einen *Kreispunkt.*

Damit ist klar, wie die Kriterien unter Annahme allgemeiner projectivischer Coordinaten zu bilden sind, sobald die Gleichung der absoluten Richtungen bekannt ist.

B. 1) Eine gleichseitige Hyperbel stellt die Gleichung $a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$ dar für

$$a_{23}\cos A_1 + a_{31}\cos A_2 + a_{12}\cos A_3 = 0.$$

Sie enthält daher den Höhenpunkt des Dreiecks. (§ 62, 3.)

Für $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ gibt $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ die gleichseitige Hyperbel. Sie geht durch die Centra der Berührungskreise des Fundamentaldreiecks.

2) $(a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ repräsentirt eine Parabel für $a_1 l_2 l_3 + a_2 l_3 l_1 + a_3 l_1 l_2 = 0$.

3) Für den Winkel der aus dem Pol von ξ_x an $\Sigma = 0$ gehenden Tangenten ist, mit $\Pi = 0$ als der Bedingung, die ξ_x zum Durchmesser macht, $\tan\varphi = \frac{2\Pi\sqrt{-\Sigma}}{\Theta_2\Sigma - \Delta_1\Omega}$. Mit $\Omega = 0$, $\Sigma = \Theta_1 = \Pi$ folgt für den Winkel der Asymptoten $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{-\Theta_1}}{\Theta_2}$.

4) Die Länge der in der Geraden vom Kegelschnitt gefaſsten Sehne l ist für ϱ als Länge des parallelen Halbdurchmessers (vgl. § 247, 6) bestimmt durch

$$l^2 : \varrho^2 = \Theta_1\Sigma : (\Theta_1\Sigma - \Pi^2), \quad l^2 : \varrho^4 = -\Sigma\Theta_1^2 : M^2\Delta_1^2\Omega.$$

381. **Hauptkreis.** Die Covariante $F = 0$, gebildet in Bezug auf das aus einem Kegelschnitt und zwei Punkten bestehende Curvenpaar, bezeichnet den Ort eines Punktes, für welchen das Paar seiner Tangenten an den Kegelschnitt zu dem Paar seiner Verbindungslinien mit jenen festen Punkten harmonisch conjugirt ist (§ 369). Ist das Punktepaar speciell das der absoluten Richtungen, so bezeichnet $F = 0$ den Ort *des Schnittpunktes der Paare rechtwinkliger Tangenten* (§ 326, 2). Alsdann ist nach dem in § 367 gegebenen Werte

$$F \equiv A_{33}(x_1^2 + x_2^2) - 2A_{13}x_1 - 2A_{23}x_2 + A_{11} + A_{22} = 0$$

die allgemeine Gleichung des Hauptkreises in Cartesischen Coordinaten. Für $A_{33} = 0$ oder $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, d. h. für die Parabel, gibt die Covariante $F = 0$ ihre Directrix mit

$$2(A_{13}x_1 + A_{23}x_2) = A_{11} + A_{22}.$$

In trimetrischen Punktcoordinaten findet man die allgemeine Gleichung des Hauptkreises in der Form der Covariante F von Σ und Ω als

$$0 = (A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos A_1)x_1^2 + \cdots$$
$$+ 2(A_{11}\cos A_1 - A_{23} - A_{13}\cos A_3 - A_{12}\cos A_2)x_2x_3 + \cdots$$



Man kann diese Gleichung mittelst der Ableitungen S_i auch schreiben

$$\Theta_2 S = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2 S_2 S_3 \cos A_1 + 2 S_3 S_1 \cos A_2 + 2 S_1 S_2 \cos A_3 .$$

Dafs sie einen Kreis repräsentirt, kann gezeigt werden (vgl. § 332), indem man sie auf die Form bringt

$$\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \cdot (\sin A)_x \cdot \left\{ \frac{A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos A_1}{\sin A_1} + \cdot \cdot \right\}$$
$$= (A_{\sin A})^2 \cdot \{ x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 \} .$$

Wenn der erste Factor rechts verschwindet, so ist (§ 380) die Curve eine Parabel, und unsere Gleichung repräsentirt ihre Directrix, zusammen mit der unendlich fernen Geraden, als einer Linie, die auf sich selbst rechtwinklig ist.

B. 1) Man zeige, dafs die Directrix der Parabel

$$(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{lautet}$$

$$a_1 x_1 \tan A_2 \tan A_3 + a_2 x_2 \tan A_3 \tan A_1 + a_3 x_3 \tan A_1 \tan A_2 = 0.$$

2) Für beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen wird der Winkel der Tangenten des Kegelschnittes $S = 0$ aus $x' | y'$ (vgl. § 188, 3) für $F \equiv 0$ als Hauptkreis durch $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{-S' \Delta}}{F}$ ausgedrückt. Für Dreiliniencoordinaten ist rechts der Factor M oder $(\sin A)_x$ zuzufügen.

3) Die Gleichung

$$(S_2 K_3 - S_3 K_2) \sin A_1 + (S_3 K_1 - S_1 K_3) \sin A_2 + (S_1 K_2 - S_2 K_1) \sin A_3 = 0,$$

in welcher $S_1, .., K_1, ..$ die partiellen Ableitungen der Gleichung S des gegebenen Kegelschnittes und der Gleichung K seines Hauptkreises bezeichnen, drückt das Product der Gleichung der Axen des Kegelschnittes in die Constante $(\sin A)_x$ aus.

Denn sie ist nach § 373 die Bedingung für die Coordinaten eines Punktes, dessen Polaren in Bezug auf diesen Kreis und den Kegelschnitt einander parallel sind.

382. **Homogene Brennpunktskriterien.** Die Wurzeln der Discriminante einer Kegelschnittschaar sind die Parameter ihrer Punktepaare. Also sind die beiden Wurzeln der Discriminante der confocalen Schaar (vgl. § 380)

$$(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) k^2 + \Delta (a_{11} + a_{22}) k + \Delta^2 = 0^*)$$

*) Sie hat gleiche Wurzeln für den Fall des Kreises und wird linear für den Fall der Parabel.

die Parameter der beiden Paare von Brennpunkten des Kegelschnittes, der durch eine numerische Gleichung $S=0$ in Cartesischen Coordinaten gegeben ist. Wir bestimmen sie, indem wir eine der Wurzeln in $\Sigma + k(\xi^2+\eta^2)=0$ substituiren, so dafs diese Gleichung in zwei lineare Factoren zerfällt

$$(\xi x' + \eta y' + \zeta z')(\xi x'' + \eta y'' + \zeta z'');$$

denn nun sind die Brennpunkte $x':z' \,|\, y':z'$; $x'':z'' \,|\, y'':z''$. Der eine Wert von k gibt die beiden reellen, der andere die imaginären Brennpunkte. Dasselbe Verfahren ist auf die Gleichung in trimetrischen Coordinaten anwendbar (vgl. B. 3), sobald wir k aus $\Delta_2\Theta_1 k^2 + \Delta_1\Theta_2 k + \Delta_1{}^2 = 0$ berechnen und in $\Sigma + k\Omega = 0$ einsetzen. Bildet man ferner nach der Regel des § 322 die Reciprocalform in Cartesischen Coordinaten, so erhält man die allgemeine Ortsgleichung eines mit dem gegebenen confocalen Kegelschnittes in der Form

$$\Delta S + k\{A_{33}(x^2+y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22}\} + k^2 = 0.$$

Man erhält aus ihr die Gleichung der Enveloppe des Systems (§ 304), d. h. der gemeinschaftlichen Tangenten, als

$$\{A_{33}(x^2+y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22}\}^2 = 4\Delta S.$$

Durch Zerlegen derselben in das Factorenpaar

$$\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\}\{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2\}$$

würde man die Brennpunkte $\alpha \,|\, \beta$; $\alpha' \,|\, \beta'$ ebenfalls erhalten.

Allgemein entspricht der trimetrischen Gleichung $\Sigma + k\Omega = 0$ die Gleichung in Punktcoordinaten

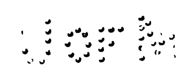
$$\Delta S + k\{(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos A_1)x_1{}^2 + \cdots + 2(A_{11}\cos A_1 - A_{23} - A_{13}\cos A_3 - A_{12}\cos A_2)x_2x_3 + \cdots\} + k^2\{x_1\sin A_1 + \cdots\}^2 = 0.$$

Wenn k einen der aus der verschwindenden Discriminante entspringenden Werte erhält, so liefert die Reciprocalform zu $\Sigma + k(\xi_1{}^2 + \cdots) = 0$ das Quadrat der Gleichung einer der Axen des Kegelschnittes.[152])

B. 1) Man bestimme die Brennpunkte von

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 8y + 11 = 0.$$

Die quadratische Gleichung in k ist $3k^2 + 4k\Delta + \Delta^2 = 0$, und ihre Wurzeln sind $k = -\Delta$ und $k = -\frac{1}{3}\Delta$ mit $\Delta = -9$.



Für den Wert $k = 3$ wird

$$6\xi^2 + 21\eta^2 + 3\zeta^2 + 18\eta\zeta + 12\zeta\xi + 30\xi\eta + 3(\xi^2 + \eta^2)$$
$$= 3(\xi + 2\eta + \zeta)(3\xi + 4\eta + \zeta);$$

dies liefert die Brennpunkte $1|2;\ 3|4$. Der Wert 9 gibt die imaginären Brennpunkte $2 \pm i \,|\, 3 \mp i$.

2) Man bestimme den Brennpunkt einer durch die allgemeine Gleichung in Cartesischen Coordinaten gegebenen Parabel.

Die quadratische Gleichung wird linear, und

$$(a_{11}+a_{22})\{A_{11}\xi^2+A_{22}\eta^2+2A_{23}\eta\zeta+2A_{31}\zeta\xi+2A_{12}\xi\eta\}-\varDelta(\xi^2+\eta^2)$$

ist in Factoren zerlegbar; dieselben müssen sein

$$(a_{11} + a_{22})(2A_{13}\xi + 2A_{23}\eta) \qquad \text{und}$$
$$\frac{(a_{11}+a_{22})A_{11}-\varDelta}{2(a_{11}+a_{22})A_{13}}\,\xi = \frac{(a_{11}+a_{22})A_{22}-\varDelta}{2(a_{11}+a_{22})A_{23}}\,\eta + \zeta.$$

Der erste Factor liefert den unendlich fernen Brennpunkt und zeigt, dafs die Axe der Curve zu $A_{23}x - A_{13}y = 0$ parallel ist. Der zweite Factor zeigt, dafs die Coefficienten seiner Glieder in ξ und η die Coordinaten des endlichen Brennpunktes sind.

3) Man bilde und discutire die Gleichung der Jacobi'schen und der Cayley'schen Curve des speciellen Gewebes $\lambda\Sigma_1 + \mu\Sigma_2 + \nu(\xi^2 + \eta^2) = 0$. Sie liefern die Eigenschaften der Curve, welche die Axen der Kegelschnitte der Schaar $\lambda\Sigma_1 + \mu\Sigma_2 = 0$ umhüllen, bez. diejenigen des Ortes ihrer Brennpunkte (§ 313, 9).

4) Man bestimme den Brennpunkt einer durch die Gleichung in trimetrischen Coordinaten gegebenen Parabel. Die Gleichung des Brennpunktepaares ist

$$\Theta_2\Sigma_1 \overset{s}{=} \varDelta_1\Omega.$$

Die Coordinaten des unendlich entfernten Brennpunktes sind aus § 322 bekannt als Coordinaten des Pols der unendlich fernen Geraden; daher sind die des endlich entfernten Brennpunktes

$$\frac{\Theta_2 A_{11} - \varDelta_1}{A_{11}\sin A_1 + A_{12}\sin A_2 + A_{13}\sin A_3}\,\Big|\cdot\Big|\cdot \quad \text{(cyclisch)}.$$

5) Man kann die Brennpunkte mit Hilfe des Satzes bestimmen, wonach das Rechteck der Entfernungen eines Brennpunktes von zwei parallelen Tangenten constant ist. (§ 202.)

Denn eine zur Fundamentallinie $x_1 = 0$ parallele Gerade (§ 68) $(\lambda - l_1)x_1 + M = 0$ berührt den Kegelschnitt $S = 0$ für

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\lambda^2 + 2\{(a_{23}a_{31} - a_{12}a_{23})l_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})l_3\}\lambda$$
$$+ (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)l_2^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)l_3^2 + 2(a_{13}a_{12} - a_{23}a_{11})l_2l_3 = 0,$$

und die Substitution des Wertes $\lambda = (l_1x_1 - M) : x_1$ führt sie über in

$$x_1^2\Sigma^l - 2Mx_1\Sigma_1^l + M^2\Sigma_{11}^l = 0$$

für Σ^l als die linke Seite der Bedingung der Berührung des Kegelschnittes mit der unendlich fernen Geraden und Σ_1^l, Σ_{11}^l als ihre Unterdeterminanten

$$-[a_{12}(a_{23}l_3 - a_{33}l_2) + a_{22}(a_{33}l_1 - a_{13}l_3) + a_{23}(a_{13}l_2 - a_{23}l_1)]$$

und $-(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)$ bez.

Die parallelen Tangenten zu den Fundamentallinien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ geben analoge Gleichungen

$$x_2^2\Sigma^l - 2Mx_2\Sigma_2^l + M^2\Sigma_{22}^l = 0,\quad x_3^2\Sigma^l - 2Mx_3\Sigma_3^l + M^2\Sigma_{33}^l = 0.$$

Sind dann x_1', x_1'' die Wurzeln der ersten, x_2', x_2'' die der zweiten und x_3', x_3'' die der dritten unter ihnen, so sind für x_1, x_2, x_3 bez. als die entsprechenden Coordinaten des Brennpunktes die Differenzen

$$x_1 - x_1',\ x_1 - x_1'';\quad x_2 - x_2',\ x_2 - x_2'';\quad x_3 - x_3',\ x_3 - x_3''$$

die Abstände desselben von den drei Paaren paralleler Tangenten. Man hat so nach dem citirten Satze die Gleichheit ihrer Producte, also die Relationen

$$x_1^2 - (x_1' + x_1'')x_1 + x_1'x_1'' = x_2^2 - (x_2' + x_2'')x_2 + x_2'x_2''$$
$$= x_3^2 - (x_3' + x_3'')x_3 + x_3'x_3'';$$

d. h. die Gleichungen $x_1^2\Sigma^l - 2Mx_1\Sigma_1^l + M^2\Sigma_{11}^l$

$$= x_2^2\Sigma^l - 2Mx_2\Sigma_2^l + M^2\Sigma_{22}^l = x_3^2\Sigma^l - 2Mx_3\Sigma_3^l + M^2\Sigma_{33}^l$$

liefern die Coordinaten der Brennpunkte des Kegelschnittes. Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, daſs jede den Ort eines Punktes bezeichnet, für welchen die Fuſspunkte der Normalen auf die vier den bezüglichen Fundamentallinien parallelen Tangenten des Kegelschnittes in einem Kreise liegen.

Für die Parabel ist $\Sigma^l = 0$; man erhält nur *einen* Brennpunkt.

Der Fundamentalsatz des § 197 über Brennpunkt und Directrix kann in analoger Weise benutzt werden. Man bildet das Quadrat des Abstandes eines Punktes x_i vom Brennpunkt y_i nach § 71 und ebenso nach § 65 das seines Abstandes von der zugehörigen Directrix y_i und vergleicht die aus jenem Fundamentalsatze entspringende Relation desselben mit der allgemeinen homogenen Gleichung zweiten Grades. Man erhält sechs Bedingungen, welche mit $l_y = 0$ (§ 72) zusammen die Elimination der Unbekannten gestatten und die Brennpunkte und Directrixen bestimmen.

6) Für die auf ein System harmonischer Pole bezogene Parabel $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$, für welche

$$a_{11}a_{22}l_3^2 + a_{22}a_{33}l_1^2 + a_{33}a_{11}l_2^2 = 0$$

ist, werden die Bestimmungsgleichungen des Brennpunktes

$$l_1 x_1 : l_2 x_2 : l_3 x_3 = (a_{22} + a_{33}) : (a_{33} + a_{11}) : (a_{11} + a_{22})$$

und daher

$$l_1^2 (l_3 x_3 + l_1 x_1 - l_2 x_2)(l_1 x_1 + l_2 x_2 - l_3 x_3) + l_2^2 (l_1 x_1 + l_2 x_2 - l_3 x_3)$$
$$(l_2 x_2 + l_3 x_3 - l_1 x_1) + l_3^2 (l_2 x_2 + l_3 x_3 - l_1 x_1)(l_3 x_3 + l_1 x_1 - l_2 x_2) = 0.$$

Man hat daher den Satz: Der Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche ein gemeinschaftliches Polardreieck haben, ist der durch die Mittelpunkte der Seiten ihres Dreiecks gehende Kreis.

7) Auch die Längen der Halbaxen lassen sich durch die vorigen Gleichungen bestimmen; denn für r als die Länge einer solchen ist jedes der drei in sie eintretenden quadratischen Polynome $= r^2 \Sigma^l$ (§ 201); die Elimination zwischen den durch diesen Wert verbundenen Gleichungen und $l_x = M$ liefert für sie

$$l_1 (r^2 + X_1)^{\frac{1}{2}} + l_2 (r^2 + X_2)^{\frac{1}{2}} + l_3 (r^2 + X_3)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{mit}$$

$$\frac{X_1}{a_{22} l_3^2 - 2 a_{23} l_2 l_3 + a_{33} l_2^2} = \frac{X_2}{a_{33} l_1^2 - 2 a_{13} l_3 l_1 + a_{11} l_3^2} = \frac{X_3}{a_{11} l_2^2 - 2 a_{12} l_1 l_2 + a_{22} l_1^2}$$

$$= - \frac{M^2}{(\Sigma^l)^2} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

In der Tat hat für $X_1 = X_2 = X_3$ diese Gleichung in r gleiche Wurzeln, und die Gleichheit der Nenner derselben Größen in den vorigen Relationen stimmt mit den Bedingungen des Kreises überein. (§ 332.) Die Bestimmungsgleichung für r^2 erhält die Form $A r^4 + 2 B r^2 + C = 0$ mit den Coefficientenwerten

$$A = l_1^4 + \cdots - 2 l_2^2 l_3^2 - \cdots = -l(l - 2 l_1)(l - 2 l_2)(l - 2 l_3), (l = l_1 + l_2 + l_3);$$
$$B = -2 l_1 l_2 l_3 (l_1 X_1 \cos A_1 + \cdots), \; C = l_1^4 X_1^2 + \cdots - 2 l_2^2 l_3^2 X_2 X_3 - \cdots.$$

Man kann sie auch schreiben

$$r^4 \Theta_1^3 + r^2 M^2 \Delta_1 \Theta_1 \Theta_2 + M^4 \Delta_1^2 = 0.$$

Sie hat in r^2 stets reelle Wurzeln. Die Untersuchung derselben auf ihre Gleichheit, auf die Gleichheit ihrer Zeichen oder die Entgegensetzung derselben und ihre Gleichheit bei entgegengesetzten Zeichen liefert die bekannten Unterscheidungszeichen der Kegelschnitte wieder.

8) Der Inhalt eines Dreiecks, das einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, ist

$$\sqrt{\frac{-S_1 S_2 S_3}{\Delta}}.$$

9) Der Inhalt des Dreiecks der Polaren von drei Punkten P, Q, R in Bezug auf eine Ellipse ist mit dem Inhalt PQR des

von ihnen gebildeten Dreiecks für O als das Centrum durch die Relation verbunden

$$(P'Q'R')^2 = \frac{a^2 b^2 (PQR)^2}{4(QOR)(ROP)(POR)}.$$

383. **Die Beziehung auf ein Absolutes.** Die Bedingung, unter welcher zwei Strahlen $\xi \mid \eta$, $\xi' \mid \eta'$ oder ξ_i, ξ_i' rechtwinklig zu einander sind, $\xi\xi' + \eta\eta' = 0$ oder

$$\xi_1\xi_1' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_3' - (\xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2')\cos A_1 - (\xi_3\xi_1' + \xi_1\xi_3')\cos A_2 - (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')\cos A_3 = 0,$$

ist identisch mit der Bedingung, unter welcher diese Geraden harmonische Polaren sind in Bezug auf das Punktepaar der absoluten Richtungen, d. h. einen degenerirten Kegelschnitt $\xi^2 + \eta^2 = 0$ oder $\Omega = 0$. *Somit ist die Beziehung der Rechtwinkligkeit ein besonderer Fall der Beziehung zwischen harmonischen Polaren in Bezug auf einen festen Kegelschnitt.*

So tritt sie auch in die Sätze ein. Aus dem Satze z. B., dafs die Verbindungslinien entsprechender Ecken von zwei in Bezug auf denselben Kegelschnitt einander conjugirten Dreiecken sich in einem Punkte schneiden, folgt als Specialfall der Satz, dafs die Höhenperpendikel eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, sobald $\Omega = 0$ an die Stelle der allgemeinen Curve gesetzt wird. Die Characteristik der speciellen Kegelschnitte: Kreis, gleichseitige Hyperbel und Parabel, die Beziehung des Kegelschnittes auf seine Hauptaxen, Brennpunkte und Directrixen, alle diese metrischen Charactere der Kegelschnittstheorie sind als abhängig von dem analytischen Ausdruck derselben absoluten Richtungen erkannt worden.

Überhaupt ist der Begriff der Rechtwinkligkeit fundamental für die ganze Winkelmessung, da er unmittelbar gestattet, die *Gleichheit von Winkeln* zu definiren. Denn wir können den Satz von der Winkelhalbirung, im Hinblick auf jene Verallgemeinerung des Begriffes, wiederum als einen Specialfall des Satzes von der harmonischen Beziehung zweier Strahlenpaare bezeichnen. Sind r_1, r_2 harmonische Strahlen in Bezug auf die absoluten Richtungen, g_1, g_2 und h_1, h_2 harmonische Strahlen in Bezug auf r_1, r_2, so sind $g_1 h_1$ und $g_2 h_2$ gleiche Winkel verschiedenen Sinnes.

Überall ist hervorgetreten, *dafs die absoluten Richtungen nur die speciellen Vertreter eines festen Kegelschnittes überhaupt sind, den man zur Definition des Messens als ein Absolutes benutzt. Auf der Beziehung der Gebilde auf ein absolutes Gebilde zweiten Grades beruht alle Metrik*, sowol die der Gebilde erster Stufe oder der binären homogenen Formen, als die des ebenen Systems überhaupt oder der ternären homogenen Formen. Dies soll im Folgenden nachgewiesen werden.[153])

384. **Metrische Grundlagen erster Stufe.** Wenn durch $S \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ ein gegebenes festes Paar von Elementen bezeichnet ist, so kann die Gleichung $U = 0$ eines beliebigen andern Paares von Elementen desselben Gebildes erster Stufe auf zwei Arten in der Form

$$S + kL^2 \equiv (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + k(\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2)^2 = 0$$

dargestellt werden. Denn die Paare $S = 0$, $U = 0$ bestimmen eine Involution, deren Doppelelemente die durch die beiden Werte von L bestimmten Elemente $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sind. In Erinnerung an die Bedeutung der Gleichung $S + L^2 = 0$ in der Theorie der Kegelschnitte (§ 275), welche das System der den Kegelschnitt $S = 0$ doppelt berührenden oder ihm ein- und umgeschriebenen Kegelschnitte bezeichnet, kann man sagen, das Paar $U = 0$ sei dem Paare $S = 0$ ein- oder umgeschrieben, und die Elemente $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ seien als Centrum und Axe der Ein- oder Umschreibung zu bezeichnen. Das eine von ihnen ist das conjugirt harmonische des andern in Bezug auf jedes der gegebenen Elementenpaare. Wird also eines durch x_i' oder $x_1x_2' - x_2x_1' = 0$ dargestellt, so ist das andere notwendig

$$P \equiv a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2' = 0.$$

Wenn man nun in der Gleichung $SS' - P^2 = 0$ des § 326, die in § 370 wiederholt und ganz in Bezug auf das hier entsprechende Problem gebraucht wurde, alle x_3 enthaltenden Glieder verschwinden läfst, so folgt die Identität

$$\begin{aligned}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2)(a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2)\\ - \{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2'\}^2\\ = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(x_1x_2' - x_2x_1')^2.\end{aligned}$$

Man erkennt aus ihr, daſs das eingeschriebene Elementenpaar, für θ als eine Constante, in den beiden Formen

$$(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2)(a_{11}x_1'^2+2a_{12}x_1'x_2'+a_{22}x_2'^2)\sin^2\theta$$
$$-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(x_1x_2'-x_2x_1')^2=0,$$
$$(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2)(a_{11}x_1'^2+2a_{12}x_1'x_2'+a_{22}x_2'^2)\cos^2\theta$$
$$-\{a_{11}x_1x_1'+a_{12}(x_1x_2'+x_2x_1')+a_{22}x_2x_2'\}^2=0$$

dargestellt werden kann, je nachdem man von den Elementen

$$x_1x_2'-x_2x_1'=0,\quad a_{11}x_1x_1'+a_{12}(x_1x_2'+x_2x_1')+a_{22}x_2x_2'=0$$

das erste oder das zweite als Axe der Einschreibung ansieht.

Behält man die Bezeichnungen S, S' und P auch im binären Gebiet bei, so kann man die obige Identität in der Determinantenform schreiben und direct verificiren:

$$\begin{vmatrix} S, & P \\ P, & S' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ x_1', & x_2' \end{vmatrix}^2.$$

Bei Inbetrachtnahme einer dritten Reihe $x_1''\,|\,x_2''$ und mit den Bezeichnungen S'' für das entsprechende S, und P', P'' für die Polargleichungen

$$P'=a_{11}x_1'x_1''+\cdots,\quad P''=a_{11}x_1''x_1+\cdots,$$

erhält man, rechts ausmultiplicirend, die neue Identität

$$\begin{vmatrix} S, & P, & P'' \\ P, & S', & P' \\ P'', & P', & S'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & 0 \\ x_1', & x_2', & 0 \\ x_1'', & x_2'', & 0 \end{vmatrix}^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$SS'S''+2PP'P''-SP'^2-S'P''^2-S''P^2=0.$$

Dies wird durch Division mit $SS'S''$, wegen

$$SS'\cos^2\theta=P^2,\quad S'S''\cos^2\theta'=P'^2,\quad SS''\cos^2\theta''=P''^2,$$

zu $\quad 1-\cos^2\theta-\cos^2\theta'-\cos^2\theta''+2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''=0$

d. h. zu $\quad (\cos\theta\cos\theta'-\cos\theta'')^2=\sin^2\theta\sin^2\theta'$

und $\quad \cos(\theta\pm\theta')=\cos\theta''.$

Da nun θ, θ', θ'' nur durch die Cosinusquadrate bestimmt sind, so kann über sie so verfügt werden, daſs die Relation besteht

$$\arc\cos\frac{P}{\sqrt{SS'}}+\arc\cos\frac{P'}{\sqrt{S'S''}}=\arc\cos\frac{P''}{\sqrt{S''S}}.$$

385. **Äquidistanz.** Denkt man unter den Elementen eines geometrischen Gebildes erster Stufe ein Paar $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ als unveränderlich — man nenne es *das absolute Paar* —, so kann *jedes* Paar von Elementen dieses Gebildes als ihm eingeschrieben angesehen werden. Es bestimmt dann mit jenem zwei Elemente als Doppelelemente der erzeugten Involution, nach dem Vorigen zu benennen als Centrum und Axe der Einschreibung. Insofern das betrachtete Paar dem absoluten eingeschrieben ist, wollen wir es ein *Kreispaar* nennen, und jene Doppelelemente der Involution, die das absolute und das Kreispaar zugleich harmonisch teilen, sollen *Centrum und Axe des Kreispaares* heifsen, mit der Bestimmung, dafs jedem von ihnen in derselben Betrachtung derselbe Name (Centrum oder Axe) verbleibe. Aus dem Centrum und dem einen Element des Kreispaares bestimmt sich dessen anderes Element in einziger Weise; denn zuerst liefert das Centrum die Axe als das ihm in Bezug auf das absolute Paar harmonisch conjugirte Element, dann das erste Element des Kreispaares das zweite als ihm harmonisch conjugirt in Bezug auf Centrum und Axe.

Für alles Weitere ist der Begriff der *Äquidistanz der Elemente* grundlegend, und wir setzen ihn so fest, dafs der Satz gilt: *Die zwei Elemente eines Kreispaares sind äquidistant vom Centrum.* Diese Definition ist nämlich die projectivische Verallgemeinerung der Beschreibung gleicher Winkel in § 383.

Die Metrik der Gebilde erster Stufe gründet sich dann mathematisch auf folgenden Prozefs: Sind E^0, E' zwei Elemente des Gebildes, so bestimme man ein drittes Element E'' desselben Gebildes so, dafs E^0, E'' ein Kreispaar vom Centrum E' sind; sodann E''' so, dafs E' und E''' ein Kreispaar vom Centrum E'' sind; E'''' so, dafs E'' und E'''' ein Kreispaar vom Centrum E''' sind, etc.; ferner andererseits ein Element $E^{\backprime}$ so, dafs E', $E^{\backprime}$ ein Kreispaar vom Centrum E^0 sind; $E^{\backprime\backprime}$ so, dafs $E^{\backprime\backprime}$, E^0 ein Kreispaar vom Centrum $E^{\backprime}$ sind, etc. *Dann hat in der Reihe* ..., $E^{\backprime\backprime\backprime}$, $E^{\backprime\backprime}$, $E^{\backprime}$, E^0, E', E'', E''', ... *jedes Element von den ihm nächstbenachbarten Elementen gleiche Entfernungen in verschiedenem Sinn.* Wenn die Elemente E^0, E' einander nahe genug gewählt waren, so wird der ganze Träger

des Elementargebildes in eine stetige Folge von beliebig kleinen und einander gleichen Elementardistanzen geteilt; die Zahl derselben, welche zwischen irgend zwei Elementen des Gebildes eingeschlossen ist, gibt für dieselben das Maſs ihrer Distanz. Für drei auf einander folgende Elemente E, E', E'' gilt dabei *die Fundamentaleigenschaft von der Addirbarkeit der Maſsunterschiede*

$$\text{Dist.}\,(E, E') + \text{Dist.}\,(E', E'') = \text{Dist.}\,(E, E'').$$

386. **Distanzformeln.** Ist das absolute Paar $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2$ durch $S = 0$ dargestellt, so hat das Kreispaar vom Centrum $E'(x_i')$ die Gleichung

$$SS' \cos^2\theta - P^2 = 0.$$

Sind $E_0(x_i), E''(x_i'')$ die beiden Elemente desselben, so hat man

$$\frac{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2) + a_{22}x_2x_2'}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}x_1'^2 + \cdot\cdot)}} = \frac{a_{11}x_1'x_1'' + a_{12}(x_1'x_2'' + x_1''x_2') + a_{22}x_2'x_2''}{\sqrt{(a_{11}x_1'^2 + \cdot\cdot)(a_{11}x_1''^2 + \cdot\cdot)}}$$

als Ausdruck der Wahrheit, daſs x_i'' und x_i von x_i' gleichweit entfernt sind. In Folge dessen ist Dist. (E_0E') eine Function von

$$\frac{P}{\sqrt{SS'}} = \frac{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2) + a_{22}x_2x_2'}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}x_1'^2 + \cdot\cdot)}},$$

deren Form durch die Forderung bedingt ist, daſs für die Elemente E, E', E'' obige Functionalgleichung der Addirbarkeit der Distanzen besteht.

Nach der Schluſsformel des § 384 wird derselben Genüge geleistet, wenn man voraussetzt, *daſs die Distanz von x_i zu x_i' einem Bogen gleich sei*), der den letzterhaltenen Ausdruck zu seinem Cosinus hat,* so daſs

$$\text{Dist.}\,(E_0E') = \text{arc cos}\,\frac{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2'}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}x_1'^2 + \cdot\cdot)}}$$

und, nach dem Früheren gleichbedeutend,

$$\text{Dist.}\,(E_0E') = \text{arc sin}\,\frac{\sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}\,(x_1x_2' - x_1'x_2)}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}x_1'^2 + \cdot\cdot)}}.$$

*) Eigentlich kann ebensowol ein constantes Vielfache des arc cos als Distanz bezeichnet werden.

Die beiden Formen der Gleichung des Kreispaares (§ 383) sagen dann gleichmäſsig aus, daſs die Entfernungen der beiden Elemente E_0E'' desselben vom Centrum E' dem Bogen θ gleich sind, oder daſs so zu sagen θ der Radius dieses Kreises ist.

Speciell hat man für $\theta = 0$ die Relation $x_1x_2' - x_1'x_2 = 0$, d. h. die beiden Elemente fallen zusammen, und für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ $P = 0$, d. h. die Elemente x_i und x_i' bilden bezüglich der Elemente des absoluten Paares ein harmonisches Paar. *Die Distanz zwischen irgend zwei in Bezug auf das absolute Paar harmonischen Elementen ist stets ein Quadrant.* Wir behandeln den *Quadranten als die Einheit der Distanz*, d. h. drücken die numerischen Distanzangaben in Teilen des Quadranten aus, nennen als z. B. rechtwinklige Strahlen solche von der Distanz Eins.

Neben dieser allgemeinen Messung bedarf insbesondere noch der Specialfall einer Erörterung, wo das *absolute Paar in ein doppeltes Element* zusammenfällt. Dann fällt nämlich das harmonisch conjugirte eines beliebigen Elements in Bezug auf das Absolute mit diesem zusammen. Daher kann *jedes* Paar von Elementen als ein Kreispaar betrachtet werden, welches das harmonisch conjugirte Element des Absoluten zum Centrum hat. Darnach kann wie vorher der Träger eines Elementargebildes in beliebig kleine gleiche Elementardistanzen zerlegt und die Entfernung zweier Elemente des Gebildes durch die Anzahl solcher Elementardistanzen gemessen werden, die zwischen ihnen liegen. Aber *die Einheit der Distanz ist hier willkürlich,* denn der Begriff des Quadranten hat keinen Inhalt mehr. So z. B. für die gewöhnliche Längenmessung.

In diesem Falle ist $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, d. h. die Distanz ist als ein Bogen vom Sinus Null gegeben. Durch Übergang vom arc sin zum sin und Unterdrückung des verschwindenden Factors erhält man, für $(b_1x_1 - b_2x_2)^2 = 0$ als das absolute Doppelelement, die Distanz von x_i und x_i' gleich

$$\frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{(b_1x_1 - b_2x_2)(b_1x_1' - b_2x_2')}\,.$$

Nach Multiplication mit einem willkürlichen Factor $(b_1c_2 - b_2c_1)$

läfst sich die Distanz in der offenbar der Functionalgleichung genügenden Form einer Differenz schreiben

$$\text{Dist.}\,(x_i,\, x_i') = \frac{c_1 x_1 - c_2 x_2}{b_1 x_1 - b_2 x_2} - \frac{c_1 x_1' - c_2 x_2'}{b_1 x_1' - b_2 x_2'}.$$

387. **Elliptische und hyperbolische Messung.** Wir haben gesehen, wie aus dem Anfangselement $E_0 E'$ eine zusammenhängende Reihe gleicher Elemente, aus dem angenommenen Scalenteil die ganze Scala abgeleitet wurde. Beim gewöhnlichen Messen geschieht die Bildung der Scala oder des Mafsstabes durch Bewegung des ersten Teils im Endlichen; für die mathematische Untersuchung ersetzen wir die Bewegung durch eine lineare Transformation, bei welcher die absoluten Elemente festbleiben. Die allgemeinen Mafse müssen dann bei diesen Transformationen ebenso unveränderlich bleiben, wie die gewöhnlichen bei Bewegungen. Wird dann die Lage eines Elementes im Gebilde erster Stufe durch den Wert z des Verhältnisses zweier Variabeln $x_1 : x_2$ bestimmt, so ist $z' = \lambda z$ die Form der fraglichen Transformation, sobald wir die absoluten Elemente als die fundamentalen nehmen, d. h. durch $z = 0$ und $z = \infty$ ausdrücken. Durch die wiederholte Anwendung dieser Transformation auf ein Element z entsteht dann die Elementenreihe z, λz, $\lambda^2 z$, $\lambda^3 z$, etc. als die Scala, welche durch die erzeugende Transformation in sich selbst übergeht. Dabei ist λ nur der Beschränkung unterworfen, dafs alle Elemente mit z reell sind, und in einerlei Sinn auf einander folgen. Ist der Scalenteil die Einheit der Distanz, so sind die Distanzen der bezeichneten Elemente von dem Elemente z gleich 0, 1, 2, 3, etc. Die Unterabteilung der Scala wird dann durch eine Transformation $z' = \lambda^{\frac{1}{n}} z$ bewirkt, bei der man die n^{te} Wurzel so zu wählen hat, dafs das bezeichnete Element zwischen z und λz liegt.

Dann ist der Exponent von λ der Ausdruck der Distanz, oder *die Distanz des Elementes z vom Elemente z' ist gleich dem durch die Constante* log λ *dividirten Logarithmus des Quotienten* $z : z'$. Da aber $z : z'$ das Doppelverhältnis der beiden bezeichneten Elemente als Teilelemente des absoluten Paares

ist, so definiren wir die *Distanz zweier Elemente als den mit einer Constanten c multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das sie mit dem absoluten Paar bilden.*

Dabei ist die Befriedigung jener Addirbarkeitsbedingung evident. Den analytischen Ausdruck der Distanz erhalten wir nun, wenn das Absolute wieder allgemein durch $S = 0$ gegeben ist, indem wir nach § 341, 1 das Doppelverhältnis bilden, welches die Elemente x_i, x_i' mit dem absoluten Paar bestimmen, als

$$(E_1 E_2 E_0 E') = \frac{P - \sqrt{P^2 - SS'}}{P + \sqrt{P^2 - SS'}},$$

und die Distanz ist somit der $c$fache log desselben. Wegen

$$c \log a = 2ic \,.\, \text{arc cos} \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

erhält man aber für diese Distanz auch den Ausdruck

$$c \log (E_1 E_2 E_0 E') = 2ic \,.\, \text{arc cos} \frac{P}{\sqrt{SS'}},$$

der für $c = -\frac{1}{2}i$ in den Ausdruck des § 383 übergeht.

Die beiden Elemente des Absoluten sind als unendlich fern zu betrachten, denn ihre Distanz von einem beliebigen andern Element ist unendlich grofs, nämlich $c \,.\log 0$ oder $c \,.\log \infty$. Wenn die Punkte des Absoluten reell gedacht werden, so können von einem beliebigen Elemente aus nur *die* Distanzen in dem Gebiete zwischen jenen gemessen werden, in welchem jenes Element selbst liegt; dies Gebiet ist durch zwei unendlich ferne Elemente begrenzt, und von dem Gebiete jenseits derselben ist eine Kenntnis nicht erreichbar. Dies ist die Vorstellung der sogenannten *hyperbolischen Mafsbestimmung.*[154])

Wollen wir dann, dafs die Distanz reeller Elemente einen reellen Wert erhalte, so müssen wir, weil $(E_1 E_2 E_0 E')$ dann positiv ist, der Constanten c einen reellen Wert beilegen und formell den logarithmischen vor dem cyclometrischen Ausdruck bevorzugen.

Sind dagegen die Elemente des Absoluten conjugirt imaginär, so müssen wir zuerst der Constanten c einen rein imaginären Wert $c'i$ geben, damit die Distanz reeller Elemente reell sei. Alsdann ist die Distanz reeller Elemente

stets reell, aber nur nach der Periodicität des Logarithmus bis auf Vielfache einer reellen Periode $2\pi i c = -2\pi c'$ bestimmt; es gibt keine reellen unendlich fernen Elemente. Die Gerade kehrt wie der sich drehende Strahl in sich zurück, und die Periode ist ihre Gesammtlänge. Soll dieselbe, wie die Drehung im Büschel, π betragen, so ist $c' = -\frac{1}{2}$ zu nehmen. Man hat so in der Winkelmessung ein Abbild für die Vorstellungen der *elliptischen Maſsbestimmung.*

388. **Parabolische Messung.** Die am Schlusse des § 386 betrachtete specielle Maſsbestimmung unter Voraussetzung des Zusammenfallens der beiden Elemente des absoluten Paares entspricht der einzig möglichen speciellen Art linearer Transformationen, bei welchen *ein* doppelt zählendes Element ungeändert bleibt. Man kommt so auf die *parabolische Maſsbestimmung,* deren bekanntes Beispiel die gewöhnliche Messung in der Geraden der Euclid'schen Geometrie bietet. Ihr allgemeiner analytischer Ausdruck ergibt sich durch den früheren Grenzübergang, bei welchem der verschwindende Factor $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ mit einem unendlich groſs zu nehmenden c zu dem endlichen Werte $(b_1 c_2 - b_2 c_1)$ zu vereinigen ist. Der nicht mehr vieldeutige, algebraische Ausdruck gibt die Distanz als Differenz zweier Doppelverhältnisse, welche noch von dem willkürlichen Element $c_1 \mid c_2$ abhängen.

Die Zurückführung der Untersuchung auf Doppelverhältnisse macht sie entscheidend über die Frage nach den überhaupt möglichen Maſsbestimmungen der Geometrie, sofern jene als reine Zahlen *unabhängig* von einer Maſsbestimmung erklärt werden können.

Von besonderem Werte ist nun, daſs *in der Nähe eines bestimmten Elementes die allgemeine Maſsbestimmung stets bis auf Glieder höherer Ordnung genau durch die specielle ersetzt werden kann;* für diese Beziehung erscheint der Ausdruck *Berührung der beiden Maſsbestimmungen* geeignet. Man muſs dazu das dem gegebenen Berührungselement harmonisch conjugirte in Bezug auf das absolute Paar der allgemeinen Maſsbestimmung als das absolute Element der speciellen Maſsbestimmung wählen und die Constanten geeignet bestimmen.

Sind etwa die Elemente des absoluten Paares, als harmonisch zu $z = 0$ und $z = \infty$ gelegen, durch $z^2 = -a^2$ bestimmt, so findet man die Distanz des Elementes z vom Coordinatenaufang nach der allgemeinen Maſsbestimmung als

$$= 2ci \operatorname{arc} \tan \frac{z}{a} = 2ci \left\{ \frac{z}{a} - \frac{z^3}{3a^3} + \frac{z^5}{5a^5} - \cdot + \text{etc.} \right\},$$

und nach der in $z = 0$ berührenden speciellen

$$= 2ci \frac{z}{a},$$

wenn man die Constante so wählt, daſs sie mit dem ersten Glied oben übereinstimmt. Nehmen wir z. B. die gewöhnliche Streckenmessung in der Geraden, so daſs z den Abstand vom Nullpunkt bedeutet, und die gewöhnliche Winkelmessung in dem Büschel, dessen Strahlen absoluter Richtung die Punkte $z^2 = -1$ ausschneiden, so ist der die Strecke z projicirende Winkel $\operatorname{arc} \tan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots$, in der Tat der specielle Fall für $2ci = 1$.

Die Übereinstimmung der allgemeinen und der speciellen Maſsbestimmung gilt nur in der Nachbarschaft des Berührungselements. Weiterhin bleibt eine elliptische gegen die berührende parabolische stets zurück, d. h. gibt kleinere Werte der Entfernungen für dieselben Punkte wie diese ($a > 0$), während eine hyperbolische der parabolischen voraneilt, d. h. gröſsere Distanzzahlen gibt ($a < 0$). *Diese Abweichung der allgemeinen Maſsbestimmung von der parabolischen nennt man Krümmung derselben.* Man definirt als ihr *Krümmungsmaſs* $-\frac{1}{4c^2}$, nämlich das negativ genommene Verhältnis des dreifachen zweiten Gliedes der Reihe zum Cubus des ersten. Dasselbe ist also bei reellem Absoluten negativ und bei imaginärem positiv (für $c = -\frac{1}{2}i$ gleich Eins), für die parabolische Maſsbestimmung, der eine unendlich groſse Constante entspricht, aber Null.

389. **Metrische Grundlagen zweiter Stufe.** Das System der einen gegebenen Kegelschnitt $S = 0$ doppelt berührenden oder *ihm eingeschriebenen Kegelschnitte* war in Punktcoordinaten durch $S + kP^2 = 0$ und in Liniencoordinaten durch $\Sigma + \varkappa \Pi^2 = 0$

ausgedrückt. Wir nennen wieder die Berührungssehne $P=0$ oder ξ_i' *Axe der Einschreibung* und den Pol $\Pi=0$ oder x_i' der Berührungssehne *Centrum der Einschreibung*. Wir schreiben daher die Gleichungen von ξ_i' und x_i' in der Form von Polaren

$$P \equiv a_{11}x_1x_1' + \cdots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2) = 0,$$
$$\Pi \equiv A_{11}\xi_1\xi_1' + \cdots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_1'\xi_2) = 0.$$

Bezeichnet ferner nach § 372 C das Resultat der Substitution von $x_jx_k' - x_j'x_k$ für ξ_i in Σ, ebenso Γ das der Substitution von $\xi_j\xi_k' - \xi_j'\xi_k$ für x_i in S, so bestehen die Identitäten

$$SS' - P^2 = C, \quad \Sigma\Sigma' - \Pi^2 = \Delta\Gamma.$$

Infolge der ersten Identität können wir, für θ als eine Constante, der Ortsgleichung des eingeschriebenen Kegelschnittes für den Punkt x_i' als Centrum der Einschreibung die beiden äquivalenten Formen erteilen

$$(a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \cdots + 2a_{12}x_1'x_2')\cos^2\theta$$
$$- \{a_{11}x_1x_1' + \cdots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2)\}^2 = 0,$$
$$(a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \cdots + 2a_{12}x_1'x_2')\sin^2\theta$$
$$- \{A_{11}(x_2x_3' - x_2'x_3)^2 + \cdots + 2A_{12}(x_1x_3' - x_1'x_3)(x_2x_3' - x_2'x_3\} = 0.$$

Damit nun die Form $SS'\cos^2\theta - P^2 = 0$ mit der vorausgesetzten Form $S + kP^2 = 0$ übereinstimme, mufs sein

$$k = \frac{-1}{(a_{11}x_1'^2 + \cdots + 2a_{12}x_1'x_2')\cos^2\theta} = \frac{-\Delta}{(A_{11}\xi_1'^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\cos^2\theta},$$

weil für die Substitution der Coordinaten von Pol und Polare nach § 330, 1 $\Sigma' = \Delta S'$ ist.

Der zweiten Identität gemäfs können wir analog die Tangentialgleichung des Systems in äquivalenten Formen darstellen. Um aber dieselbe Constante θ brauchen zu können, müssen wir uns erinnern, dafs die Reciprocalform von $S + kP^2 = 0$ zunächst $\Sigma + k\Gamma = 0$ und durch Umformung $(\Delta + k\Sigma')\Sigma - k\Pi^2 = 0$ ergibt. Somit ist $\varkappa = -k : (\Delta + k\Sigma') = -\Sigma'\sin^2\theta$ und das Paar der äquivalenten Formen der Tangentialgleichung desselben eingeschriebenen Kegelschnittes lautet

$$(A_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2a_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\sin^2\theta$$
$$- \{A_{11}\xi_1\xi_1' + \cdots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_1'\xi_2)\}^2 = 0,$$
$$(A_{11}\xi_1^2 + \cdots + A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\cos^2\theta$$
$$- \Delta\{a_{11}\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)^2 + \cdots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3' - \xi_1'\xi_3)(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)\} = 0.$$

Mit den Symbolen S, S', S'', P, P', P'' wie in § 384 erhält man die durch Bildung des Determinantenproducts zu beweisende Identität

$$\begin{vmatrix} S, & P, & P'' \\ P, & S', & P' \\ P'', & P', & S'' \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \end{vmatrix}^2.$$

Für drei Punkte in gerader Linie gilt, da für sie die Determinante rechts verschwindet, wieder wie in § 384

$$S(S'S'' - P'^2) + P(P'P'' - PS'') + P''(PP' - P''S') = 0,$$

d. h. nach den vorher entwickelten Relationen

$$\text{arc cos} \frac{P}{\sqrt{SS'}} + \text{arc cos} \frac{P'}{\sqrt{S'S''}} = \text{arc cos} \frac{P''}{\sqrt{SS''}}.$$

390. **Absoluter Kegelschnitt.** Man denke einen Kegelschnitt innerhalb des ebenen Systems als unveränderlich — wir nennen ihn *den absoluten Kegelschnitt* — so kommt zunächst die Theorie der §§ 385, 387, 388 in folgenden Zusammenhang mit demselben. *Jedes Gebilde erster Stufe hat mit dem absoluten Kegelschnitt zwei Elemente gemein* — nämlich eine Punktreihe das Paar der Schnittpunkte, ein Strahlbüschel das Paar der berührenden Strahlen — *welche das absolute Paar dieses Gebildes liefern.* Insbesondere wird für die Tangenten des absoluten Kegelschnittes als Träger von Reihen das absolute Paar ein Paar zusammenfallender Punkte und für die Punkte des absoluten Kegelschnittes als Träger von Büscheln ein Paar zusammenfallender Strahlen. Die Theorie der Distanzen für jedes einzelne von allen diesen Gebilden erster Stufe ist in den genannten Paragraphen enthalten, und es bleibt nur die Vergleichbarkeit derselben von einem Gebilde zum andern zu begründen. Dies geschieht aber einfach durch die Voraussetzung, *dafs die Einheit der Distanz für dieselben, der Quadrant, von einem Gebilde zum andern und für alle Gebilde des Systems dieselbe Gröfse sei* — eine Voraussetzung, die darin schon im Vorigen stillschweigend gemacht ist, dafs der Quadrant durch das Symbol $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet wurde.

Nennt man dann den Pol einer Geraden, bez. die Polare eines Punktes in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt den

absoluten Pol, bez. die absolute Polare, so gilt ferner das Gesetz: *Die Distanz von zwei Punkten oder von zwei Geraden ist der Distanz der absoluten Polaren oder der absoluten Pole derselben bez. gleich.* Denn die Doppelverhältnisse in zusammengehörigen Polreihen und Polarenbüscheln sind unter einander gleich. Damit ist eine Vergleichbarkeit der Messung von Strecken und Winkeln begründet, infolge dessen *in dieser Geometrie von allgemeiner Mafsbestimmung die metrischen Relationen in gleicher Weise dem Dualitätsprincip unterliegen, wie die projectivischen.*

Unter der Entfernung eines Punktes von einer Geraden hat man seine Distanz von dem Schnittpunkt desselben mit der ihm enthaltenen Normalen zu verstehen; diese ist die Verbindungslinie des Punktes mit dem absoluten Pol der Geraden (§ 383). Danach ist die Entfernung eines Punktes von seiner absoluten Polare (wie von allen seinen conjugirten Polen) oder die Entfernung einer Geraden von ihrem absoluten Pol (wie von allen ihren conjugirten Polaren) ein Quadrant. *Daher ist die Entfernung eines Punktes von einer Geraden Complement der Entfernung der absoluten Polare des Punktes von der Geraden oder auch das Complement der Entfernung des absoluten Pols der Geraden vom Punkte.*

Ein dem absoluten Kegelschnitt eingeschriebener Kegelschnitt heifst Kreis, und das Centrum und die Axe der Einschreibung das *Centrum und die Axe des Kreises.* Auf allen Strahlen durch das Centrum bilden die Schnittpunkte mit dem Kreise Kreispaare nach § 385. Also sind alle Punkte des Kreises äquidistant vom Centrum und ebenso alle Tangenten desselben äquidistant von der Axe desselben, wobei die letztere Entfernung das Complement der ersteren ist.

391. **Distanzformeln.** Damit ergibt sich die *analytische Ausdrucksform der gewonnenen Begriffe.* Stellt $S = 0$ oder $\Sigma = 0$ den absoluten Kegelschnitt dar, so ist die Ortsgleichung des Kreises vom Centrum x_i' (§ 389) entweder

$$SS' \cos^2\theta - P^2 = 0 \quad \text{oder} \quad SS' \sin^2\theta - C = 0.$$

Nach ganz analogem Gedankengange wie im § 386 erhält man die Distanz der Punkte x_i, x_i' in einer der beiden Formen

$$\arccos \frac{a_{11}x_1x_1' + \cdots + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1')}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \cdots + 2a_{12}x_1'x_2')}},$$

$$\arcsin \sqrt{\frac{A_{11}(x_2x_3' - x_2'x_3)^2 + \cdots + 2A_{12}(x_1x_3' - x_1'x_3)(x_2x_3' - x_2'x_3)}{(a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \cdots + 2a_{12}x_1'x_2')}}.$$

Auch gilt für die Distanzen von drei Punkten einer Geraden

$$\text{Dist.}(E, E') + \text{Dist.}(E', E'') = \text{Dist.}(E, E'').$$

Und ist ξ_i' die Axe der Einschreibung, so ist die Tangentialgleichung des Kreises

$$\Sigma\Sigma' \sin^2\theta - \Pi^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\Sigma' \cos^2\theta - \Delta\Gamma = 0.$$

Die Distanz der Geraden von den Coordinaten ξ_i, ξ_i' ist daher

$$\arccos \frac{A_{11}\xi_1\xi_1' + \cdots + A_{12}(\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2)}{\sqrt{(A_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')}},$$

$$\arcsin \sqrt{\frac{\Delta[a_{11}(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)^2 + \cdots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3' - \xi_1'\xi_3)(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)]}{(A_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')}}.$$

Indem man endlich in der ersten Formel der vorigen Gruppe die x_i' durch $A_{i1}\xi_1' + A_{i2}\xi_2' + A_{i3}\xi_3'$ und in der vorletzten die ξ_i' durch $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$, zugleich arc cos durch arc sin ersetzt, erhält man für die Distanz des Punktes x_i von der Linie ξ_i' den Ausdruck

$$\arcsin \frac{(\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')}}.$$

Auch die Formeln des § 387 lassen sich unmittelbar auf das ternäre Gebiet übertragen, da der symbolische Ausdruck für das Doppelverhältnis zweier Elemente mit dem quadratischen Absoluten unverändert bleibt. Die Entfernung zweier Punkte x_i, x_i', bez. der Winkel zweier Geraden ξ_i, ξ_i' sind dann

$$c \log \frac{P + \sqrt{P^2 - SS'}}{P - \sqrt{P^2 - SS'}}, \quad \text{bez.} \quad c' \log \frac{\Pi + \sqrt{\Pi^2 - \Sigma\Sigma'}}{\Pi - \sqrt{\Pi^2 - \Sigma\Sigma'}},$$

wo c, c' zwei beliebig, aber fest gewählte Constanten bedeuten, welche nach § 387 passend zu specialisiren sind.

Hiernach erscheint der absolute Kegelschnitt als das Unendlichferne der Ebene, nämlich als der Ort der Punkte, die von jedem andern Punkte einen unendlich grofsen Abstand

haben, und als die Enveloppe der Geraden, die mit jeder andern Geraden einen unendlich grofsen Winkel bilden. Irgend zwei Punkte auf einer Tangente des Absoluten haben die Distanz Null, irgend zwei Strahlen durch einen Punkt des Absoluten bilden den Winkel Null, denn das definirende Doppelverhältnis hat den Wert Eins.

392. **Bewegungen in der Ebene.** Es erübrigt noch, nachzuweisen, dafs diese Theorie der allgemeinen Mafsbestimmung in der Ebene mit den besonderen linearen Transformationen, die den Bewegungen in der Ebene entsprechen, im engsten Zusammenhang steht.[155]) (Vgl. § 387.)

Ein gegebener absoluter Kegelschnitt kann durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen in sich selbst übergeführt werden (§ 291). Bei einer solchen Transformation bleiben offenbar im allgemeinen zwei Punkte, die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen sowie auch die zugehörigen Tangenten des Kegelschnittes unverändert. Diese bilden mit ihrer Berührungssehne ein Fundamentaldreieck, für welches seine Gleichung auf die Form $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ kommt. Die Transformation

$$x_1 = \lambda_1 x_1', \quad x_2 = \lambda_2 x_2', \quad x_3 = \lambda_3 x_3'$$

führt diesen Kegelschnitt in sich selbst über, wenn man hat

$$\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2 = 0.$$

Also ist dies noch auf einfach unendlich viele Arten möglich.

Da hierbei das Verhältnis $x_1 x_3 : x_2^2$ seinen Wert behält, so gehen alle Kegelschnitte des Büschels $x_1 x_3 - k x_2^2 = 0$ in sich selbst über. Hier hat man nun die reellen Transformationen in zwei Gruppen zu scheiden, je nachdem $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_3}$ oder $\lambda_2 = -\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}$ ist. Die der ersten Gruppe geben durch Wiederholungen und Combinationen unter einander nur wieder solche, die der zweiten aber liefern je zu zweien eine der ersten. Sind z. B. der Kegelschnitt und die Doppelpunkte reell, so werden dieselben von je einem Paar homologer Punkte getrennt oder nicht getrennt. Nur die Transformationen der ersten Gruppe lassen sich durch Wiederholung einer reellen, beliebig kleinen Transformation derselben Art erzeugen, und

sollen als *Bewegungen der Ebene* bezeichnet werden; die der andern Gruppe sind analog zu den Transformationen, welche symmetrisch gleiche Figuren erzeugen (§ 100).

Dann ist das Vorige in dem Satze zusammengefafst: *Bei einer Bewegung der Ebene geht der absolute Kegelschnitt in sich selbst über, und ebenso jeder Kegelschnitt (Kreis), der ihn in den beiden festbleibenden Punkten berührt.* Der Berührungspol ist das gemeinsame Centrum dieser Kreise, und die *Bewegung der Ebene* darf daher als eine *Rotation um diesen Punkt betrachtet werden.*

Da die Kreise auch dieselbe Axe haben und dualistisch entsprechende Eigenschaften gegen diese, *so ist Bewegung oder also Rotation ein sich selbst dualer Begriff.*

Fällt insbesondere das Rotationscentrum in den absoluten Kegelschnitt selbst, d. h. unendlich fern, so wird die Bewegung als *Translation der Ebene* zu bezeichnen sein. Die Bahnen der Punkte der Ebene sind Kegelschnitte, welche den absoluten im Translationscentrum vierpunktig berühren, nicht aber gerade Linien.

Nach diesen Erklärungen ist offenbar der Satz begründet: *Bei den Bewegungen der Ebene bleiben die Mafsverhältnisse ungeändert.* Diese Unveränderlichkeit der Mafsverhältnisse gilt aber auch von der andern Art der den absoluten Kegelschnitt in sich überführenden Transformationen und überdies von den im nächsten Kapitel einzuführenden reciproken Substitutionen.

Sobald jedoch der absolute Kegelschnitt selbst zerfällt, geht er nicht nur durch dreifach, sondern durch vierfach unendlich viele lineare Substitutionen in sich selbst über. Dreifach unendlich viele von ihnen zerfallen in zwei Gruppen, welche den Beziehungen der Congruenz — und diese sind die Bewegungen der Ebene — und der Symmetrie entsprechender Figuren zukommen; die ersteren lassen jeden der beiden Punkte bez. Strahlen des degenerirten Absoluten ungeändert, die letzteren vertauschen dieselben mit einander. Der letzten einfach unendlichen Reihe der erwähnten Transformationen entspricht aber die Verallgemeinerung der directen und der inversen Ähnlichkeit entsprechender Figuren (§ 100).

B. Überführung collinearer Systeme in centrale Lage. Geometrisch: Da die metrischen Relationen bei bloser Lagenveränderung ungestört bleiben, so verändern sich bei der gedachten Transformation die imaginären Kreispunkte im Unendlichen nicht. Nennen wir sie ω_1, ω_2, und entsprechen ihnen in dem zweiten Systeme, dessen Lage nicht verändert wird, Punkte ω_1', ω_2', so kann das Centrum der Collineation nur der Punkt C' sein, in welchem die Geraden $\omega_1\omega_1'$, $\omega_2\omega_2'$ sich schneiden. Wenn ihm im ersten System der Punkt C entspricht, so haben wir zum Vollzug der Transformation C mit C' zusammenzulegen und dann durch Drehung um den vereinigten Punkt ein beliebiges Paar entsprechende Punkte A, A' mit ihm in eine Gerade zu bringen. Dann liegt jedes andere Paar entsprechender Punkte B, B' auch in einer durch C gehenden Geraden; denn die Doppelverhältnisse der beiden Büschel $(C\,.\,\omega_1\omega_2AB)$ und $(C\,.\,\omega_1'\omega_2'A'B')$ sind einander gleich.

Analytisch: Die Gerade $\omega_1'\omega_1$ ist die Verbindungslinie des Punktes $u+iv\,|\,y\,|\,0$ mit dem Punkte

$$au+bv+cy+i(a_1u+b_1v+c_1y)\,|\,a_2u+b_2v+c_2y\,|\,0;$$

d. h. ihre Gleichung wird

$$(b_2-a_2i)\,\{(au+bv+cy)+i(a_1u+b_1v+c_1y)\}$$
$$-\{a_1+b+(ib_1-a)\}\,(a_2u+b_2v+c_2y)=0, \quad \text{oder}$$

$$(ab_2-a_2b)u+(a_2b_1-a_1b_2)v+\{(cb_2-c_2b)+(c_1a_2-c_2a_1)\}y$$
$$+i\{(a_1b_2-a_2b_1)u+(ab_2-a_2b)v+[(c_1b_2-c_2b_1)+(ac_2-a_2c)]y\}=0.$$

Die Gleichung der Geraden $\omega_2'\omega_2$ unterscheidet sich von ihr nur durch das Vorzeichen des mit i multiplicirten Teils, und der Punkt C' ist somit der Schnittpunkt der beiden durch das getrennte Verschwinden dieser Teile ausgedrückten Geraden.

Man erkläre daraus den Fall der Unbestimmtheit der Transformation.

393. **Elliptische und hyperbolische Geometrie** sind die für die Geometrie allgemeiner Maſsbestimmung gebräuchlichen Namen, je nachdem der absolute Kegelschnitt derselben imaginär oder reell ist (vgl. § 387). In der elliptischen Geometrie gibt es weder reelle unendlich ferne Punkte noch reelle Gerade, welche mit andern unendlich groſse Winkel bilden. Demzufolge kann man zu einer reellen Geraden durch einen reellen Punkt *keine reelle Parallele* ziehen. Eine weitere Folgerung zeigt dann, daſs *die Winkelsumme im Dreieck nicht*

constant, sondern gröfser als zwei Rechte ist und zwar um so gröfser, je gröfser das Dreieck ist.

Diese Eigenschaften weisen auf bekannte Besonderheiten der *Geometrie auf der Kugel* hin. Man kann die gewöhnliche sphärische Trigonometrie geradezu ein Beispiel zur allgemeinen elliptischen Trigonometrie nennen. Namentlich zeigt die sphärische Geometrie die volle Herrschaft des Dualitätsprincips. Streng genommen bezieht sich jedoch das Beispiel der elliptischen Geometrie nur auf die Geometrie der Durchmesser und Diametralebenen der Kegel, sofern sie am Centrum ein *Bündel* bilden. Ist der Scheitel dieses Bündels in der Entfernung Eins von der Ebene unserer Untersuchungen, so können wir die Distanz zweier Punkte der Ebene durch den Winkel ihrer Verbindungslinien mit dem Scheitel, den Winkel zweier Strahlen der Ebene durch den Winkel ihrer Verbindungsebenen mit dem Scheitel messen.

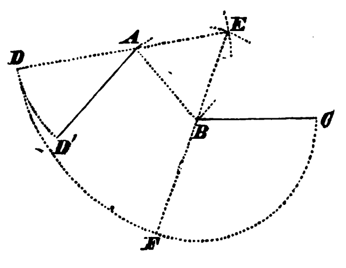
Ist der absolute Kegelschnitt reell, so gilt an allen Punkten aufserhalb desselben und auf allen ihn schneidenden Strahlen die hyperbolische, an allen Punkten des Innern und auf allen ihn nicht reell schneidenden Strahlen die elliptische Mafsbestimmung. Nur ein Büschel, dessen Scheitel im Innern liegt, kann von einem rotirenden Strahle desselben vollständig durchlaufen werden. Irgend zwei Punkte des Innern haben eine endliche, reelle Distanz, wenn wir die am Schlufs von § 391 eingeführte Constante c nach § 387 reell wählen. Denken wir uns im *Innern des Absoluten,* so kann keine Bewegung (§ 392) uns aus demselben herausführen, sondern für uns ist *die Ebene durch den selbst unerreichbaren absoluten Kegelschnitt völlig begrenzt.* Über das Äufsere können wir also gar nichts aussagen, was wir nicht durch besondere Definition einführen. Die Geometrie im Innern des absoluten Kegelschnittes, etwa eines Kreises, kommt der gewöhnlichen um so näher, je gröfser derselbe ist.

Wir haben in dieser Geometrie neben Geraden, deren Schnittpunkt im Innern liegt, auch solche, die sich nicht, d. h. im Äufseren schneiden und einen imaginären Winkel einschliefsen. Strahlen, die sich auf dem absoluten Kegel-

schnitt schneiden, bilden den Winkel Null, sind also parallel. Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden somit *zwei Parallelen,* die einen Winkel einschliefsen, dessen Gröfse von dem Abstand des Punktes von der Geraden abhängt. In dieser Geometrie ist dann *die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte,* und zwar um so kleiner, je gröfser das Dreieck ist.

394. **Parabolische Geometrie.** Wenn man den *absoluten Kegelschnitt als in ein Punktepaar degenerirt**) denkt, so vertritt die Verbindungslinie derselben den absoluten Kegelschnitt als Ort (§ 324). Eine gerade Punktreihe hat mit ihm daher nur zusammenfallende Punkte gemein; *die Metrik aller geraden Reihen des Systems ist daher speciell oder parabolisch* (§ 387), während dies für einen wirklichen absoluten Kegelschnitt nur für diejenigen Reihen eintritt, deren Träger ihn berühren. Weil dagegen jeder Punkt des Systems — mit alleiniger Ausnahme derer, die in der absoluten Geraden liegen — mit den beiden Punkten des absoluten Kegelschnittes ein Paar von Tangenten (Verbindungslinien) bestimmt, so *bleibt die Metrik des Strahlbüschels durch die allgemeinen Formeln des* § 387 *gegeben.*

Die Vergleichbarkeit der Distanzen von Punkten in verschiedenen Geraden fällt hinweg mit dem Verschwinden des Quadranten als der allgemeinen Einheit der Distanz. Nennt man aber einen durch die beiden Punkte des Absoluten gehenden (eingeschriebenen) Kegelschnitt einen *Kreis,* so kann derselbe *zur Vergleichung solcher Distanzen in verschiedenen Geraden* dienen. Der Pol der absoluten Linie in Bezug auf ihn wird sein Centrum, jene



Linie seine Axe der Einschreibung genannt, und es wird vorausgesetzt, dafs alle Punkte des Kreises äquidistant sind von seinem Centrum. Die Construction des Euklid, um durch

*) Ebenso kann offenbar eine Geometrie gedacht werden, bei welcher das Absolute aus einem Linienpaar besteht.

einen Punkt A eine Strecke AD oder AD' gleich der Strecke BC zu ziehen, gilt nach den hier gemachten Voraussetzungen: Man zieht AB, construirt über ihr das gleichseitige Dreieck ABE, verlängert seine Seiten, EA, EB über A und B hinaus, um von B aus auf die letztere $BF = BC$ abzutragen und dann aus E mit dem Kreise durch F die erstere in D zu schneiden.

Da aber die Längeneinheit in der Metrik der geraden Punktreihe unbestimmt ist, *so fällt die Möglichkeit einer Vergleichung der Distanzen innerhalb der Reihe mit Distanzen (Winkeln) innerhalb des Büschels weg.* Dagegen kann *die Distanz eines Punktes von einer Geraden* mit der Distanz zweier Punkte verglichen werden, da sie die Distanz desjenigen Punktes der Geraden von ihm ist, in welchem der der Geraden in Bezug auf das absolute Punktepaar conjugirt harmonische Strahl aus ihm sie schneidet.

Wenn die Coordinaten der beiden Punkte des absoluten Kegelschnittes durch y_i' und y_i'' bezeichnet sind, so wird seine Gleichung in Liniencoordinaten ($\varDelta = 0$)

$$\Sigma \equiv 2(y_1'\xi_1 + y_2'\xi_2 + y_3'\xi_3)(y_1''\xi_1 + y_2''\xi_2 + y_3''\xi_3) = 0.$$

Mit der leicht verständlichen Bezeichnung der Determinante aus den Coordinaten dreier Punkte lautet die Gleichung der absoluten Linie $(x, y', y'') = 0$ und es tritt $(xy'y'')^2$ an die Stelle von $\varDelta S$ (§ 371). Daher gelten für die Distanz zweier Geraden ξ_i, ξ_i' die Ausdrücke

$$\text{arc cos} \frac{\xi_{y'}\xi'_{y''} + \xi'_{y'}\xi_{y''}}{\sqrt{\Sigma\Sigma'}}, \qquad \text{arc sin} \frac{(y_2'y_3'' - y_2''y_3')(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3) + \cdots}{\sqrt{\Sigma\Sigma'}}.$$

Für die Distanz zweier Punkte x_i, x_i' dagegen erhält man durch denselben Grenzübergang aus dem arc sin wie in § 386 und mit einem verfügbaren Factor $\mathbf{C}$, den algebraischen Ausdruck

$$\mathbf{C} \cdot \frac{\sqrt{2(x, x', y')(x, x', y'')}}{(x, y', y'')(x', y', y'')},$$

dessen Zähler, gleich Null gesetzt, angibt, daſs die Verbindungsgerade x_i, x_i' durch einen der absoluten Punkte geht.

Die elementare Metrik der Ebene ist der besondere Fall

der parabolischen Metrik, in welchem die absoluten Richtungen das degenerirte Absolute vertreten (vgl. B. 2) 3)). Die rechtwinkligen, nicht homogenen Coordinaten eignen sich zu den metrischen Untersuchungen infolge der einfachen Lage ihrer Fundamentalelemente zum Absoluten.

B. 1) Die Entfernung des Punktes x_i von der Geraden ξ_i' ist durch Übergang vom Bogen zum Sinus und Unterdrückung des verschwindenden Factors gleich

$$\frac{\xi_x'}{(x, y', y'')\sqrt{\Sigma}}.$$

2) Wenn man die Tangentialgleichung des absoluten Kegelschnittes in der Form $\Omega \equiv 0$ des § 380 voraussetzt, so nehmen die vorigen Relationen bekannte specielle Formen an, wenn man setzt:

$$y_1' = y_1'' = 1, \quad y_2' = -\cos A_3 - i \sin A_3, \quad y_2'' = -\cos A_3 + i \sin A_3,$$
$$y_2' = -\cos A_2 + i \sin A_2, \quad y_3'' = -\cos A_2 - i \sin A_2.$$

Z. B. wird, wenn man die Constante $C = -1 : 2\sqrt{2}$ setzt, (§ 71)

$$\overline{xx'} = \frac{\{(x_2 x_3' - x_2' x_3)^2 + \cdots - 2\cos A_3 (x_2 x_3' - x_3' x_2)(x_3 x_1' - x_3' x_1)\}^{\frac{1}{2}}}{(x_1 \sin A_1 + \cdot\cdot)(x_1' \sin A_1 + \cdot\cdot)}.$$

3) Setzt man

$$y_1' : y_2' : y_3' = 1 : i : 0, \quad y_1'' : y_2'' : y_3'' = 1 : -i : 0,$$

so ist die Gleichung des absoluten Kegelschnittes auf $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ oder $\xi^2 + \eta^2 = 0$ reducirt, oder er besteht aus den zwei Punkten, in welchen der Kreis $x^2 + y^2 = 0$ die unendlich entfernte Gerade $z = 0$ schneidet. Die Substitution liefert als Ausdruck der Distanz der Punkte $x|y$ und $x'|y'$ wegen der Reduction der Determinantenproducte auf

$$[y - y' + i(x - x')][y - y' - i(x - x')] \quad \text{und } 4i^2$$

die bekannte Formel $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

Ebenso erhält man für die Distanz der Linien $\xi|\eta|\zeta$; $\xi'|\eta'|\zeta'$

$$\text{arc cos} \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} \quad \text{oder} \quad \text{arc sin} \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}.$$

Endlich ist der Abstand des Punktes $x|y$ von der Geraden $\xi'|\eta'|\zeta'$

$$= \frac{\xi' x + \eta' y + \zeta'}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}.$$

4) Man berechne den Inhalt des gemeinsamen Polardreiecks zweier Kegelschnitte $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.

Der Ausdruck seines Quadrats verschwindet, wenn sich die Kegelschnitte berühren — sein Zähler erhält den Ausdruck des § 358 $4(\Theta_1^2 - 4\Delta_1\Theta_2)(\Theta_2^2 - 3\Delta_2\Theta_1) - (\Theta_1\Theta_2 - 9\Delta_1\Delta_2)^2$ als Factor; er ist positiv, wenn sie sich in vier reellen oder in vier imaginären Punkten schneiden, und negativ, wenn nur zwei der Schnittpunkte reell sind; er wird unendlich grofs, wenn zwei der gemeinsamen Sehnen einander parallel sind. Sein Nenner ist daher die Resultante der Gleichungen

$$k^3\Delta_1 + k^2\Theta_1 + k\Theta_2 + \Delta_2 = 0,$$

und $$k^2 A_{33} + k(a_{11}a_{22}' + a_{11}'a_{22} - 2a_{12}a_{12}') + A_{33}' = 0;$$

die linke Seite der letzteren ist der Nenner der Coordinaten der drei Punkte des Tripels.

5) Sehne des Kegelschnittes $S = 0$ in der Geraden $a_x = 0$.

Wir denken die trimetrischen Coordinaten als die normalen Abstände von den Fundamentallinien, so dafs $l_x = M$ (§ 68) der doppelte Inhalt ihres Dreiecks ist Wenn dann die Gerade den Kegelschnitt in zwei Punkten y, z schneidet, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0 \end{vmatrix} \equiv \binom{a}{a}$$

oder die mit dem Saum der a_i rechts und unten versehene Discriminante positiv ist, so liefert die Elimination der Veränderlichen x_i zwischen der Gleichung der Geraden, der des Kegelschnittes und der Gleichung $\xi_x = 0$ die mit zwei Reihen gesäumte Discriminante, gleich Null:

$$\binom{a\xi}{a\xi} \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_1, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_2, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_3, & \xi_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0, & 0 \end{vmatrix} \equiv \Sigma \mathfrak{a}_{ik}\xi_i\xi_k = 0.$$

Diese Bedingung gilt für die durch die Schnittpunkte y, z gehenden Geraden, so dafs $\Sigma\mathfrak{a}_{ik}\xi_i\xi_k \equiv \xi_i\xi_z$ sein mufs, und daher die Relationen gelten $2\mathfrak{a}_{ik} = \theta(y_i z_k + y_k z_i)$, wo θ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Infolge $l_y = M$, $l_z = M$ erhält man durch Multiplication

$$\theta M^2 = \Sigma\mathfrak{a}_{ik} l_i l_k \equiv \binom{al}{al};$$

die rechts stehende Gröfse gibt durch ihr Verschwinden die Be-

dingung, unter welcher die gegebene Gerade einer Asymptote des Kegelschnittes parallel ist. Nun ist ferner

$$\theta^2 (y_2 z_3 - y_3 z_2)^2 = 4 (\mathfrak{a}_{23}{}^2 - \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}) = 4 a_1{}^2 \binom{a}{a},$$

also ist
$$y_2 z_3 - y_3 z_2 = \frac{2 M^2 \binom{a}{a}^{\frac{1}{2}}}{\binom{al}{al}} a_1,$$
und analog

$$y_3 z_1 - y_1 z_3 = \frac{2 M^2 \binom{a}{a}^{\frac{1}{2}}}{\binom{al}{al}} a_2, \quad y_1 z_2 - y_2 z_1 = \frac{2 M^2 \binom{a}{a}^{\frac{1}{2}}}{\binom{al}{al}} a_3.$$

Substituirt man diese Werte in die Distanzformel

$$d^2 = \frac{l_1{}^2 l_2{}^2 l_3{}^2}{M^4} \{ (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + \cdots - 2 (y_2 z_3 - y_3 z_2)(y_3 z_1 - y_1 z_3) \cos A_3 - \cdots \},$$

so erhält man für die Länge der Sehne $\overline{yz}$ den Ausdruck[156])

$$d^2 = 4 l_1{}^2 l_2{}^2 l_3{}^2 \frac{\binom{a}{a}}{\binom{al}{al}^2} \{ a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 - 2 a_2 a_3 \cos A_1 - 2 a_3 a_1 \cos A_2 - 2 a_1 a_2 \cos A_3 \}.$$

Hier gibt die Parenthese durch ihr Verschwinden die Bedingung $\Omega_a = 0$, unter welcher die gegebene Gerade $a_x = 0$ durch einen der unendlich fernen imaginären Kreispunkte geht.

Ist dann ferner $a_x - \lambda l_x = 0$ eine zur gegebenen Geraden parallele Sehne, so kann der Ausdruck für die Distanz ihrer Schnittpunkte durch Substitution von $a_i - \lambda l_i$ in das $\binom{a}{a}$ und Ω_a des vorigen Ausdrucks erhalten werden und liefert dann

$$d_1{}^2 = \frac{4 l_1{}^2 l_2{}^2 l_3{}^2}{\binom{al}{al}^2} \left\{ \binom{a}{a} - 2\lambda \binom{l}{a} + \lambda^2 \binom{l}{l} \right\} \left\{ \Omega_a - 2\lambda \Omega_{al} + \lambda^2 \Omega_l \right\},$$

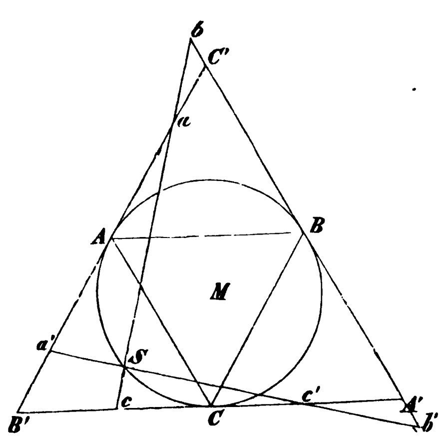
wenn in $\binom{l}{a}$ die Discriminante rechts mit l_i, unten mit a_i gesäumt ist und

$$\Omega_{al} \equiv a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 - (a_2 l_3 + a_3 l_2) \cos A_1 - (a_3 l_1 + a_1 l_3) \cos A_2 - (a_1 l_2 + a_2 l_1) \cos A_3.$$

395. **Verallgemeinerung metrischer Sätze.** Die Erkenntnis der wahren Natur der metrischen Relationen gestattet nunmehr in verschiedenen Fällen die wahrhaft allgemeine Gestalt von geometrischen Sätzen aufzufinden, welche durch darein eingehende metrische Relationen aus jener Sphäre von Wahrheiten ausgeschlossen sind, die das Princip der Dualität verbindet. So ist es in dem Falle des Satzes (§ 332, 3) von der Berührung der einem Dreieck eingeschriebenen Kreise mit dem Kreise, welcher die Mittelpunkte der Seiten des

Dreiecks enthält. Wir haben bereits auf dem analytischen Wege im § 370 die allgemeinere Form bewiesen, welche demselben zukommt: Die vier Kegelschnitte, welche dieselben drei Punkte oder Tangenten haben und zugleich einen festen Kegelschnitt doppelt berühren, werden sämmtlich von einem Kegelschnitt berührt, der mit dem gegebenen Kegelschnitt auch in doppelter Berührung ist. Die Auffassung der imaginären Kreispunkte als eines Kegelschnittes, welcher mit den eingeschriebenen Kreisen eine doppelte Berührung hat, weil jene in diesen liegen, führt ohne Weiteres zu ihr. Wenn der gemeinschaftlich berührende Kreis die Höhenfufspunkte des Dreiecks enthält, so erkennt man, dafs der gemeinschaftlich berührende Kegelschnitt durch die Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Geraden aus den bez. Gegenecken geht, welche ihnen in Bezug auf den festen Kegelschnitt conjugirt sind, etc.

B. 1) Man hat den elementaren Satz: Wenn man durch den Scheitel S eines rechten Winkels einen Kreis und an ihn drei Tangenten so legt, dafs die zwischen dem Berührungspunkt und den Schenkeln des rechten Winkels enthaltenen Segmente einer jeden Aa, Aa'; Bb, Bb'; Cc, Cc' von gleicher Länge sind, so bilden die Berührungspunkte und also auch die drei Tangenten ein gleichseitiges Dreieck. Darnach ist der Kreis dem Tangentendreieck eingeschrieben und berührt also seine Seiten in ihren Mittelpunkten, d. h. in den conjugirt harmonischen zu den unendlich fernen Punkten der Seiten; somit ist die unendlich entfernte Gerade die Harmonicale desjenigen Punktes in Bezug auf das Dreieck (vgl. § 64, 1), in welchem sich die drei Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken schneiden (§ 315), und sie ist zugleich seine Polare in Bezug auf den Kreis. Die Schenkel des Winkels bSb' bilden mit den in jener unendlich entfernten Geraden gelegenen Punkten der Curve eine harmonische Gruppe.



Denken wir dann einen Kegelschnitt, der irgend drei Gerade berührt, so ist die Polare des Schnittpunktes der drei von den Berührungspunkten nach den Gegenecken des umgeschriebenen Dreiecks gezogenen Geraden wieder zugleich die Harmonicale desselben in Bezug auf das Dreieck; sie schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, mit welchen diejenigen Geraden eine harmonische Gruppe bilden, welche die Schenkel des rechten Winkels vertreten. Sie bestimmen in den Dreiecksseiten Punkte, welche mit den Ecken Involutionen erzeugen, für welche jeder Berührungspunkt ein Doppelpunkt ist. Solche zwei Gerade also schneiden sich immer in der Peripherie des eingeschriebenen Kegelschnittes; ihre Schnittpunkte bilden mit den Seiten des Dreiecks, den bez. Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnittes, und den Punkten in der Polare je ein harmonisches System; ihre Schnittpunkte mit je einer Seite liegen in einem Kegelschnitt, der den entsprechenden Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnittes zum Pol jener Polare hat, und für welchen und den eingeschriebenen Kegelschnitt sie eine gemeinsame Sehne ist.

Endlich aber darf man die Schenkel des rechten Winkels durch eine Curve zweiter Ordnung ersetzen; denn die drei Punktepaare in den Seiten des Dreiecks, welche mit den Ecken Involutionen bestimmen, die den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnittes zum Doppelpunkt haben, liegen in einem Kegelschnitt, der die Polare zu der ihm mit jener gemeinsamen Sehne hat. Dann gilt der Satz: Für jede Gerade, welche mit diesen Kegelschnitten eine harmonische Teilung bestimmt, liegt der in Bezug auf den einen genommene Pol in dem andern.

2) Wenn zwei Kegelschnitte $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ und das gemeinschaftliche Polardreieck, ferner auf S_2 zwei Punkte A, B und ihre Tangenten AT, BT, sowie die zu diesen in Bezug auf $S_1 = 0$ harmonisch conjugirten Geraden AT', BT' gegeben sind, so bestimmt die Harmonicale von T in Bezug auf das Polardreieck in S_2 zwei Punkte C und D, für welche die zu ihren Tangenten in Bezug auf S_1 harmonisch conjugirten Geraden durch denselben Punkt T' gehen.

Denn in Bezug auf den Kegelschnitt $S_1 \equiv \Sigma x_i^2 = 0$ sind die Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$ harmonisch conjugirt, wenn $\Sigma a_i b_i = 0$ ist; ist also x_i' einer der betrachteten Punkte von $S_2 \equiv \Sigma \lambda_i x_i^2 = 0$, so ist die zu seiner Tangente harmonische Gerade durch

$$(\lambda_2 - \lambda_3) x_2' x_3' x_1 + (\lambda_3 - \lambda_1) x_3' x_1' x_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) x_1' x_2' x_3 = 0$$

dargestellt und schneidet die den Punkten x_i'', x_i''' entsprechenden Geraden derselben Art im nämlichen Punkte, wenn

$$\begin{vmatrix} x_2' x_3' \,, & x_3' x_1' \,, & x_1' x_2' \\ x_2'' x_3'' , & x_3'' x_1'' , & x_1'' x_2'' \\ x_2''' x_3''' , & x_3''' x_1''' , & x_1''' x_2''' \end{vmatrix} = 0$$

ist. Der Lage der Punkte x', x_i'', x_i''' auf dem Kegelschnitt $S_2 = 0$ entspricht $(x'^2, x''^2, x'''^2) = 0$, und da die Summe dieser letzteren und der doppelten ersten Determinante dem Producte von

$$\{x_1'(x_2''x_3''' + x_2'''x_3'') + x_1''(x_2'''x_3' + x_2'x_3''') + x_1'''(x_2'x_3'' + x_2''x_3')\}$$

in die Determinante (x', x'', x''') gleich ist, so mufs die erste von diesen Gröfsen gleich Null sein, weil die letzte es nicht sein kann. Die Gleichung der die Punkte x_i', x_i'' verbindenden Geraden liefert aber für die Coordinaten ihres Pols T in Bezug auf den Kegelschnitt $S_2 = 0$

$$\frac{x_2'x_3'' - x_3''x_2'}{\lambda_1} : \frac{x_3'x_1'' - x_3''x_1'}{\lambda_2} : \frac{x_1'x_2'' - x_1''x_2'}{\lambda_3},$$

d. h., da nach den Gleichungen $\lambda_1 x_1'^2 + \cdots = 0$, $\lambda_1 x_1''^2 + \cdots = 0$ die Relation besteht

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (x_2'^2 x_3''^2 - x_2''^2 x_3'^2) : (x_3'^2 x_1''^2 - x_3''^2 x_1'^2) : (x_1'^2 x_2''^2 - x_1''^2 x_2'^2),$$

auch $$\frac{1}{x_2'x_3'' + x_2''x_3'} : \frac{1}{x_3'x_1'' + x_3''x_1'} : \frac{1}{x_1'x_2'' + x_1''x_2'}.$$

Die Harmonicale dieses Punktes in Bezug auf das Fundamentaldreieck ist daher durch die Gleichung ausgedrückt

$$x_1(x_2'x_3'' + x_2''x_3') + x_2(x_3'x_1'' + x_3''x_1') + x_3(x_1'x_2'' + x_1''x_2') = 0;$$

und da sie für die Substitution der Coordinaten x_i''' an Stelle von x_i in die oben aufgestellte Relation übergeht, so enthält diese Gerade den Punkt C. Ein analoger Beweis gilt auch dem Punkt D.

Denkt man den Kegelschnitt $S_1 = 0$ in das Paar der imaginären Kreispunkte degenerirt, so werden die in Bezug auf ihn den Tangenten $S_2 = 0$ in A und B, C und D harmonisch conjugirten Geraden zu den Normalen von $S_2 = 0$ in A und B, C und D; das gemeinschaftliche System harmonischer Pole liefert das Centrum, und die unendlich fernen Punkte der Axen von S_2; und die Harmonicale des Pols T von AB in Bezug auf dasselbe wird als die Verbindungslinie der Punkte erkannt, welche in den Axen auf den entgegengesetzten Seiten vom Centrum die Abstände des Punktes T haben; diese Linie bestimmt auf S_2 das Paar von Punkten C, D, deren Normalen mit den Normalen in A und B in demselben Punkte T' zusammentreffen.[157])

3) Wenn man die Normale eines Kegelschnittes $U = 0$ in einem seiner Punkte X_i als die der Tangente in Bezug auf einen andern festen — den absoluten — Kegelschnitt $V = 0$ conjugirte

Gerade durch den Punkt auffaſst, so besteht das Problem, *die Normalen von einem beliebigen Punkte x_i aus an den Kegelschnitt $U=0$ zu ziehen,* darin, den Punkt X_i desselben so zu bestimmen, daſs die Gerade xX durch den Pol der Tangente in X an $U=0$ in Bezug auf $V=0$ geht. In dieser Fassung ist das Problem der allgemeinen analytischen Behandlung zugänglich.[158])

Sind u, v die Werte der Functionen U, V, welche man erhält, wenn man die X_i durch die x_i ersetzt, und bezeichnen wieder Indices die halben nach den zugehörigen Variabeln gebildeten Ableitungen, so hat man als die Gleichungen des Problems

$$U=0,\quad v_1=\lambda U_1+\mu V_1,\quad v_2=\lambda U_2+\mu V_2,\quad v_3=\lambda U_3+\mu V_3.$$

Die entwickelte Form der letzteren drei Gleichungen ist, für a_{ik} und b_{ik} als Coefficienten von U und V,

$$b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3=(\lambda a_{11}+\mu b_{11})X_1+(\lambda a_{12}+\mu b_{12})X_2+(\lambda a_{13}+\mu b_{13})X_3,$$
$$b_{12}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3=(\lambda a_{12}+\mu b_{12})X_1+(\lambda a_{22}+\mu b_{22})X_2+(\lambda a_{23}+\mu b_{23})X_3,$$
$$b_{13}x_1+b_{23}x_2+b_{33}x_3=(\lambda a_{13}+\mu b_{13})X_1+(\lambda a_{23}+\mu b_{23})X_2+(\lambda a_{33}+\mu b_{33})X_3,$$

und wenn man die aus den Elementen $\lambda u_{ik}+\mu v_{ik}$ oder $\lambda a_{ik}+\mu b_{ik}$ gebildete Determinante mit Δ bezeichnet, so liefern sie aufgelöst

$$\Delta X_1=v_1\Delta_{11}+v_2\Delta_{12}+v_3\Delta_{13},\quad \Delta X_2=v_1\Delta_{21}+v_2\Delta_{22}+v_3\Delta_{23};$$
$$\Delta X_3=v_1\Delta_{31}+v_2\Delta_{32}+v_3\Delta_{33}.$$

Durch Substitutionen in $U=0$ kommt die Endgleichung

$$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik}v_p\Delta_{ip}v_q\Delta_{kq}=0.$$

Nach der Determinantenrelation $\Delta_{ip}\Delta_{kq}=\Delta_{ik}\Delta_{pq}-\Delta\Delta_{ik,pq}$ geht sie über in

$$\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik}\Sigma\Sigma v_pv_q\Delta_{pq}-\Delta\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik}v_pv_q\Delta_{ik,pq}=0;$$

da u_{ik} auch Ableitung von $\lambda u_{ik}+\mu v_{ik}$ nach λ ist, so ist

$$\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik}=\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda},\quad \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik}v_pv_q\Delta_{ik,pq}=\frac{\partial(\Sigma\Sigma v_pv_q\Delta_{pq})}{\partial\lambda}.$$

Die Endgleichung erhält für $\Omega=\Sigma\Sigma v_pv_q\Delta_{pq}$ die Form

$$\Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}-\Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=0.$$

Sie bezeichnet für x_i als Veränderliche einen Kegelschnitt von folgender Entstehung: Er ist der Ort der in Bezug auf den Kegelschnitt $v=0$ genommenen Pole der Geraden, welche für die Punkte von $u=0$ die Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt $\lambda u+\mu v=0$ sind, der durch die gemeinschaftlichen Punkte von $u=0$ und $v=0$ hindurchgeht. Sie ist bei festen x_i biquadratisch in $\lambda:\mu$, und die Discussion derselben führt auf die vollständige Lösung des Problems der Normalen (§ 192).

Einundzwanzigstes Kapitel.

Von den reciproken Verwandtschaften.

396. **Lineare Reciprocität.** Als die wichtigsten Übertragungsmethoden der analytischen wie der reinen Geometrie haben wir die Lehre von den linearen Substitutionen oder Verwandtschaften und das Dualitätsprincip erkannt. Diese beiden Mittel gestatten aber noch eine Verschmelzung in einer neuen Classe von Verwandtschaften. Ihrem analytischen Ausdruck nach sind auch diese in der Eigenschaft der linearen Substitutionen, an die Stelle dreier Variabeln drei neue Variabeln einzuführen, enthalten.

Offenbar bleibt die analytische Theorie der §§ 89, 90 absolut ungeändert, wenn wir das eine System von Veränderlichen als Punktcoordinaten, das andere jedoch als Liniencoordinaten interpretiren, also die Substitutionen schreiben

$$\mu \xi_i' = \Sigma \alpha_{ik} x_k \quad \text{oder} \quad \mu \xi_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3, \text{ etc.},$$

und die Umkehrungen

$$\frac{\Delta}{\mu} x_i = \Sigma \mathsf{A}_{ki} \xi_k'.$$

Hiernach ist jedem Punkte x_i des ungestrichenen ebenen Systems eine Gerade ξ_i' des gestrichenen ebenen Systems zugeordnet. Ebenso ist auch jedem Punkte x_i' des gestrichenen Systems eine Gerade ξ_i des ungestrichenen zugeordnet, nämlich durch die transponirten Substitutionen

$$\nu \xi_i = \Sigma \alpha_{ki} x_k', \quad \frac{\Delta}{\nu} x_i' = \Sigma \mathsf{A}_{ik} \xi_k,$$

weil $\mu \xi_{x'}'$ und $r \xi_x$ nur dann identisch werden. Im allgemeinen,

nämlich so lange α_{ik} von α_{ki} verschieden ist, *entsprechen demselben Element (Punkt, Strahl) der Ebene verschiedene reciproke Elemente (Strahl, Punkt),* je nachdem man es zum einen oder andern System gehörig ansieht.

Die ausnahmslos eindeutige Verwandtschaft zwischen je einem ebenen System von Punkten und einem ebenen System von Geraden wird als lineare Reciprocität bezeichnet. Unmittelbar evidente Analoga zu Sätzen der Collineation sind: *Punktreihen des einen Systems sind Strahlbüschel des andern reciprok; reciproke Reihen und Büschel sind projectivisch* (doppelverhältnisgleich § 89). *Vier Paare reciproker Elemente bestimmen die Verwandtschaft;* die Construction des einem gegebenen entsprechenden Elementes geschieht durch zweimalige Zuordnung in reciproken Elementargebilden (§ 79). *Zwei zu einem dritten reciproken Systeme sind zu einander collinear.*

Die ungestrichenen und die gestrichenen Variabeln können auf *zwei unabhängige Coordinatensysteme* bezogen werden. Die Substitutionscoefficienten haben dann dieselbe Bedeutung wie in § 90. Werden daher den ungestrichenen Fundamentalpunkten die gestrichenen Fundamentallinien, dem Einheitpunkt dort die Einheitlinie hier als reciprok zugeordnet, so treten an die Stelle der Substitutionen die einfachen Proportionalitäten

$$\xi_1' : \xi_2' : \xi_3' = x_1 : x_2 : x_3, \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_1' : x_2' : x_3'.$$

In den folgenden Untersuchungen werden wir dagegen *alle Coordinaten auf dieselben Fixlemente* beziehen; die vorigen Proportionalitäten definiren dann *nicht* mehr die *allgemeine* Reciprocität.

397. **Pol- und Polarkegelschnitt.** Nach den allgemeinen Substitutionen besteht zwischen den Coordinaten zweier Punkte, von denen der eine in der reciproken Geraden des andern liegt, die bilineare Gleichung

$$\Sigma\alpha_{ik}x_i'x_k = 0 \quad \text{oder} \quad x_1'\Sigma\alpha_{1k}x_k \equiv x_1\Sigma\alpha_{k1}x_k' = 0.$$

Daher gibt es auch *Punkte, die auf den ihnen reciproken Geraden liegen,* d. h. für deren Coordinaten $x_i = x_i'$ obige Gleichung befriedigt ist. Diese Punkte liegen daher auf dem Kegelschnitt $\Sigma\alpha_{ik}x_ix_k \equiv 0$ oder

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})x_2x_3$$
$$+ (\alpha_{31} + \alpha_{13})x_3x_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})x_1x_2 = 0,$$

welchen man den *Polkegelschnitt der Reciprocität* nennt. Durch jeden Punkt desselben gehen zwei Strahlen p, p', welche ihm reciprok zugeordnet sind, je nachdem er als P' oder P angesehen wird.

Ebenso gilt für zwei Strahlen, deren einer durch den reciproken Punkt des andern geht, die Relation $\Sigma A_{ik}\xi_i'\xi_k = 0$ und *die Strahlen, welche durch die ihnen reciproken Punkte gehen*, umhüllen einen Kegelschnitt $\Sigma A_{ik}\xi_i\xi_k = 0$, welchen man zum Unterschied von dem vorigen den *Polarkegelschnitt der Reciprocität* nennt. Seine Gleichung kann man in den Substitutionscoefficienten selbst schreiben

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \xi_1 \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \xi_2 \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man nennt diese beiden Kegelschnitte die *Ordnungscurven reciproker Systeme*, denn mit ihrer Hilfe definirt man leicht den Zusammenhang entsprechender Elemente. Einem Punkte des Polkegelschnittes entspricht die eine oder andere der von ihm an den Polarkegelschnitt gehenden Tangenten, je nachdem man ihn als dem ersten oder zweiten System angehörig betrachtet; einer Tangente des Polarkegelschnittes entspricht der eine oder der andere von ihren Schnittpunkten mit dem Polkegelschnitt, je nachdem man sie dem einen oder andern System angehörig ansieht. Ist dann aber *einem* Punkte des Polkegelschnittes, als zu einem der Systeme gerechnet, eine bestimmte der Tangenten zugeordnet, so kann für jeden folgenden Punkt keine Zweideutigkeit mehr bestehen. Denn bewegt sich der ursprüngliche Punkt auf dem Polkegelschnitt in eine zweite Lage, so mufs auch die reciproke Tangente des Polarkegelschnittes continuirlich in die der zweiten Lage entsprechende übergehen. Dasselbe Stetigkeitsprincip gilt im dualistischen Fall.

Um nun die Geraden p', p zu bestimmen, die einem be-

liebigen Punkte P, P' der Ebene entsprechen, zieht man von ihm an den Polarkegelschnitt die Tangenten $P\mathfrak{P}_1$, $P\mathfrak{P}_2$; bestimmt ihre Schnittpunkte P_1, P_1'; P_2, P_2' bez. mit dem Polarkegelschnitt so, dafs, wenn $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ bewegt wird, P_1 mit P_2, P_1' mit P_2' zusammenfällt, und erhält in dem Paare ihrer Verbindungslinien $P_1'P_2'$, P_1P_2 die Geraden p', p, die dem Punkte entsprechen. Um den einer gegebenen Geraden p, p' entsprechenden Punkt zu finden, bestimmt man ihre Schnittpunkte P_1, P_2 mit dem Polkegelschnitt und zieht von diesen die Tangenten $P_1\mathfrak{P}_1$, $P_1\mathfrak{P}_1'$; $P_2\mathfrak{P}_2$, $P_2\mathfrak{P}_2'$ bez. an den Polarkegelschnitt so, dafs P_1, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1'$ stetig in P_2, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_2'$ übergeführt werden; entsprechen dann $P_1\mathfrak{P}_1'$, $P_2\mathfrak{P}_2'$ den P_1 und P_2 im ersten System, so ist ihr Schnittpunkt P der der Geraden entsprechende Punkt im ersten und $P_1\mathfrak{P}_1$, $P_2\mathfrak{P}_2$ der ihr entsprechende P' im zweiten System. Insbesondere nennt man den der unendlich fernen Geraden eines Systems reciproken Punkt den *Gegenpunkt* des andern Systems (vgl. § 99).

398. **Involutorisches Tripel.** *Die beiden Ordnungscurven sind mit einander in doppelter Berührung.* Denn für einen Schnittpunkt derselben fallen beide ihm reciproken Gerade mit der in ihm berührenden Tangente des Polarkegelschnittes zusammen. Es müssen daher auch, damit dieser Geraden nur *ein* Punkt reciprok sei, die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem Polkegelschnitt zusammenfallen. Also berührt dieselbe den Ort und die Enveloppe in jedem ihrer gemeinschaftlichen Punkte; ihre vier Schnittpunkte vereinigen sich daher in zwei Berührungspunkte. Man beweist dies auch analytisch, indem man die Gleichung des Polarkegelschnittes in Punktcoordinaten $V=0$ bildet und nachweist, dafs sie für $U=0$ als Gleichung des Polkegelschnittes in die Form

$$V \equiv \{(A_{23}-A_{32})x_1+(A_{31}-A_{13})x_2+(A_{12}-A_{21})x_3\}^2 \\ +4(\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{22}A_{22}+\alpha_{33}A_{33})U=0$$

gesetzt werden kann, aus welcher die Gleichung der Berührungssehne ersichtlich ist. In Folge dieses Zusammenhanges entfällt auch die scheinbare Zweideutigkeit der vorher gegebenen Construction.

In derselben sind nach § 309 die Punktreihen zweiter Ordnung $P_1, P_2, \ldots; P_1', P_2', \ldots$ auf $U = 0$, ebenso die Strahlbüschel zweiter Classe $P_1 \mathfrak{P}_1$, $P_2 \mathfrak{P}_2, \ldots; P_1 \mathfrak{P}_1'$, $P_2 \mathfrak{P}_2', \ldots$ an $V = 0$ unter einander derart projectivisch, dafs ihre Doppelelemente die Schnittpunkte A_1, A_3 der reellen Berührungssehne $A_1 A_3$, bez. die gemeinsamen Tangenten $A_2 A_1$, $A_2 A_3$ des reellen Berührungspols A_2 sind; dafs ferner der Schnittpunkt der Verbindungslinien $P_1 P_2'$, $P_2 P_1'$ auf $A_1 A_3$ liegt, bez. die Verbindungslinie der Schnittpunkte $P_1 \mathfrak{P}_1 \mid P_2 \mathfrak{P}_2'$, $P_2 \mathfrak{P}_2 \mid P_1 \mathfrak{P}_1'$ durch A_2 geht. Diese Bemerkung genügt in der Tat, um die Construction ohne Benutzung des Stetigkeitsprincips eindeutig zu machen.

Gemäfs dieser Construction sind *die beiden Berührungspunkte* A_1, A_3 *und die durch sie gehenden gemeinsamen Tangenten* $A_1 A_2$, $A_3 A_2$, *daher der Berührungspol* A_2 *und die Berührungssehne* $A_1 A_3$ *reciprok*, ob man sie nun zum einen oder andern System rechnet, also wie wir sagen wollen, *involutorisch reciprok.* Von diesen drei Punkten und Geraden liegen also zwei reciproke Paare in einander, das dritte, stets reelle, aber nicht.

Es gibt nur ein Tripel involutorisch reciproker Elemente in einer Reciprocität. Denn, damit für einen Punkt $x_i = y_i$, $x_i' = y_i$ die reciproken Geraden ξ_i' und ξ_i zusammenfallen, müssen die Gleichungen bestehen

$$\mu \xi_i' = \varrho \nu \xi_i \quad \text{oder} \quad \Sigma (\alpha_{ik} - \varrho \alpha_{ki}) y_i = 0,$$

was nur für drei Werte von ϱ möglich ist (vgl. § 97).

Den einfachsten analytischen Ausdruck der Reciprocität erhält man in Bezug auf das involutorische Tripel als Fundamentaldreieck. Denn, sollen den Punkten $1|0|0$, $0|1|0$, $0|0|1$ die Geraden $0|0|1$, $0|1|0$, $1|0|0$ vertauschbar entsprechen, so müssen $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{33} = 0$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{32} = 0$ sein; also lauten die Substitutionen

$$\mu \xi_1' = \alpha_{13} x_3, \quad \mu \xi_2' = \alpha_{22} x_2, \quad \mu \xi_3' = \alpha_{31} x_1,$$
$$\nu \xi_1 = \alpha_{31} x_3', \quad \nu \xi_2 = \alpha_{22} x_2', \quad \nu \xi_3 = \alpha_{13} x_1',$$

und die Gleichungen der Ordnungscurven (§ 397)

$$\alpha_{12} x_2^2 + (\alpha_{31} + \alpha_{13}) x_1 x_3 = 0, \quad \alpha_{31} \alpha_{13} \xi_2^2 + \alpha_{22} (\alpha_{31} + \alpha_{13}) \xi_1 \xi_3 = 0.$$

Im allgemeinen, nämlich so lange $\alpha_{13} \gtrless \alpha_{31}$ ist, entspricht jedem Elemente der Ebene nur *ein* anderes als *doppelt reciprok* (vgl. § 296), einem Punkte der Schnittpunkt seiner beiden reciproken Strahlen p, p', einem Strahl die Verbindungsgerade seiner beiden reciproken Punkte P, P'. Die Coordinaten y_i und η_i dieser Elemente sind

$$y_1 : y_2 : y_3 = \alpha_{22} x_2 x_1 : -(\alpha_{31} + \alpha_{13}) x_1 x_3 : \alpha_{22} x_3 x_2$$
$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \alpha_{31}\alpha_{13} \xi_2 \xi_1 : -\alpha_{22}(\alpha_{31} + \alpha_{13}) \xi_1 \xi_3 : \alpha_{31}\alpha_{13} \xi_3 \xi_2 .$$

Da somit $y_1 : y_3 = x_1 : x_3$, $\eta_1 : \eta_3 = \xi_1 : \xi_3$ ist, *so liegen doppelt reciproke Punkte auf Strahlen aus dem Berührungspol und doppelt reciproke Strahlen schneiden sich auf der Berührungssehne.* Dies liefert eine lineare Construction von A_2 und $A_1 A_3$ aus gegebenen Elementenquadrupeln.

Weil die vorige Substitution vom zweiten Grade ist, so nennt man auch *die Verwandtschaft der doppelt reciproken Elementenpaare vom zweiten Grade.* Wir betrachten sie in Kürze am Schlufs des Kapitels.

B. Das anschaulichste Beispiel der Reciprocität wird durch die einfachste Wahl zweier Kegelschnitte in Doppelberührung erhalten: *Die Ordnungscurven seien zwei concentrische Kreise* (§ 244)

$$U \equiv x^2 + y^2 - \varrho_1^2 = 0, \quad V \equiv x^2 + y^2 - \varrho_2^2 = 0.$$

Da die Tangentialgleichung zu V lautet $-\varrho_2^2(\xi^2 + \eta^2) + 1 = 0$, so sind die Bedingungen für die Substitutionscoefficienten zu erfüllen $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$, $A_{11} = A_{22} = -\lambda\varrho_2^2$, $\alpha_{33} = -\varrho_1^2$, $A_{33} = \lambda$, $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$, $A_{ik} = -A_{ki}$; aber aus $A_{11} = A_{22}$ folgt $\alpha_{13}^2 = \alpha_{23}^2$, aus $A_{12} = -A_{21}$ aber $\alpha_{13}\alpha_{23} = 0$. Da endlich $\lambda = \alpha_{12}^2 + 1$ und $\lambda\varrho_2^2 = \varrho_1^2$, so ist zu setzen

$$\xi' = \frac{x + \alpha y}{-\varrho_1^2}, \quad \eta' = \frac{-\alpha x + y}{-\varrho_1^2}; \quad \xi = \frac{x' - \alpha y'}{-\varrho_1^2}, \quad \eta = \frac{\alpha x + y}{-\varrho_1^2}.$$

Analog können zwei gleichseitige Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten gebraucht werden.

399. **Polarsystem.** Die vorangehenden Eigenschaften einer allgemeinen Reciprocität hinsichtlich involutorisch reciproker Elemente sind daran geknüpft, dafs wenigstens ein Substitutionscoefficient α_{ik} von α_{ki} verschieden sei. In der Tat lehrt der Anblick der Substitutionen, *dafs unter den Bedingungen*

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

alle reciproken Elemente einander vertauschbar entsprechen. Es hat dann keinen Sinn mehr zweierlei, in derselben Ebene liegende reciproke Systeme zu unterscheiden, sondern *in dieser involutorischen Reciprocität sind je ein Punkt und eine Gerade der Ebene einander eindeutig zugeordnet*, vermöge

$$\mu \xi_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k, \quad \frac{\Delta}{\mu} x_i = \Sigma A_{ki} \xi_k.$$

Die beiden Ordnungscurven der Reciprocität fallen in einen Kegelschnitt $S \equiv \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k = 0$, *die Directrix der involutorischen Reciprocität* zusammen. Die Gleichung der zu x_i reciproken Geraden $\Sigma \alpha_{ik} x_i x_k' = 0$, ebenso die Anwendung der Viereckscontruction des § 397 zeigt, *dafs die zugeordneten Elemente Pol und Polare in Bezug auf die Directrix sind.* Man bezeichnet diese Zuordnung daher als *Polarreciprocität* und fafst die reciproken Systeme als *Polársystem* zusammen. Pole, Polaren und Polardreiecke, Centrum, Durchmesser und Axen der Directrix oder des Polarsystems sind gleichbedeutende Benennungen.

Eine Reciprocität, welche zwei involutorische Paare von nicht in einander liegenden Elementen enthält, ist eine Polarreciprocität. Denn sind A_1 und a_1, A_2 und a_2 vertauschbar, so sind es auch $a_1 a_2 (A_3)$ und $A_1 A_2 (a_3)$, d. h. es existirt ein Polardreieck $A_1 A_2 A_3$. Nehmen wir dieses zum Fundamentaldreieck der Coordinaten, so entsprechen sich $x_i = 0$ und $\xi_i = 0$ nur, wenn $\alpha_{ik} = 0$ $(i \gtrless k)$, also lauten die Substitutionen

$$\mu \xi_i = \alpha_i x_i$$

und die Gleichung der Directrix ist $\Sigma \alpha_i x_i^2 = 0$. Daher erfordert die Bestimmung der Constanten die Angabe eines weiteren Elementenpaares A_4, a_4. *Das Polarsystem ist also durch drei Elementenpaare bestimmt, die kein Polardreieck bilden.* Jedes weitere Elementenpaar P, p ist durch zwei Projectivitäten zugeordnet

$$(A_1 \cdot A_2 A_3 A_4 P) = (a_1 \cdot a_2 a_3 a_4 p), \; (A_2 \cdot A_3 A_1 A_4 P) = (a_2 \cdot a_3 a_1 a_4 p).$$

Die Directrix des Polarsystems wird als Ort und Enveloppe der in einander liegenden Elementenpaare erhalten. Auf jeder beliebigen Geraden ist eine Punktinvolution definirt durch ihre Schnittpunktpaare mit $A_i P$, a_i, welche die Schnitt-

punkte mit der Directrix als ihre Doppelpunkte liefert. *Daher sind alle Constructionen der Kegelschnittlehre im Polarsystem reell durchführbar, unabhängig von der Realität der Directrix.* Die Einführung des Polarsystems bedeutet so genau dieselbe von der Realität unabhängige Definition der Curve zweiten Grades, wie die Involution für das Punktepaar. Man kennzeichnet das Polarsystem auch kurz als *ebene Involution.* Übrigens ist das Polarsystem mit imaginärer Directrix mittelst der Sätze der §§ 15, 95 leicht dadurch zu characterisiren, daſs dann einem Pol im Innern eines Polardreiecks eine Polare entspricht, die ganz auſserhalb desselben liegt.

400. **Polarreciprocität ist nur eine besondere Lage allgemein reciproker Systeme,** also nicht wesentlich von der allgemeinen Reciprocität verschieden. Man kann nämlich durch Verschiebung und Drehung des einen von zwei reciproken Systemen beide in involutorische Lage bringen. Bezieht man die allgemeinen Substitutionsformeln auf rechtwinklige Coordinaten und setzt für $x \mid y$ die allgemeinsten Ausdrücke einer rechtwinkligen Coordinatentransformation, so wird

$$\mu\xi = \alpha_{11}(x_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha_{12}(y_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \alpha_{13},$$
$$\mu\eta = \alpha_{21}(x_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha_{22}(y_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \alpha_{23},$$
$$\mu = \alpha_{31}(x_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha_{32}(y_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \alpha_{33}.$$

Man hat also nur x_0, y_0, φ so zu bestimmen, daſs gleichzeitig

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}\sin\varphi + \alpha_{12}\cos\varphi &= \alpha_{21}\cos\varphi + \alpha_{22}\sin\varphi, \\ \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13} &= \alpha_{31}\cos\varphi + \alpha_{32}\sin\varphi, \\ \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23} &= -\alpha_{31}\sin\varphi + \alpha_{32}\cos\varphi \end{aligned}$$

sind. Die erste dieser Gleichungen liefert *zwei* Werte von φ, die andern bestimmen sodann $x_0 \mid y_0$ linear. Der einen Lösung entspricht eine reelle, der andern eine imaginäre Directrix.

Geometrisch betrachtet, kann diese Transformation auf folgende Weise geschehen. Man bestimmt zuerst in jedem der Systeme den *Gegenpunkt*, welcher der unendlich fernen Geraden als einer Geraden des andern Systems entspricht, dessen Strahlen also den Richtungen im letzteren entsprechen. Bringt man dann diese beiden Punkte durch Lagenveränderung eines Systems zur Deckung in *O*, so sind *O* und die unendlich

ferne Gerade unverändert und involutorisch reciprok. Dieser Punkt O wird der gemeinschaftliche Mittelpunkt, seine Strahlen werden Durchmesser der beiden Ordnungscurven sein, die nun, weil sie in doppelter Berührung bleiben müssen, zu ähnlichen und concentrischen Kegelschnitten werden. (§ 244.) Man hat ferner noch O und ∞ als Elemente eines Polardreiecks zu nehmen. Daher mufs man das eine der beiden reciproken Systeme so um das gemeinsame Centrum O drehen, dafs die einer Richtung A reciproke Gerade OA die nämliche ist, ob man dieselbe zum einen oder zum andern System zählt; dann gilt dasselbe für *jede* Richtung B und die reciproke Gerade OB' (§ 93). Es besteht dann Involution zwischen den Büscheln $OA, OB, ..; OA', OB'$. Da nun aber die absoluten Richtungen der Ebene bei jeder Drehung des Systems unverändert bleiben, so sind durch eine solche die reciproken Geraden einer derselben wirklich zum Zusammenfallen zu bringen.

Die Durchmesser der beiden ursprünglichen reciproken Systeme bilden zwei zu einander projectivische Büschel, in denen je zwei einander entsprechen, von denen der eine der Richtung des andern zugehört. Unter diesen Durchmessern gibt es im allgemeinen nur ein Paar von zu einander rechtwinkligen, denen ein Paar rechtwinklige conjugirte entsprechen. Ihre Vereinigung liefert die Axen der Directrix; daher ist die involutorische Lage nur *auf zwei Arten* herzustellen.

B. 1) Die den Punkten eines Durchmessers reciproken Geraden sind einander parallel, und einer Schaar von Parallelen entsprechen Punkte auf einerlei Durchmesser.

2) Die Coordinaten der $\xi' = 0$, $\eta' = 0$ und $\xi = 0$, $\eta = 0$ reciproken Gegenpunkte sind $A_{31}:A_{33} | A_{32}:A_{33}$, $A_{13}:A_{33} | A_{23}:A_{33}$; daher geschieht die Transformation der Systeme auf gemeinsamen Mittelpunkt durch

$$A_{33}(x' - x) = A_{13} - A_{31}, \quad A_{33}(y' - y) = A_{23} - A_{32}.$$

3) Man soll für die concentrische Lage beider Systeme den Drehungswinkel berechnen, welcher der Transformation des Textes entspricht. Die Polaren eines beliebigen Punktes sind bei rechtwinkligen Coordinaten aus dem gemeinschaftlichen Centrum

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1)x + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1)y + \alpha_{33} = 0,$$
$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1)x + (\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1)y + \alpha_{33} = 0,$$

und daher für den unendlich fernen Punkt $y_1 = ix_1$

$$(\alpha_{11} + i\alpha_{12})x + (\alpha_{21} + i\alpha_{22})y = 0,$$
$$(\alpha_{11} + i\alpha_{21})x + (\alpha_{12} + i\alpha_{22})y = 0.$$

Der Winkel dieser letzteren ist bestimmt durch

$$\tan\theta = \frac{\alpha_{21} - \alpha_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}}.$$

Oder: Die dem Punkte $x_1 \,|\, y_1$ des ersten reciproke Gerade des zweiten erhält durch Drehung um den Winkel θ die Gleichung

$$(\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}y_1)(x\cos\theta-y\sin\theta)+(\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}y_1)(x\sin\theta+y\cos\theta)+\alpha_{33}=0$$

oder $\{(\alpha_{11}\cos\theta + \alpha_{21}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{12}\cos\theta + \alpha_{22}\sin\theta)y_1\}x$
$+ \{(\alpha_{21}\cos\theta - \alpha_{22}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{22}\cos\theta - \alpha_{12}\sin\theta)y_1\}y + \alpha_{33} = 0.$

Dagegen ist die Gerade, welche dem Punkte $x_1 \,|\, y_1$, als dem transformirten System angehörig betrachtet, entspricht

$$\{(\alpha_{11}\cos\theta + \alpha_{21}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{21}\cos\theta - \alpha_{11}\sin\theta)y_1\}x$$
$$+ \{(\alpha_{12}\cos\theta + \alpha_{22}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{22}\cos\theta - \alpha_{12}\sin\theta)y_1\}y + \alpha_{33} = 0.$$

Und diese Gerade ist mit der vorigen identisch, wenn man hat

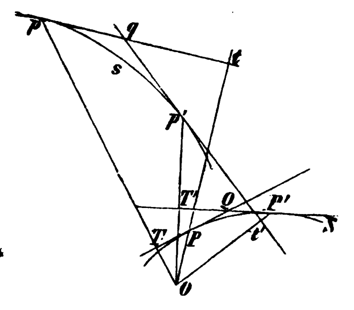
$$\alpha_{12}\cos\theta + \alpha_{22}\sin\theta = \alpha_{21}\cos\theta - \alpha_{11}\sin\theta.$$

401. **Polarreciproke Kegelschnitte.** Es sei ein Polarsystem von der Directrix $D = 0$ fest gegeben, so betrachten wir *zu jeder Figur ihre Polarreciproke* in dem Polarsystem, d. h. in Bezug auf den Kegelschnitt D, indem wir letztere aus den Polaren der Punkte als Enveloppe und den Polen der Tangenten ersterer als Ort bilden. Wir nennen kurz Pol und Polare bezüglich D *entsprechende* Elemente, so dafs in polarreciproken Figuren die Elemente sich paarweise entsprechen und jede aus der andern in gleicher Weise hervorgeht.

Die Enveloppe der Polaren aller Punkte einer Curve S heifst die Polarcurve s zu S, während der Ort S etwa als die Polcurve von s unterschieden wird. Da aber auch S die Enveloppe aller Punkte der Polarcurve s ist, so sind polarreciproke Curven S und s von gleichartiger Bedeutung. *Die Ordnung der Polarreciproken einer Curve ist der Classe der Curve gleich.* Denn ist n die Anzahl der Punkte, in welchen eine beliebige Gerade die Curve s schneidet, so entspricht denselben in der polarreciproken Figur S die gleiche Anzahl der Tangenten von S, welche durch den jener Geraden ent-

sprechenden Punkte gehen (§ 23). So können an einen Kegelschnitt S nur zwei Tangenten von irgend einem Punkte aus gezogen werden, daher schneidet eine beliebige Gerade die Curve s nur in zwei Punkten, d. h. die Polarreciproke einer Curve zweiter Classe ist eine Curve zweiter Ordnung.

Aber nicht nur die Kegelschnitte S und s, sondern auch die durch sie als Directrixen definirten Polarsysteme sind



polarreciproke Figuren. Elementar folgert man dies daraus, dafs, wenn zwei Punkte P, P' in S den Tangenten pt, $p't'$ an s entsprechen, auch die Tangenten in P, P' an S den Berührungspunkten p, p' entsprechen. Denn dann entspricht der Schnittpunkt Q derselben der Berührungssehne pp' der letzten. *Einem Punkte Q und seiner Polare PP' in Bezug auf S entspricht eine Gerade pp' und ihr Pol q in Bezug auf s.*

Analytisch sind diese Sätze evident, da lineare Substitutionen in quadratische oder in bilineare Gleichungen wieder bez. solche liefern (vgl. § 189, 13).

402. **Die Methode der reciproken Polaren**[159]) hat in der geschichtlichen Entwickelung die Lehre von der reciproken Verwandtschaft und von dem Dualismus geometrischer Wahrheiten vorbereitet. Ihre Ergebnisse sind natürlich in denen dieser allgemeinen Theorien als Specialisirungen der Lage enthalten. Gerade durch diese constructiv einfache und übersichtliche Lage der zu vergleichenden Figuren hat diese Untersuchungsmethode ihren selbständigen Wert. Sie setzt lediglich die Kenntnis der Polarentheorie der Kegelschnitte voraus.

Aus jedem nur auf descriptive Lagenverhältnisse bezüglichen oder projectivischen Satz über eine gegebene Figur kann rein mechanisch durch Vertauschung dualistisch entsprechender Werte der reciproke Satz über die polarreciproke Figur abgeleitet werden. Z. B. folgt aus dem Pascal'schen Satz für das S eingeschriebene Seckseck $ABCDEF$ der

Brianchon'sche Satz für das s umgeschriebene Sechsseit $abcdef$ (vgl. § 293).

Durch die Nebeneinanderstellung einiger Sätze mit ihren Reciproken soll im Folgenden Gelegenheit zur Anwendung und Übung dieser Methode gegeben werden. Auf die specielle Lagenbeziehung wird erst weiterhin einzugehen sein.

B. 1) Wenn zwei Ecken eines Dreiecks sich auf festen Geraden bewegen, während die Seiten sich um feste Punkte drehen, so ist der Ort der dritten Ecke ein Kegelschnitt. (§ 286, 5.)	Wenn zwei Seiten eines Dreiecks durch feste Punkte gehen, während die Ecken sich in festen Geraden bewegen, so ist die Enveloppe der dritten Seite ein Kegelschnitt.
2) Der bezeichnete Ort ist eine Gerade, wenn die festen Punkte der Seiten in einer Geraden liegen. (§ 49, 2. 3.)	Die bezeichnete Enveloppe ist ein Punkt, wenn die festen Geraden der Ecken in einem Punkte zusammenlaufen.
3) Wenn von einem Kegelschnitt zwei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte dieser Tangenten durch den einen oder andern von zwei festen Punkten. (§ 324, B.)	Wenn von einem Kegelschnitt zwei Tangenten und zwei Punkte gegeben sind, so liegt der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten stets auf der einen oder der andern von zwei festen Geraden.
4) Die Polaren eines festen Punktes in Bezug auf alle demselben Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte bilden ein Strahlbüschel.	Die Pole einer festen Geraden in Bezug auf alle demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte bilden eine gerade Reihe.
5) Der Ort des Pols einer festen Geraden in Bezug auf alle durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt. (§ 314, 1.)	Die Enveloppe der Polare eines festen Punktes in Bezug auf alle dieselben vier Geraden berührenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt.
6) Die drei Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den entsprechenden Ecken des in Bezug auf einen Kegelschnitt gebildeten polaren Dreiecks verbinden, gehen durch einen Punkt. (§ 312, 3; 361, 1.)	Die drei Schnittpunkte der entsprechenden Seiten eines Dreiecks und des in Bezug auf einen Kegelschnitt gebildeten polaren Dreiecks liegen in einer Geraden. (§ 361, 1; 64, 4.)
7) Man soll einem Kegelschnitt ein Dreieck einschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. (§ 311.)	Man soll einem Kegelschnitt ein Dreieck umschreiben, dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen.

403. Wenn zwei Kegelschnitte S und S' und ihre Reciproken s und s' gegeben sind, so entsprechen den vier Punkten A, B, C, D, welche S, S' mit einander gemein haben, die vier Tangenten a, b, c, d, welche s, s' gemeinschaftlich sind, den sechs Sehnen AB, CD; AC, BD; AD, BC jener Schnittpunkte, die sechs Schnittpunkte ab, cd; ac, bd; ad, bc dieser gemeinschaftlichen Tangenten; d. h. dem *vollständigen Viereck der erstern das vollständige Vierseit der letztern.*

Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so berühren sich auch ihre Reciproken; denn da die ersteren einen Punkt und die zugehörige Tangente gemein haben, so müssen die letzteren eine Tangente und den zugehörigen Berührungspunkt gemein haben. Und, wenn zwei Kegelschnitte mit einander in doppelter Berührung sind, so sind es auch ihre Reciproken. *Die Reciproken eines Büschels bilden eine Schaar.*

Denken wir die Kegelschnitte S, s und D, so entsprechen den gemeinsamen Punkten oder Tangenten von D mit s die gemeinsamen Tangenten oder Punkte von D mit S. Denn die Schnittpunkte D, s und die Tangenten D, S sind paarweise Berührungspunkte und Tangenten der sich selbst reciproken Directrix. *Somit haben je zwei reciproke Kegelschnitte S, s mit der Directrix D ein gemeinschaftliches Polardreieck.*

Sind also S und s gegeben, so kann die Directrix D nur einer von den vier Kegelschnitten sein, welche durch das gemeinsame Polardreieck und die fernere Bedingung bestimmt sind, dafs einer der vier gemeinsamen Punkte A, B, C, D von S, s der Pol zu einer ihrer vier gemeinsamen Tangenten a, b, c, d in Bezug auf ihn sein mufs. *Es gibt also vier Kegelschnitte D_1, D_2, D_3, D_4, bezüglich welcher zwei gegebene S und s einander polarreciprok sind.*

B. 1) Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt umgeschrieben bleibt und zwei seiner Ecken in festen Geraden fortschreiten, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. (§ 307, 1.)

Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben bleibt und zwei von seinen Seiten sich um feste Punkte drehen, so umhüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. (§ 307, 2.)

2) Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, oder wenn sie alle mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so gehen die sechs Schnittsehnen derselben viermal zu je dreien durch einen Punkt. (§ 279.) Man darf diese Punkte als die vier Radicalcentra der drei Kegelschnitte bezeichnen, welche denselben vierten Kegelschnitt doppelt berühren.

Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Punkte haben, oder wenn sie alle mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so liegen die sechs Schnittpunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten viermal zu je dreien in einer Geraden. Man kann diese Geraden als die vier Ähnlichkeitsaxen der drei Kegelschnitte benennen, welche denselben vierten Kegelschnitt doppelt berühren. (Vgl. § 131.)

3) Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so schneiden sich die Tangenten derselben in den Endpunkten einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne in der gemeinschaftlichen Sehne der Kegelschnitte.

Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so gehen die Verbindungslinien der Berührungspunkte ihrer Tangenten aus einem Punkte ihrer gemeinsamen Tangente durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte.

4) Wenn man durch einen Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte zwei beliebige Sehnen zieht, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einer oder der andern von den gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte. (§ 307.)

Wenn man in einer gemeinschaftlichen Sehne zweier Kegelschnitte zwei Punkte wählt, so liegen die Schnittpunkte der von ihnen ausgehenden Tangenten in Geraden, welche durch einen oder den anderen von den Schnittpunkten der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte gehen.

5) Wenn die Kegelschnitte A und B beide mit dem Kegelschnitt S in doppelter Berührung sind, so schneiden sich ihre Berührungssehnen mit S und ihre Schnittsehnen mit einander in einem Punkte und bilden ein harmonisches Büschel. (§ 278.)

Wenn die Kegelschnitte A und B mit dem Kegelschnitt S in doppelter Berührung sind, so liegen die Schnittpunkte ihrer mit S gemeinschaftlichen Tangenten und die der Paare ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in einer Geraden und bilden eine harmonische Reihe. (§ 322, 4.)

6) Wenn die Kegelschnitte A, B, C den Kegelschnitt S je doppelt und überdies A und B

Wenn die Kegelschnitte A, B, C den Kegelschnitt S je doppelt und überdies A und B beide

beide C einfach berühren, so schneiden sich die Tangenten in den Berührungspunkten in einer gemeinschaftlichen Sehne von A und B.

C einfach berühren, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten von A und B.

Von den vorigen Sätzen aus gelangt man, ganz wie in § 133 von denen, welche ihnen in der Theorie von drei Kreisen entsprechen, zur geometrischen Auflösung des Problems, welches dem des Apollonius bei den Kegelschnitten analog ist: Zu drei demselben Kegelschnitt eingeschriebenen Kegelschnitten denjenigen vierten zu bestimmen, der gleichfalls diesem eingeschrieben ist. Man erhält dieselbe Auflösung, welche wir in § 370, 1) analytisch entwickelt haben.

404. **Invariantentheorie reciproker Kegelschnitte.** Für die analytische Untersuchung polarreciproker Figuren wird die äufserste Vereinfachung dadurch erreicht, dafs die Directrix in der Gleichungsform

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

vorausgesetzt werden darf. Die Substitutionen der Reciprocität reduciren sich dann auf $\mu \xi_i = x_i$,*) d. h. auf einen blofsen Bedeutungswechsel der Coordinaten. *Jede ternäre Gleichung definirt, in Punkt- oder in Liniencoordinaten interpretirt, polarreciproke Curven,* mit obiger Directrix. Abgesehen von der Interpretation ist daher die Tangentialgleichung einer gegebenen identisch mit der Gleichung der Reciproken (der Reciprocalgleichung) in den gegebenen Variabeln.

Bei monomischen Substitutionen bleiben Normal-Gleichungsformen erhalten (§ 312). Also kann das Fundamentaldreieck in einem Polarsystem S stets so gewählt werden, dafs bei unverändertem $S \equiv \Sigma x_i^2 = 0$ irgend zwei reciproke Kegelschnitte S_1, S_2 die Gleichungen haben

$$S_1 \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \quad \Sigma a_i \xi_i^2 = 0,$$

wo die letztere äquivalent ist mit

$$s_1 \equiv a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 = 0.$$

Diese beiden Kegelschnitte sind aber nicht nur bezüglich

*) Also kann im Polarsystem zu jedem Polardreieck ein conjugirtes Paar gefunden werden, welches durch das Dreieck harmonisch getrennt ist (§ 62, 8).

der angegebenen Directrix reciprok, sondern überhaupt, so lange die Bedingungen $\mu^2 \xi_i^2 = x_i^2$ erfüllt sind. Daher gibt es je vier Kegelschnitte, in Bezug auf welche zwei Kegelschnitte zu einander polarreciprok sind. Dieselben können gleichzeitig als

$$x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 0$$

(für alle Zeichencombinationen) geschrieben werden, haben also ein gemeinsames Polardreieck und paarweise doppelte Berührung, können aber nicht sämmtlich reell sein (§ 403).

Die Polarencurve ist eine Simultancovariante der gegebenen und der Directrix. In der Tat ist ihre Gleichung in der Form

$$s_1 \equiv \Theta_1 S_2 - F = 0$$

darstellbar (§ 369), wenn Θ_1 die Invariante in § 357, F die Covariante in § 367 von S_1 und S_2 bedeutet.

Ebenso können wir nun S_1 als eine Directrix betrachten, in Bezug auf welche wir die Polarcurve s_2 von S_2 bilden; diese erscheint dann in der Gleichungsform $s_2 \equiv \Theta_2 S_1 - F = 0$. Daher geht die Covariante F zweier Kegelschnitte S_1, S_2 durch die Schnittpunkte jedes der beiden Kegelschnitte mit der Polarcurve des andern in Bezug auf ihn. Wenn die Covariante F selbst die Reciproke eines der Kegelschnitte in Bezug auf den andern ist, so sind dieselben harmonisch (§ 362), und umgekehrt.

Also decken sich für $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$ beide Polarcurven S_1, S_2 mit der Hauptcovariante F. Aus den Gleichungen

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2 = 0$$

folgt aber, dafs für ε als eine complexe Cubikwurzel der Einheit zu setzen ist

$$a_1 = \varepsilon a_2 = \varepsilon^2 a_3.$$

Somit gibt es Tripel von doppelt-harmonischen Kegelschnitten

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad \varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad \varepsilon x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

deren jeder zugleich die Hauptcovarianten F und Φ und die vereinigten Polarcurven für die beiden andern repräsentirt. Jedem derselben können dann Dreiecke eingeschrieben werden, die einem der andern umgeschrieben sind (§ 364). Die imaginäre

Darstellungsform beweist nur, dafs das gemeinsame Polardreieck nicht reell ist; die drei Kegelschnitte können reell sein (vgl. B. 3)).

B. 1) Die Polarreciproke der gleichseitigen Hyperbel $c^2xy = a^2x'y - b^2y'x$ (§ 192) in Bezug auf die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist eine Parabel $c^2\xi\eta = a^2\xi'\eta - b^2\eta'\xi$, welche die Coordinatenaxen berührt. Die gemeinsamen Tangenten der Ellipse und Parabel berühren erstere in den Fufspunkten der von $x' \mid y'$ auf sie gefällten Normalen.

2) Der mit $S_1 S_2$ covariante Kegelschnitt $\Theta_2 S_1 = \Theta_1 S_2$ geht durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte S_1, S_2 und durch die ihrer Polarcurven s_1, s_2.

3) Ein Tripel doppelt-harmonischer Kegelschnitte wird bestimmt durch zwei gleiche Kreise, deren gemeinsame Sehne dem Radius gleich ist.

Denn, setzen wir in den Gleichungen des Textes $x_1 = 1 + xi$, $x_2 = 1 - xi$, $x_3 = y\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, so gehen sie über in

$$2(1 - x^2) + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{3}x - 1 = 0.$$

Der dritte Kegelschnitt ist daher eine Hyperbel, deren Nebenaxe gleich dem Radius ist.

4) Je zwei doppelt-harmonische Kegelschnitte besitzen Schnittpunkte von äquianharmonischem Doppelverhältnis (§ 371, 3).

5) Die Directrixen zweier polarreciprok gedachter Kegelschnitte $\Sigma a_i x_i^2 = 0$, $\Sigma b_i x_i^2 = 0$ sind

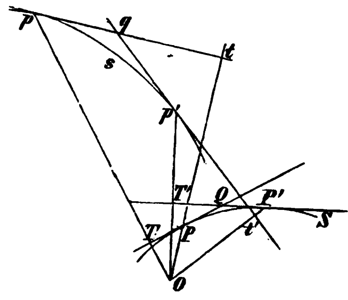
$$x_1^2 \sqrt{a_1 b_1} \pm x_2^2 \sqrt{a_2 b_2} \pm x_3^2 \sqrt{a_3 b_3} = 0.$$

Man unterscheide die hinsichtlich ihrer Realität möglichen Fälle.

6) Ein Kegelschnitt kann so bestimmt werden, dafs ihm von fünf Polarsystemen je ein Polardreieck eingeschrieben werden kann, oder dafs er in k Polarsystemen harmonisch ist und durch $5 - k$ gegebene Punkte geht. Diese Bestimmung umfafst sehr viele specielle Fälle. (Vgl. § 362 und B. 1) — 6)).

405. **Circulares Polarsystem.** Wir haben bisher vorausgesetzt, dafs die Directrix **D** ein vollkommen beliebiger Kegelschnitt sei. Man pflegt denselben jedoch zumeist als einen Kreis anzunehmen, weil die Reciprocität dann einen metrischen elementaren Character annimmt. Wir wollen darum im Folgenden überall, wo von Polarcurven ohne weiteren Beisatz die Rede ist, *Polarcurven in Bezug auf einen Kreis* verstanden

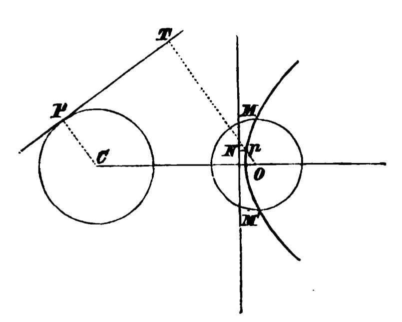
denken. *Aus diesem circularen Polarsystem geht jedes andere durch collineare Umformung hervor.* Die Relation zwischen Polarcurven in Bezug auf einen Kreis läfst sich (§ 115) auch wie folgt aussprechen: *Wenn man von einem gegebenen Punkte O auf eine jede Tangente der Curve S eine Normale OT fällt und sie so weit verlängert, dafs das Rechteck der Segmente OT. Op einen constanten Wert k^2 erhält, so ist der Ort der Punkte p eine Curve s, welche die reciproke Polare von S genannt wird.* Denn dies ist mit der Bestimmung gleichbedeutend, dafs p der Pol von PT in Bezug auf einen Kreis vom Centrum O und Radius k ist; die Tangente pt entspricht daher dem Berührungspunkte P, d. h. es ist auch OP rechtwinklig zu pt und $OP \,.\, Ot = k^2$.



Eine Veränderung der Gröfse k ändert zwar die Stelle, aber nicht die Gestalt von s, die in den meisten Fällen uns allein angeht. Darum kann in dieser Anschauungsweise von der Relation der Polarcurven die Beziehung auf den Kreis ganz unterdrückt werden, die Polarcurve s in Bezug auf den Einheitkreis kann als die *Reciproke von S in Bezug auf den Punkt O* bezeichnet werden, den man für diesen Fall als den *Ursprung* der Reciprocität bezeichnet. In rechtwinkligen Coordinaten ist dann $x \mid y$ durch $\xi \mid \eta$ zu ersetzen.

Die mit der Anwendung des Kreises als Hilfskegelschnitt verbundenen Vorteile erlauben, mit Hilfe dieser Methode aufser Sätzen über die *Lage* der Figuren auch solche zu transformiren, welche metrische Relationen von Linien und Winkeln enthalten. Die Grundlage bilden die beiden Sätze: *Die Entfernung eines Punktes N vom Ursprung ist der reciproke Wert der Entfernung des letzteren von der entsprechenden Geraden pt. Der von zwei beliebigen Geraden TQ, T′Q′ eingeschlossene Winkel ist dem Winkel pOp′ gleich, welchen die entsprechenden Punkte p, p′* am Ursprung *einschliefsen;* denn Op ist normal zu TQ und Op' auf $T'Q'$.

406. **Polarreciproke eines Kreises.** Ist der Ort des Pols p einer Tangente PT des Kreises C in Bezug auf den Kreis zu ermitteln und ist MN die Polare des Mittelpunktes von C, so besteht für die Punkte C, p und ihre Polaren MN, PT nach § 117 die Relation $OC:CP = Op:pN$. Diese zeigt nach der Constanz von OC und CP, dafs die Distanz des Punktes p von O zu seiner Distanz von der Geraden MN in einem constanten Verhältnis $OC:CP$ steht. Der Ort von p ist daher ein Kegelschnitt, welcher O zum Brennpunkt, MN zur entsprechenden Directrix und $OC:CP$ als Excentricität hat (§ 197).



Die letztere ist demnach gröfser oder kleiner als Eins, je nachdem O aufserhalb oder innerhalb des Kreises C ist, und sie ist gleich Eins, wenn der Punkt O in der Peripherie desselben liegt. *Die Polarreciproke eines Kreises ist ein Kegelschnitt, der den Ursprung zum Brennpunkt und die dem Centrum entsprechende Gerade zur Directrix hat; derselbe ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem der Ursprung innerhalb oder aufserhalb des Kreises oder auf demselben liegt.*

Analytisch liefert in der Tat die formale Übereinstimmung der Kreisgleichung und der Focalgleichung des § 210 den Beweis. So ist die Reciproke des Kreises $(x-\alpha)^2+y^2=\varrho^2$ der Kegelschnitt

$(\xi+\alpha)^2+\eta^2=\varrho^2$ oder $(\alpha x-1)^2=\varrho^2(x^2+y^2)$ (§ 110).

Daher fällt die Hauptaxe desselben in die Gerade OC und ist gleich dem Durchmesser, dividirt durch die Kreispotenz des Ursprungs. Die Kegelschnittsordinate im Brennpunkt ist $1:\varrho$, *also ist der Hauptparameter der Reciproken eines Kreises gleich dem reciproken Wert des Radius*, unabhängig von der Lage des Kreises.

B. 1) Wenn drei Kegelschnitte einen Brennpunkt gemein haben, so liegen die Schnittpunkte der Paare ihrer gemeinschaft-

lichen Tangenten in einer Geraden. Denn für den gemeinschaftlichen Brennpunkt als Anfangspunkt sind die reciproken Curven Kreise und die besagten Schnittpunkte werden die Radicalaxen derselben.

2) Man construire die Directrixen der vier Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen und einen umgeschriebenen Brennpunkt haben.

Dazu hat man nur den Mittelpunkt des Kreises zu suchen, der die Polare der festen Punkte in Bezug auf den Brennpunkt berührt.

407. **Winkelrelationen.** Hiernach machen wir zunächst von dem zweiten Satze des § 405 Gebrauch zur reciproken Umformung einer Reihe von Eigenschaften, welche sich auf die Gröfse von Winkeln beziehen.

B. 1) Zwei Tangenten eines Kreises machen mit ihrer Berührungssehne gleiche Winkel.

Die Focalsehne des Schnittpunktes zweier Tangenten eines Kegelschnittes halbirt den Winkel, welchen ihre Berührungssehne am Brennpunkt spannt. (§ 202.)

Denn der Winkel QPP' (Fig. § 405) ist dem Winkel gleich, der an O von p, q gespannt wird; ebenso ist der Winkel $QP'P$ dem von p', q an O gespannten Winkel gleich; wegen $QPP' = QP'P$ ist daher $pOq = p'Oq$.

2) Jede Tangente eines Kreises ist senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem Centrum.

Jeder Punkt eines Kegelschnittes fafst mit dem Schnittpunkt seiner Tangente mit der Directrix am Brennpunkt einen rechten Winkel.

Denn die Directrix des Kegelschnittes entspricht dem Centrum des Kreises.

3) Jede Gerade ist senkrecht zu der Verbindungsgeraden ihres Pols mit dem Centrum des Kreises.

Jeder Punkt fafst mit dem Schnittpunkt seiner Polare mit der Directrix einen rechten Winkel am Brennpunkt.

4) Die Gerade, welche einen Punkt mit dem Centrum eines Kreises verbindet, macht mit den durch diesen Punkt an den Kreis gezogenen beiden Tangenten gleiche Winkel.

Die Verbindungsgerade des Schnittpunktes einer Geraden und der Directrix mit dem Brennpunkt halbirt den Winkel zwischen den Vectoren der Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitte.

5) Der Ort des Schnittpunktes derjenigen Tangenten eines Krei-

Die Enveloppe der Sehnen eines Kegelschnittes, welche einen ge-

ses, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein concentrischer Kreis.

gebenen Winkel am Brennpunkt spannen, ist ein Kegelschnitt von dem nämlichen Brennpunkt und derselben Directrix. (§ 313, 3.)

6) Die Enveloppe der Berührungssehnen derjenigen Tangenten eines Kreises, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, ist ein concentrischer Kreis.

Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten eines Kegelschnittes, deren Berührungssehnen am Brennpunkt einen gegebenen Winkel spannen, ist ein Kegelschnitt von demselben Brennpunkt und derselben Directrix.

7) Wenn man von einem festen Punkte an eine Reihe concentrischer Kreise Tangenten zieht, so ist der Ort der Berührungspunkte ein durch den festen Punkt und das gemeinschaftliche Centrum gehender Kreis.

Wenn eine feste Gerade eine Reihe von Kegelschnitten mit demselben Brennpunkt und derselben Directrix schneidet, so ist die Enveloppe der Tangenten in den Schnittpunkten ein Kegelschnitt von demselben Brennpunkte, welcher die Gerade und die Directrix berührt.

Wenn wir die Gerade unendlich fern voraussetzen, so ergibt sich als ein specieller Fall des Satzes, dafs die Enveloppe der Asymptoten aller derjenigen Hyperbeln, die denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix haben, eine Parabel ist, die denselben Brennpunkt hat und die gemeinschaftliche Directrix berührt.

8) Die Hypotenuse eines dem Kreise eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks geht durch sein Centrum.

Der Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einander rechtwinklig schneiden, ist die Directrix.

Wir sagen „eine Parabel", weil die Polare des Kreises in Bezug auf den Punkt, von welchem die Sehnen ausgehen als auf einen Punkt seiner Peripherie, eine Parabel ist. (§ 406.)

9) Die Enveloppe einer Sehne im Kreise, welche an einem gegebenen Punkte seiner Peripherie einen vorgeschriebenen Winkel spannt, ist ein concentrischer Kreis.

Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten einer Parabel, welche einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein Kegelschnitt, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat.

Eine nochmalige reciproke Umformung des letzten Satzes liefert den zum ersten collinearen Satz: Wenn die Sehne eines Kegelschnittes an einem gegebenen Punkt desselben einen constanten Winkel spannt, so berührt sie stets einen Kegelschnitt, der den gegebenen doppelt berührt.

10) Wenn die Basis und der Winkel an der Spitze eines Dreiecks gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein Kreis, welcher durch die Endpunkte der Basis geht.

Wenn von einem Dreieck zwei Seiten nach ihrer Lage und der Sehwinkel der Basis an einem bestimmten Punkte gegeben sind, so umhüllt die Basis einen Kegelschnitt, von welchem dieser Punkt ein Brennpunkt ist, und der die beiden gegebenen Seiten berührt.

11) Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel, welche einander rechtwinklig schneiden, ist ein Kreis.

Die Enveloppe der Sehne eines Kegelschnittes, welche an einem gegebenen Punkte einen rechten Winkel spannt, ist ein Kegelschnitt, welcher diesen Punkt zum Brennpunkt hat.

12) Die Fufspunkte der Normalen aus einem Punkte in der Peripherie eines Kreises auf die Seiten eines ihm eingeschriebenen Dreiecks liegen in einer Geraden (§ 315, 3). Wenn wir jenen Punkt zum Ursprung der Reciprocität wählen, so entspricht jenem Dreieck ein einer Parabel umgeschriebenes Dreieck; es entspricht auch dem Fufspunkt der auf eine Gerade gefällten Senkrechten die durch den entsprechenden Punkt senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Ursprung gezogene Gerade. Wenn wir also die Ecken eines Dreiecks, welches einer Parabel umgeschrieben ist, mit dem Brennpunkt derselben verbinden und in jenen Eckpunkten auf diesen Verbindungslinien Senkrechte errichten, so gehen diese durch denselben Punkt. Wenn man daher über der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Brennpunkt als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so geht derselbe durch die Ecken des umgeschriebenen Dreiecks. Somit: *Wenn drei Tangenten einer Parabel gegeben sind, so ist der Ort des Brennpunktes derselben der ihrem Dreieck umgeschriebene Kreis.* (§ 228.)

13) Der Ort des Fufspunktes der Senkrechten (oder gleichgeneigten Geraden) vom Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangente derselben ist ein Kreis.

Wenn man von irgend einem Punkte aus nach einem Kreise Strahlen zieht und in den Endpunkten derselben Senkrechte (oder etc.) auf ihnen errichtet, so ist ihre Enveloppe ein Kegelschnitt, der den Punkt zum Brennpunkt hat.

408. **Vectorenrelationen.** Die Umformung von Sätzen, welche die Gröfsen von Vectoren aus dem Ursprung enthalten, geschehen auf Grund des ersten Satzes in § 405.

B. 1) Die Summe (bez. die Differenz) der Abstände paralleler Tangenten eines Kreises vom Ursprung ist constant.

Die Summe der reciproken Werte der Segmente einer Focalsehne in der Ellipse ist constant.

Denn parallelen Linien entsprechen Punkte in einer durch den Ursprung gehenden Geraden. Da diese Summe bez. Differenz dem vierfachen reciproken Wert des Parameters des Kegelschnittes gleich ist (§ 198, 1), so ist bestätigt, dafs dieser nur vom Durchmesser des reciproken Kreises abhängt (§ 406).

2) Das Rechteck der Segmente jeder durch den Ursprung gezogenen Sehne eines Kreises ist constant.

Das Rechteck aus den Senkrechten, die man vom Brennpunkt auf zwei parallele Tangenten fällen kann, ist constant.

Daher ist mit der durch den Ursprung an einem Kreis zu ziehenden Tangente auch die conjugirte Axe der reciproken Hyperbel gegeben.

3) Die Summe der Entfernungen des Brennpunktes von den Berührungspunkten paralleler Tangenten ist constant, nämlich gleich der Summe der Focalradien eines der Punkte.

Die Summe der reciproken Werte der Abstände eines beliebigen Punktes von solchen zwei Tangenten eines Kreises, deren Berührungssehne durch jenen Punkt geht, ist constant.

409. **Reciproke homogene Gleichungen.** Jede homogene Gleichung zwischen den Längen der Normalen Pa, Pb, etc., die von einem veränderlichen Punkte P auf feste Gerade a, b, etc. gefällt werden, kann so transformirt werden, dafs wir eine homogene Relation zwischen den Perpendikeln Ap, Bp, etc. erhalten, die von den den festen Geraden entsprechenden festen Punkten A, B, etc. auf die veränderliche Gerade p gefällt werden, die dem Punkte P entspricht. Denn wir haben die Gleichung nur durch eine Potenz von OP, der Distanz des Ursprungs vom Punkte P, zu dividiren, um dann nach § 117 für jedes Verhältnis $Pa : OP$ das gleichwertige $Ap : OA$ zu substituiren.

Wenn z. B. Pa, Pb, Pc, Pd die vom beweglichen Punkte eines Kegelschnittes auf die Seiten eines eingeschriebenen Vierecks gefällten Perpendikel sind, so ist nach § 289

$$Pa \,.\, Pc = k \,.\, Pb \,.\, Pd.$$

Die Division jedes Factors mit OP und die angegebene Substitution liefert die Relation

$$\frac{Ap}{OA} \cdot \frac{Cp''}{OC} = k \frac{Bp'}{OC} \cdot \frac{Dp'''}{OD}.$$

Da OA, OB, OC, OD constant sind, so steht für ein festes, dem Kegelschnitt umgeschriebenes Vierseit das Product der Abstände einer veränderlichen Tangente von zweien seiner Gegenecken zu dem Product ihrer Abstände von den beiden andern Gegenecken in einem constanten Verhältnis, wie in § 289.

Da nun jede Gleichung in Dreiliniencoordinaten x_i (§ 66) eine homogene Relation zwischen den Abständen eines Punktes von drei festen Geraden ist, so können wir sie nach dieser Methode in eine Relation zwischen den Abständen dreier fester Punkte von der entsprechenden Geraden transformiren, d. h. eine Relation zwischen Dreipunktcoordinaten ξ_i; also die homogene Gleichung einer Curve in den x_i in die ihrer Reciprocalcurve in den ξ_i. So wird für η_i als die Entfernungen des Ursprungs von den neuen Fundamentallinien die allgemeine homogene Ortsgleichung zweiten Grades transformirt in

$$\Sigma a_{ik} \frac{\xi_i \xi_k}{\eta_i \eta_k} = 0.$$

Und für y_i als die Dreiliniencoordinaten des Ursprungs geht aus einer Relation zweiten Grades $\Sigma A_{ik} \xi_i \xi_k = 0$ die Gleichung der Reciprocalform in den x_i hervor

$$\Sigma A_{ik} \frac{x_i x_k}{y_i y_k} = 0.$$

B. 1) Das Product der Abstände eines beliebigen Punktes eines Kegelschnittes von zwei festen Tangenten desselben steht zu dem Quadrat seines Abstandes von ihrer Berührungssehne in einem constanten Verhältnis. (§ 289.)

Das Product der Abstände zweier fester Punkte eines Kegelschnittes von einer beliebigen Tangente desselben steht in einem constanten Verhältnis zu dem Quadrate des Abstandes jener Tangente vom Schnittpunkt der in jenen Punkten berührenden Tangenten.

Wählt man bei dieser Transformation den Ursprung der Reciprocität in der Berührungssehne selbst, so lautet der reciproke Satz: Das Rechteck aus den Abschnitten, welche eine veränderliche Tangente eines Kegelschnittes in zwei parallelen festen Tangenten desselben bestimmt, ist constant. (§ 297, 4).

2) In jedem Kegelschnitte ist das Product der Perpendikel, die man von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) auf eine beliebige Tangente fällt, constant.

Das Quadrat des Abstandes eines festen Punktes von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnittes steht zu dem Producte der Abstände dieses Punktes der Curve von zwei festen Geraden in einem constanten Verhältnis.

3) Wenn für einen Kegelschnitt ein Brennpunkt und ein umgeschriebenes Dreieck gegeben sind, so sind die Abstände der Ecken des letzteren von einer beliebigen Tangente durch die Relation verbunden

$$\frac{\eta_1}{\xi_1}\sin\theta_1+\frac{\eta_2}{\xi_2}\sin\theta_2+\frac{\eta_3}{\xi_3}\sin\theta_3=0;$$

für $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ als die Winkel, unter welchen die Seiten vom Brennpunkte aus erscheinen. Dies lehrt die Bildung der Reciproken von der homogenen Gleichung des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises.

Wenn das Centrum des eingeschriebenen Kreises als Brennpunkt genommen wird, so ist $\theta_i=\frac{1}{2}(\pi+A_i)$, $\eta_i\sin\frac{1}{2}A_i=\varrho$, und die Gleichung des eingeschriebenen Kreises in diesem System ist

$$\xi_2\xi_3\cot\tfrac{1}{2}A_1+\xi_3\xi_1\cot\tfrac{1}{2}A_2+\xi_1\xi_2\cot\tfrac{1}{2}A_3=0.$$

Für jeden der äufserlich berührenden Kreise sind zwei der Cotangenten durch die entsprechenden Tangenten zu ersetzen.

4) Wenn für einen Kegelschnitt der Brennpunkt und ein eingeschriebenes Dreieck gegeben sind, so werden die Abstände seiner Ecken von einer veränderlichen Tangente desselben durch die Relation verbunden

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta_1\sqrt{\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)}+\sin\tfrac{1}{2}\theta_2\sqrt{\left(\frac{\xi_2}{\eta_2}\right)}+\sin\tfrac{1}{2}\theta_3\sqrt{\left(\frac{\xi_3}{\eta_3}\right)}=0.$$

Die Gleichung des umgeschriebenen Kreises in Liniencoordinaten erhält die Form

$$\sin A_1\sqrt{\xi_1}+\sin A_2\sqrt{\xi_2}+\sin A_3\sqrt{\xi_3}=0.$$

5) Die Gleichung eines Kegelschnittes bei einem gegebenen Brennpunkt und drei Tangenten ist

$$\sin\theta_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{y_1}\right)}+\sin\theta_2\sqrt{\left(\frac{x_2}{y_2}\right)}+\sin\theta_3\sqrt{\left(\frac{x_3}{y_3}\right)}=0.$$

Man erhält sie durch die Bildung der Reciproken zu der zuletzt gefundenenen Gleichung des umgeschriebenen Kreises.

6) In derselben Art erhalten wir aus 3) die Gleichung eines Kegelschnittes bei gegebenem Brennpunkt und drei Punkten

$$\frac{y_1}{x_1}\tan\tfrac{1}{2}\theta_1+\frac{y_2}{x_2}\tan\tfrac{1}{2}\theta_2+\frac{y_3}{x_3}\tan\tfrac{1}{2}\theta_3=0.$$

410. **Doppelverhältnis-Eigenschaften.** Manche auf Gröfsenverhältnisse bezügliche Sätze lassen sich auf solche über harmonische oder gleiche Doppelverhältnisse reduciren. Ihre Transformation wird alsdann durch die Fundamentaleigenschaft ermöglicht: *Vier Punkten einer geraden Reihe entsprechen vier Strahlen eines Büschels von gleichem Doppelverhältnis.* Zur selbständigen elementaren Begründung derselben hat man nur anzuführen, dafs jeder Strahl, welcher den Ursprung mit einem Punkte der Reihe verbindet, zu dem Strahle des Büschels, der letzterem entspricht, senkrecht ist. Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises ableiten.

Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist aber nicht die einzige Streckenrelation, welche durch eine Winkelrelation ausgedrückt werden kann. Für jede Relation, welche durch die wie in § 81 vollzogene Substitution des Ausdrucks

$$\frac{OA \cdot OB \cdot \sin AOB}{OP}$$

für jede in ihr vorkommende gerade Strecke AB auf eine Relation zwischen den Sinus der an einem gegebenen Punkte O gespannten Winkel reducirt werden kann, gilt ebenfalls, dafs sie für die Schnittpunkte jeder beliebigen Transversale mit den Geraden OA, $OB \ldots$ wahr ist, welche jene Punkte mit diesem gegebenen Punkte verbinden. Indem man alsdann den gegebenen Punkt zum Ursprung der Reciprocität nimmt, kann ein reciproker Satz leicht abgeleitet werden. So ist z. B. der folgende *Carnot*'sche Satz eine unmittelbare Folge des § 162: Wenn ein Kegelschnitt die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 eines Dreiecks bez. in den Punktepaaren B_1, B_1'; B_2, B_2'; B_3, B_3' schneidet, so ist

$$\frac{A_2B_1 \cdot A_2B_1' \cdot A_3B_2 \cdot A_3B_2' \cdot A_1B_3 \cdot A_1B_3'}{A_2B_3 \cdot A_2B_3' \cdot A_3B_1 \cdot A_3B_1' \cdot A_1B_2 \cdot A_1B_2'}.$$

Dieses Verhältnis besitzt die eben erwähnte Eigenschaft, also dürfen für die in ihm auftretenden Strecken die Sinus der Winkel substituirt werden, welche die Punkte O bestimmen. Wir können dann den reciproken Satz bilden, welchen wir in § 327 gegeben haben.

B. Das Doppelverhältnis des Büschels, welches durch die Verbindung von vier festen Punkten eines Kegelschnittes mit einem veränderlichen fünften entsteht, ist constant.

Das Doppelverhältnis der Punkte, in welchen vier feste Tangenten eines Kegelschnittes von einer veränderlichen fünften Tangente desselben geschnitten werden, ist constant.

Der erste dieser Sätze ist für den Kreis wahr, weil alle Winkel des Büschels constant sind; in Folge dessen ist der zweite für alle Kegelschnitte richtig. Der zweite Satz gilt für den Kreis, weil die von den vier Punkten am Centrum bestimmten Winkel constant sind; in Folge dessen ist der erste Satz für alle Kegelschnitte wahr.

Indem man die Winkel betrachtet, welche in der reciproken Figur den am Kreise vorhandenen constanten Winkeln entsprechen, erkennt man, daſs die von den vier Punkten der veränderlichen Kegelschnittstangente am Brennpunkt bestimmten Winkel constant sind, und daſs ferner die Winkel, welche von den Schnittpunkten der vier Strahlen des Büschels mit der Directrix am Brennpunkt gespannt werden, von constanter Gröſse sind.

411. **Metrische Theorie reciproker Kegelschnitte.** Je näher eine Gerade oder ein Punkt dem Ursprung ist, desto weiter muſs offenbar der entsprechende Punkt oder die entsprechende Gerade von demselben entfernt sein; insbesondere entspricht jeder durch den Ursprung gehenden Geraden ein unendlich ferner Punkt und dem Ursprunge selbst die unendlich ferne Gerade. Hieraus ergibt sich allgemein *die Bestimmung der Gattung des reciproken Kegelschnittes.*

Den beiden durch den Ursprung an die Curve zu ziehenden Tangenten entsprechen die der reciproken Curve angehörigen Richtungen. Je nachdem vom Ursprung aus zwei reelle oder imaginäre Tangenten an die Curve gezogen werden können, hat die reciproke Curve zwei reelle oder imaginäre unendlich ferne Punkte, und wenn der Ursprung in der Curve liegt, so daſs die von ihm aus zu ziehenden Tangenten zusammenfallen, so fallen die unendlich fernen Punkte der reciproken Curve zusammen und die zugehörige Tangente ist die unendlich ferne Gerade. Mit den genau definirten Unterscheidungen gilt somit das Kriterium des § 406 allgemein: *Der reciproke Kegelschnitt ist eine Hyperbel, eine Ellipse oder eine Parabel, je nachdem der*

Ursprung aufserhalb, innerhalb des gegebenen Kegelschnittes oder auf demselben liegt, unabhängig von der Gattung desselben.

Den Berührungspunkten der Tangenten aus dem Ursprung entsprechen die Tangenten in den unendlich fernen Punkten der Reciproken, d. h. die Asymptoten derselben. *Die Excentricität der Reciproken* hängt nur von ihrem Asymptotenwinkel ab (§ 177) und dieser ist gleich oder supplementär dem Winkel, welchen die vom Ursprung ausgehenden Tangenten der Originalcurve einschliefsen. *Die Reciproke eines Kegelschnittes in Bezug auf einen Punkt seines reellen Hauptkreises als Ursprung ist eine gleichseitige Hyperbel.*

Ferner entspricht der Schnittpunkt der Asymptoten der Reciproken der Berührungssehne der vom Ursprung an die Originalcurve gezogenen Tangenten. *Also entspricht das Centrum der Reciproken der Polare des Ursprungs in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt.* Es ist nur ein specieller Fall hiervon, wenn dem Centrum eines Kreises die Directrix des reciproken Kegelschnittes entspricht (§ 194).

Die Axen der Reciprocalcurve sind parallel der Tangente und Normale eines mit dem gegebenen confocalen Kegelschnittes, welcher durch den Ursprung geht. Denn sie sind parallel den Halbirungslinien des Winkels, welchen die vom Ursprung an die gegebene Curve gehenden Tangenten mit einander bilden (§§ 202, 247). Auch sind die Axen der Reciproken aus ihrer Durchmesser-Involution zu bestimmen, welche zur Involution harmonischer Polaren des gegebenen Kegelschnittes am Ursprung projectivisch ist. Sofort bekannt sind die Axen dann, wenn eine Axe der gegebenen Curve durch den Ursprung geht. Insbesondere gilt offenbar der Satz: *Die Reciproke eines Kegelschnittes in Bezug auf sein Centrum als Ursprung ist der coaxiale Kegelschnitt, dessen Axen die reciproken Werte der gegebenen haben.*

B. 1) Die Reciproke einer Parabel in Bezug auf einen Punkt ihrer Directrix ist eine gleichseitige Hyperbel.

2) Man weise die folgenden Sätze als reciprok nach:

Die Höhenperpendikel eines der Parabel umgeschriebenen Drei-	Die Höhen eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschrie-

ecks schneiden sich in der Directrix.

benen Dreiecks schneiden sich in der Curve.

3) Man leite den letzten Satz aus dem von Pascal ab. (Vgl. § 285, 3.)

412. **Reciproke Kegelschnittsysteme.** Durch die polarreciproke Umformung gehen die punctuell-linearen Curvensysteme aller Stufen in tangentiell-lineare Systeme derselben Stufen über (§ 283). Sehr häufig kann man durch geeignete Wahl des Ursprungs dem reciproken System einen speciellen Charakter geben, der die Untersuchung desselben übersichtlicher werden läſst.

Allen Kegelschnitten mit einem gemeinsamen reellen Punkt entsprechen für diesen als Ursprung gleichzeitig *Parabeln.* Allen Kegelschnitten mit zwei reellen oder imaginären gemeinsamen Tangenten entsprechen für deren Schnittpunkt als Ursprung gleichzeitig Kegelschnitte mit parallelen Axen und Asymptoten, d. h. *homothetische Kegelschnitte.*

Die Reciproken von irgend zwei Kegelschnitten können concentrisch gemacht werden, indem man eine Ecke ihres gemeinsamen Polardreiecks als Ursprung nimmt. Jedes Büschel oder jede Schaar entspricht so einer Schaar oder einem Büschel *concentrischer Kegelschnitte,* deren Grundelemente ein Parallelogramm bilden.

Die reciproken Umformungen beliebiger Kreissysteme geben das Mittel, Eigenschaften von Kegelschnitten zu erkennen, welche *einen* gemeinsamen Brennpunkt besitzen (§ 246). Zu den Kreisen eines Büschels ohne reelle Schnittpunkte läſst sich stets ein Punkt finden, für welchen als Ursprung die reciproken Curven derselben *confocale Kegelschnitte* werden. Denn diese Reciproken werden confocal, sobald sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben. Also muſs der Ursprung in Bezug auf die Kreise die nämliche Polare haben, d. h. er muſs einer der beiden *Grenzpunkte* des Büschels sein.

B. 1) Confocale Kegelschnitte schneiden einander rechtwinklig. (§ 247.)

Die gemeinschaftliche Tangente von zwei Kreisen bestimmt an jedem der Grenzpunkte einen rechten Winkel.

2) Die Tangenten von zwei confocalen Kegelschnitten aus einem beliebigen Punkte bilden gleiche Winkel mit einander. (§ 247.)

Die auf einer Secante von zwei Kreisen zwischen denselben gelegenen Abschnitte spannen an jedem der Grenzpunkte gleiche Winkel.

3) Der Ort des Pols einer festen Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines confocalen Systems ist ein Perpendikel zur festen Geraden. (§ 247, 1.)

Die Polaren eines festen Punktes in Bezug auf die Kreise eines Büschels gehen durch einen festen Punkt, welcher mit jenem an jedem der Grenzpunkte einen rechten Winkel bestimmt.

4) Die Methode der reciproken Polaren bietet eine einfache Auflösung der Apollonischen Aufgabe dar: *Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.* Der Ort des Centrums für einen Kreis, welcher zwei gegebene Kreise (1), (2) berührt, ist offenbar eine Hyperbel, welche die Centra dieser Kreise zu Brennpunkten hat; denn die Aufgabe reducirt sich sogleich auf diese andere: Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, für welches die Basis und die Differenz der Seiten gegeben ist. In Folge dessen mufs (§ 405) die Polare des Centrums in Bezug auf einen der gegebenen Kreise immer einen Kreis berühren, welcher leicht construirt werden kann. Ebenso mufs die Polare des Centrums für einen unter denjenigen Kreisen, welche die Kreise (1) und (3) zugleich berühren, auch einen gegebenen Kreis berühren. Wenn wir daher zu den zwei so bestimmten Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente ziehen und den Pol derselben in Bezug auf den Kreis (1) nehmen, so ist mit ihm das Centrum des die drei Kreise berührenden Kreises gefunden.

413. Gleichung des reciproken Kegelschnittes. Wenn (§ 186) die vom Centrum auf die Tangente gefällte Senkrechte mittelst des von ihr mit den Axen gebildeten Winkel α durch $p = \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)}$ ausgedrückt wird, so ist der Abstand eines beliebigen Punktes $x_0 | y_0$ von ihr p_0 gleich $p - x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha$. Mittelst $p_0 r_0 = k^2$ ergibt sich hieraus unmittelbar *die Gleichung der Reciproken eines Kegelschnittes mit Bezug auf einen Punkt* $x_0 | y_0$ *als Ursprung als*

$$(x_0 x + y_0 y + k^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2,$$

speciell als $a^2 x^2 + b^2 y^2 = k^4$ für das Centrum selbst als Ursprung (§ 406).

Ist überhaupt die Reciproke einer Curve in Bezug auf den zum Ursprung genommenen Nullpunkt der Coordinaten bekannt,

so kann man daraus die Gleichung ihrer für einen beliebigen Punkt $x_0 \mid y_0$ als Ursprung gebildeten Reciproken ableiten. Ist nämlich der Abstand einer Tangente vom Nullpunkt p, also der vom Punkte $x_0 \mid y_0$ $Pp = (p - x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha)$, so ist wegen $pr = k^2$, $P \cdot R = K^2$ die Polargleichung der reciproken Curve

$$\frac{K^2}{R} = \frac{k^2}{r} - x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha; \qquad \text{also}$$

$$\frac{k^2}{r} = \frac{x_0 x + y_0 y + k^2}{R} \quad \text{und} \quad \frac{r\cos\alpha}{k^2} = \frac{R\cos\alpha}{x_0 x + y_0 y + k^2}.$$

Wir müssen demnach in die Gleichung der auf den Coordinatenanfang bezogenen reciproken Curve für x und y bez.

$$\frac{k^2 x}{x_0 x + y_0 y + k^2} \quad \text{und} \quad \frac{k^2 y}{x_0 x + y_0 y + k^2}$$

substituiren, um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Das Ergebnis dieser Substitution kann in der folgenden Art einfach angezeigt werden: Sei die Gleichung der auf den Anfangspunkt der Coordinaten bezogenen reciproken Curve

$$u^{(n)} + u^{(n-1)} + u^{(n-2)} + \cdots = 0,$$

wo $u^{(k)}$ die Vereinigung der Glieder k^{ten} Grades bedeutet. Dann ist die Gleichung der dem Punke $x_0 \mid y_0$ entsprechenden Reciproken

$$u^{(n)} + u^{(n-1)}\left(\frac{x_0 x + y_0 y + k^2}{k^2}\right) + u^{(n-2)}\left(\frac{x_0 x + y_0 y + k^2}{k^2}\right)^2 + \text{etc.} = 0.$$

Sie ist offenbar mit der ersten von demselben Grade.

So wird die Reciproke eines durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnittes in Bezug auf die Directrix $x^2 + y^2 = k^2$ durch Einsetzen von $-x : k^2 \mid -y : k^2$ für $\xi \mid \eta$ in die Tangentialgleichung erhalten als

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 - 2A_{13}k^2 x - 2A_{23}k^2 y + A_{33}k^4 = 0.$$

Daher hat die Reciproke in Bezug auf $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = K^2$ die Form

$$(A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2) - 2(A_{13}x + A_{23}y)(x_0 x + y_0 y + K^2)$$
$$+ A_{33}(x_0 x + y_0 y + K^2)^2 = 0.$$

414. **Parabolische Polarreciprocität.** Es gibt eine Classe von Sätzen, zu deren Transformation vorteilhaft eine *Parabel als Directrix*[160]) genommen werden kann. Diese Sätze beziehen

sich auf die Gröfse von Strecken, die einer festen Linie parallel gemessen sind. Die Eignung der Parabel zu ihrer reciproken Umformung beruht auf der Eigenschaft, dafs der zwischen irgend zwei Geraden gelegene Abschnitt in der Axe der Parabel dem Abschnitt dieser letzteren gleich ist, welcher zwischen den von den Polen dieser Geraden gefällten Axennormalen liegt. (§ 220.)

Bei der Anwendung dieser Methode entsprechen den zwei Curventangenten, welche der Axe der als Directrix gewählten Parabel parallel sind, die unendlich fernen Punkte in der Reciproken. Daher ist die Curve eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem diese Tangenten reell oder imaginär sind; endlich ist die Curve eine Parabel, wenn diese Axe durch einen der unendlich fernen Punkte der Originalcurve geht.

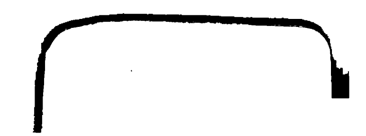
Immerhin ist diese Methode der parabolischen Polaren in ihrer Anwendung offenbar beschränkt.

B. 1) Jede veränderliche Tangente eines Kegelschnittes bestimmt in zwei festen parallelen Tangenten desselben Abschnitte, deren Rechteck von constanter Gröfse ist (§ 162, 185, 3).	Die Asymptoten und die durch irgend einen Punkt der Curve zu ihnen gezogenen Parallelen bestimmen in einer festen Geraden Abschnitte, deren Rechteck constant ist (§ 178).

Den Berührungspunkten der parallelen Tangenten entsprechen die Asymptoten, ihren Schnittpunkten mit der beweglichen Tangente aber Asymptotenparallelen durch den reciproken beweglichen Punkt. Der reciproke Satz ist äquivalent mit dem Satze von der Constanz des Rechtecks der Asymptotenparallelen.

2) Diejenigen Sehnen einer Hyperbel, welche von zwei festen Punkten derselben nach einem veränderlichen dritten Punkte gezogen werden, bestimmen einen Abschnitt von unveränderlicher Länge in der Asymptote. (§ 188, 2.)	Wenn eine beliebige Tangente einer Parabel zwei feste Tangenten derselben schneidet, so bestimmen die von ihren Endpunkten auf die Scheiteltangente gefällten Normalen in dieser einen Abschnitt von constanter Länge.

415. **Inversion.** Das eindeutige Entsprechen von Punkten mit Punkten oder von Geraden mit Geraden, welches *zusammen* für die *Collineation*, und das von Punkten mit Geraden oder von Geraden mit Punkten, welches *zusammen* für die *Reciprocität* characteristisch ist, kann *getrennt* nach verschiedenen



Gesetzen in sehr verschiedenen Arten hergestellt werden. Alle diese Arten geben Anlafs zur Transformation von Figuren in andere Figuren und zur Übertragung der auf jene bezüglichen Sätze auf diese, somit zur Erkenntnis neuer geometrischer Wahrheiten.

Im Anschlufs an die circulare Polarreciprocität ist es leicht genug, ein Entsprechen von Punkten ganz analog zu begründen, wie hier das Entsprechen von Pol und Polare. Der Fufspunkt der Polare in dem Durchmesser des Pols kann als dem letztern entsprechend angesehen werden; dann gilt das Gesetz: Entsprechende Punkte liegen auf einerlei Durchmesser der Directrix, und das Product ihrer Abstände vom Centrum ist constant. Damit kommen wir zurück auf die in § 137—139 betrachtete Verwandtschaft der *circularen Inversion* oder *der reciproken Radien Vectoren.*[161])

Inverse Punkte sind auch doppelt reciproke Elemente in jeder Reciprocität, welche den Inversionkreis und irgend einen concentrischen Kreis als Ordnungscurve besitzt[162]) (§ 398 und B.). Das involutorische Tripel besteht aus dem Inversionscentrum und den absoluten Richtungen, d. h. diesen sind alle Punkte der reciproken Dreiecksseiten doppelt reciprok oder invers (§ 137).

Infolge der quadratischen Substitution wird *die Inverse einer Curve n^{ter} Ordnung von der Ordnung $2n$ im allgemeinen.* Man übersieht sofort, dafs diese Ordnung sich stets dann erniedrigt, wenn die Originalcurve durch Ecken des Tripels geht. Denn, so oft dies geschieht, sondert sich von der Curve $2n^{ter}$ Ordnung eine Seite des Tripels ab; nur der von dem Tripel unabhängige Teil dieser zerfallenden Curve entspricht der Curve n^{ter} Ordnung eindeutig. Zu einem Kegelschnitt ist die Inverse im allgemeinen eine Curve vierter Ordnung; zu einem Kreise, da er die absoluten Richtungen enthält, nur wieder ein Kreis; zu einem Kreise durch das Inversionscentrum nur noch eine Gerade.

Bilden wir in Bezug auf denselben festen Kreis O zu einer gegebenen Curve gleichzeitig die Polarreciproke und die Inverse, so ist auf jeder Tangente der ersteren ein Punkt

der letzteren der Fufspunkt der vom Centrum O auf sie gefällten Normale: *Die Inverse ist die Fufspunktcurve der Polarreciproken für das Centrum des gemeinsamen Directrixkreises.* So ist die Fufspunktcurve eines Kegelschnittes für einen der Brennpunkte der Scheitelberührungskreis (§ 203).

Neben der Eigenschaft der Inversion, Winkelgröfsen nicht zu ändern (§ 139), tritt als die wichtigste diejenige auf, *Doppelverhältnisse am Kreise nicht zu ändern.* Nennt man das Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kreises geradezu das Doppelverhältnis des Kreisvierecks, so kann man den Satz so aussprechen: *Inverse Kreisvierecke sind doppelverhältnisgleich.* Damit können projectivische Relationen von geraden Reihen und von Strahlbüscheln auf circulare Reihen und Kreisbüschel übertragen werden.

Den Beweis liefert der Satz des § 309, dafs Strahlen eines Büschels einen Kegelschnitt in Punktepaaren einer Involution schneiden, dessen specielle Anwendung auf den Kreis schon § 135 enthält. Nun haben offenbar vier Punkte eines Kreises und die auf den Inversionsstrahlen ähnlich gelegenen Punkte des inversen Kreises gleiche Doppelverhältnisse, denn diese werden durch ähnlich gelegene Strahlbüschel gemessen. Mit den letzteren sind aber die vier inversen Punkte involutorisch, nämlich perspectivisch zu einer und derselben Reihe in der Polare von O in Bezug auf den inversen Kreis (§ 137). Endlich haben vier Punkte einer Geraden und die entsprechenden auf dem durch O gehenden inversen Kreise als gemeinsames Doppelverhältnis dasjenige ihrer Inversionsstrahlen.

B. 1) Aus den Substitutionen $x : y : 1 = x' : y' : x'^2 + y'^2$ folgt die einfache Beziehung complexer Coordinatenverbindungen

$$x' \pm iy' = \frac{1}{x \mp iy}.$$

Schreibt man $x_1 : x_3 \,|\, x_2 : x_3$ für $x - iy \,|\, x + iy$ und $x_1' : x_3' \,|\, x_2' : x_3'$ für $x' + iy' \,|\, x' - iy'$, d. h. führt man das involutorische Tripel als Fundamentaldreieck ein, so erhält man *die symmetrischen homogenen Substitutionen der Inversion als*

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2.$$

2) Aus dem Satze, dafs eine um einen festen Punkt drehende Gerade in zwei festen Geraden projectivische Reihen bestimmt, folgt invers: Die Kreise eines Büschels bestimmen in jedem von zwei festen Kreisen, welche durch je einen der Grundpunkte des Büschels gehen, projectivische Punktreihen. Ebenso folgt: Die Kreise eines Büschels bestimmen in einem festen Kreise zwei involutorische Punktreihen; etc.

3) Die drei Kreise, welche durch einen Punkt und die Schnittpunkte von je zweien unter drei beliebigen Kreisen gelegt werden können, haben einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt. Denn die Radicalaxen von drei Kreisen gehen durch einen Punkt.

4) In jedem System von drei Kreisen bestimmen die sechs Paare conjugirter Berührungskreise von je zweien unter ihnen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, sechs Schnittpunkte mit einander, welche viermal zu dreien in Kreisen durch jenen Punkt liegen. Denn die sechs Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von drei Kreisen liegen viermal zu dreien in Geraden.

5) In einem Dreieck, welches von drei Kreisen durch einen Punkt gebildet wird, die einen und denselben vierten Kreis berühren, haben die drei durch diesen Punkt, je einen der Eckpunkte und den Berührungspunkt der Gegenseite des Dreiecks gehenden Kreise einerlei Radicalaxe, und die drei Kreise, welche durch ihn und je ein Paar der Berührungspunkte bestimmt sind, schneiden die das Dreieck bildenden Kreise in Punkten, welche mit jenem Schnittpunkt der letztern auf einem Kreise liegen. Der Satz ist die Inversion der zu den Sätzen des § 315 (für einen eingeschriebenen Kreis) gehörigen Figur.

6) Wenn zwei veränderliche Kreise sich unter constantem Winkel auf einer festen Kreisperipherie und überdies in einem festen Punkte schneiden, so umhüllt der Kreis, welcher in jeder ihrer Lagen durch den festen Punkt mit ihren veränderlichen Schnittpunkten im festen Kreise bestimmt wird, einen zweiten festen Kreis, welcher mit dem ersten und jenem Punkte dieselbe Radicalaxe hat. Denn wenn zwei Gerade sich auf einem festen Kreise unter constantem Winkel schneiden, so umhüllt die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit dem Kreise einen zweiten festen, dem ersten concentrischen Kreis.

7) Man transformire durch Inversion die Figur, durch die man aus drei Paaren entsprechender Punkte von zwei projectivischen concyklischen Reihen die Doppelpunkte derselben bestimmt (§ 309), für ein auf der Kreisperipherie gelegenes Centrum. Man erhält eine von *Chasles* benutzte Construction.

8) Aus dem Satz vom Schneiden der Höhen eines Dreiecks

folgt nach der Theorie der reciproken Polaren: Die Schnittpunkte der drei Normalen, die man im Punkte O auf seinen Verbindungslinien mit den Ecken eines Dreiecks ABC errichten kann, mit den Gegenseiten des Dreiecks, liegen in einer Geraden. Durch Inversion mit dem Centrum O folgt: Wenn man auf den gemeinschaftlichen Sehnen OA, OB, OC von drei in O sich schneidenden Kreisen in O Normalen errichtet, so liegen ihre zweiten Schnittpunkte mit den entsprechenden Kreisen auf einem durch O gehenden Kreise. Die abermalige Bildung der Reciprocalfigur mit dem Ursprung O gibt: Wenn drei Parabeln von einerlei Brennpunkt von je zwei Seiten desselben Dreiecks berührt werden, so berühren die zu diesen Seiten senkrechten Tangenten der entsprechenden Parabeln eine und dieselbe Parabel vom nämlichen Brennpunkt.

416. **Methode der reciproken Coordinaten.** Um ein im allgemeinen eindeutiges Entsprechen von Elementen zu definiren, kann, wie bisher ein Kegelschnitt, ein Dreieck oder Viereck als feste Hilfsfigur dienen. Es genügt auf einige solche Methoden hinzuweisen.

Verbindet man einen Punkt x_i mit den Ecken eines Dreiecks und nimmt zu jedem Eckstrahl den symmetrischen in Bezug auf die Halbirungslinie des zugehörigen Dreieckswinkels, so schneiden sich diese drei Eckstrahlen wieder in einem Punkte y_i (§ 62, 8). Die Dreiliniencoordinaten des einen Punktes sind die reciproken Werte von denen des andern. Man kann dann diese Punkte als einander eindeutig und vertauschbar entsprechend in Bezug auf das Dreieck oder nach der *Methode der reciproken Coordinaten* ansehen. (§ 330, 3.)[112])

Die Zuordnung ist wiederum quadratisch, und zwar so, daſs einer Geraden $\Sigma a_i x_i = 0$ ein dem Dreieck umgeschriebener Kegelschnitt $\Sigma(a_i : x_i) = 0$ entspricht (§ 315) und umgekehrt. Damit erkennt man die Inversion als besonderen Fall dieses Entsprechens (§ 415, 1). Speciell der unendlich fernen Geraden entspricht der umgeschriebene Kreis des Dreiecks (§ 315, 3), jedem Eckpunkt aber alle Punkte der Gegenseite. Die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte sind die Centra der vier dem Dreieck eingeschriebenen Kreise (§ 70).

Ebenso könnte man ein Entsprechen von Geraden nach reciproken Liniencoordinaten aufstellen.

Endlich kann jedem Punkte eine Gerade zugeordnet werden, deren Liniencoordinaten die Reciproken der Punktcoordinaten sind. Geometrisch bedeutet dies nach § 64, 1) *das Entsprechen zwischen einem Punkte und seiner Harmonicale in Bezug auf das Fundamentaldreieck.* Die unendlich ferne Gerade ist die Harmonicale des Schwerpunktes. Den Punkten einer geraden Reihe $\Sigma a_i x_i = 0$ entsprechen als Harmonicale die Tangenten eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes $\Sigma(a_i : \xi_i) = 0$. Den Ecken des Dreiecks entsprechen alle durch sie gehenden Strahlen.

B. 1) Nach der Methode reciproker Coordinaten liegen entsprechende Punkte entweder zugleich im Innern des Dreiecks, also auch des umgeschriebenen Kreises, oder beide aufserhalb des letzteren und in derselben Winkelfläche des Dreiecks, oder der eine in dem zwischen einer Dreiecksseite und dem umgeschriebenen Kreise gelegenen Segment und der andere im Scheitelwinkelraum der Gegenecke. Dem Centrum des umgeschriebenen Kreises entspricht der Höhenschnittpunkt etc. Je zwei einander entsprechende Punkte können als die Brennpunkte eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes angesehen werden.

2) Einer beliebigen Geraden entspricht der Neunpunkte-Kegelschnitt derselben in Bezug auf das Viereck, welches die Punkte von den Coordinaten $\pm 1 \mid \pm 1 \mid 1$ bilden. (Vgl. § 373, 4.)

3) Den Tangenten eines mit dem umgeschriebenen Kreise concentrischen Kreises entsprechen umgeschriebene, unter einander ähnliche Kegelschnitte; jenem Kreise selbst die Enveloppe dieser Kegelschnitte, eine Curve vierter Ordnung.[163]) Man erörtere den Specialfall der gleichseitigen Hyperbeln. (Vgl. § 179, 3.)

4) Die Harmonicalen der unendlich fernen Punkte umhüllen diejenige Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten berührt.

417. **Quadratische Verwandtschaft.** Suchen wir ein Entsprechen von Elementen unter Benutzung von vier festen Elementen zu vermitteln, so können wir diese durch die mit ihnen bestimmten linearen Kegelschnittsysteme ersetzt denken. Eine Zuordnung von Punkten, in welchen geraden Reihen wiederum Kegelschnitte entsprechen, gibt die Beziehung der in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel doppelt conjugirten Pole (§§ 269, 334). Nach § 399 können wir dieselbe auch ganz allgemein als die Verwandtschaft der doppelt conjugirten Pole

in zwei Polarsystemen[164]) definiren. Aber auch schon durch *eine allgemeine Reciprocität* wird eine quadratische Verwandtschaft der doppelt reciproken Elemente erzeugt (§ 398). Wir werden sofort erkennen, dafs die beiden Verwandtschaften unter derjenigen dritten als besondere Fälle enthalten sind, welche einem Punkte je eines Systems *in zwei Reciprocitäten* den in beiden reciproken Schnittpunkt ihrer reciproken Geraden anordnet. Wir bezeichnen diese als *die allgemeine quadratische Verwandtschaft.*

Da zwischen reciproken Punkten einer Reciprocität eine bilineare Relation besteht, so können wir doppelt reciproke Punkte x_i und y_i in zwei Reciprocitäten durch zwei Relationen

$$X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 = 0, \quad X_1' y_1 + X_2' y_2 + X_3' y_3 = 0,$$

in denen die X_i, X_i' lineare Formen der x_i bedeuten, verbunden voraussetzen. Sollen x_i und y_i speciell in zwei Polarsystemen doppelt conjugirte Pole sein, so bestehen ebenfalls diese Relationen mit der Besonderheit, dafs in jeder die Coefficienten von $x_i y_k$ und $x_k y_i$ identisch werden. Sind endlich x_i, y_i durch *eine* Reciprocität einander doppelt zugeordnet, so müssen die beiden Relationen identisch werden, sobald wir in der einen die x_i und die y_i vertauschen.

Demnach besteht allgemein die quadratische Substitution

$$y_1 : y_2 : y_3 = (X_2 X_3' - X_3 X_2') : (X_3 X_1' - X_1 X_3') : (X_1 X_2' - X_2 X_1').$$

Also entsprechen den Punktreihen in den Seiten des Coordinatendreiecks $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die Kegelschnitte

$$X_1 : X_1' = X_2 : X_2' = X_3 : X_3'.$$

Diese gehen aber nach § 294 durch drei gemeinsame Punkte x_i, für deren Coordinaten die beiden Definitionsgleichungen identisch werden. Demnach gehen alle Kegelschnitte, welche geraden Reihen y_i entsprechen, durch diese drei Punkte x_i, und jedem von diesen entsprechen umgekehrt alle Punkte y_i der Geraden $\Sigma X_i y_i = 0$. Jedem andern Punkte y_i entspricht also, da er als Schnittpunkt zweier Geraden angegeben werden kann, der vierte Schnittpunkt der jenen zugeordneten Kegelschnitte, einem Strahlbüschel ein Kegelschnittbüschel. Die

drei festen Punkte des Kegelschnittnetzes nennen wir *die Hauptpunkte des Systems der* x_i.

Umgekehrt gilt für die Bestimmung des einem Punkte x_i entsprechenden Punktes y_i das Analoge, vermittelt durch *dieselben*, nur nach den x_i geordneten, Relationen $\Sigma Y_i x_i = 0$, $\Sigma Y_i' x_i = 0$, in denen Y_i, Y_i' die y_i linear enthalten. Den geraden Reihen x_i entsprechen die Kegelschnitte des Netzes $Y_1 : Y_1' = Y_2 : Y_2' = Y_3 : Y_3'$ durch die *drei Hauptpunkte des Systems der* y_i. Den durch einen Hauptpunkt der x_i gehenden Geraden entsprechen nun zerfallende Kegelschnitte, denen eine Verbindungslinie zweier Hauptpunkte der y_i angehört. *In den beiden Hauptdreiecken entsprechen einander daher eine Ecke des einen und eine Seite des andern.* Endlich gibt es noch *vier sich selbst entsprechende Punkte* in der Verwandtschaft, nämlich die Schnittpunkte der Polkegelschnitte $\Sigma X_i x_i = 0$, $\Sigma X_i' x_i = 0$ beider Reciprocitäten.

Beschäftigen wir uns nur mit dem allgemeinen Fall, wo die Hauptdreiecke nicht degeneriren, so können wir auf eines derselben die Coordinaten beziehen. Sollen z. B. allen Geraden x_i Kegelschnitte $\lambda_1 y_2 y_3 + \lambda_2 y_3 y_1 + \lambda_3 y_1 y_2 = 0$ entsprechen, so mufs es drei Constante k_i geben, so dafs $X_i' = k_i X_i$ wird; nur dann entsprechen den Fundamentalpunkten drei Gerade $X_i = 0$, welche das Hauptdreieck der x_i bilden. Nun werden die Substitutionen der *einen* Gruppe

$$x_1 : x_2 : x_3 = (k_2 - k_3) X_2 X_3 : (k_3 - k_1) X_3 X_1 : (k_1 - k_2) X_1 X_2.$$

*Die allgemeine quadratische Verwandtschaft enthält die Collineation**) *als Specialfall.* Die Grundgleichungen der letzteren drücken die Coordinatenverhältnisse $y_1 : y_3 \mid y_2 : y_3$ in Form von *gleichbenannt* gebrochenen Functionen der x_i aus. Man erhält dies, sobald man identisch $X_1 \equiv 0$, $X_2' \equiv 0$, $X_2 \equiv X_1'$ setzt. Auf die allgemeine quadratische Verwandtschaft kommt man umgekehrt, wenn man die Nenner der jenen Verhältnissen gleichwertigen Ausdrücke als *ungleich* voraussetzt

*) Auch die Reciprocität ist in der allgemeinen Verwandtschaft mit enthalten, nämlich dann, wenn eine der definirenden Relationen identisch wird ($X_i \equiv 0$).

$y_1 : y_3 = L_1 : L_3$, $y_2 : y_3 = L_2 : L_4$; alsdann sind die Hauptpunkte der x_i $L_1 = L_3 = 0$, $L_2 = L_4 = 0$, $L_3 = L_4 = 0$, aber $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sind nicht Seiten ihres Dreiecks.

418. **Verwandtschaft doppelt conjugirter Elemente.** Von Wichtigkeit ist vorzüglich der Fall der involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades, für welche das Gleichungspaar in den x_i und y_i symmetrisch sein mufs. Alsdann kann nur entweder $X_i = Y_i$, $X_i' = Y_i'$ oder $X_i = Y_i'$, $Y_i = X_i'$ sein, sofern man x_i und y_i als gleichartige Variabeln rechnet. Diese Bedingungen definiren aber die durch zwei *Polar*systeme oder *eine* Reciprocität vermittelte Verwandtschaft. In beiden decken sich die Hauptdreiecke, nur in verschiedener Zuordnung der Ecken und Seiten (§§ 371, 398).

Nehmen wir die Fundamentalpunkte als die Hauptpunkte, so müssen $X_i = 0$ deren Verbindungslinien darstellen (§ 417). Also sind für die Substitutionen nur die Anordnungen möglich

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$$

und

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_2 y_1 : y_1 y_3 : y_3 y_2,$$

welche nach dem Früheren die genannten Hauptfälle characterisiren. *Somit ist die Methode der reciproken Coordinaten der Ausdruck der allgemeinen Verwandtschaft doppelt conjugirter Elemente.*

Nach früheren Ergebnissen kann sie leicht geometrisch construirt werden, sobald man ihre sich selbst entsprechenden Elemente, die gemeinsamen Elemente der die Polarsysteme definirenden Kegelschnitte kennt. Das Hauptdreieck ist das Diagonaldreieck jenes Quadrupels, von dem ein Element als Einheitselement gewählt werden kann. Alsdann definirt die allgemeine Methode der reciproken Coordinaten *die Verwandtschaft der in Bezug auf das Quadrupel* $1 \mid \pm 1 \mid \pm 1$ *doppelt conjugirten Elemente* folgendermafsen: Die Gleichungen $x_i y_i = x_k y_k$ definiren involutorische Strahlbüschel mit den Doppelstrahlen $x_i^2 = x_k^2$, d. h. die Verbindungsstrahlen von entsprechenden Punkten mit einem Diagonalpunkt sind conjugirt harmonisch mit den durch ihn gehenden Seiten des sich selbst entsprechenden Vierecks.

Wir können aber z. B. *die Verwandtschaft in Bezug auf*

ein Vierseit auch direct auf den Satz des § 327, 4) gründen:[165]) Die harmonisch conjugirten der Schnittpunkte einer Geraden L mit den Diagonalen in Bezug auf die zugehörigen Ecken liegen in einer Geraden L'. Dreht sich L um einen Punkt P, so schneidet L' in den Diagonalen projectivische Punktreihen aus, d. h. L' umhüllt einen dem Diagonaldreiseit eingeschriebenen Kegelschnitt **P**, und umgekehrt. Dieser P entsprechende Kegelschnitt **P** degenerirt nur, wenn P einer Diagonale angehört, nämlich in das Punktepaar, das aus dem zu P in der Diagonale harmonisch conjugirten und dem gegenüberliegenden Diagonalpunkt besteht.

Damit tritt deutlich hervor, dafs vier Strahlen von P und die entsprechenden Tangenten von **P** dasselbe Doppelverhältnis haben. *Doppelverhältnisse in entsprechenden Gebilden ersten und zweiten Grades einer quadratischen Transformation haben gleichen Wert* (vgl. § 415).

Die vorige Zuordnung ist aber identisch mit der Verwandtschaft der doppelt conjugirten Polaren in Bezug auf die Schaar der dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte, denn ihr analytischer Ausdruck ist $\xi_i \eta_i = \xi_k \eta_k$ und die Gleichungen der Punktepaare der Schaar sind in $\xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2$ enthalten. Durch jeden Punkt P gehen also zwei doppelt conjugirte Polaren, welche die Tangenten aus P an den entsprechenden Kegelschnitt **P** sind und in P von den durch diesen Punkt gehenden beiden Curven der Schaar berührt werden.

B. 1) Nimmt man als Definitionsgleichungen $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$, $\lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_3 y_3 = 0$, wo das erste Polarsystem in die Verbindungsstrahlen der Pole mit einem Hauptpunkt degenerirt, so entsprechen den Geraden ξ_i die Kegelschnitte

$$\xi_3 (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) - \lambda_3 x_3 (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) = 0.$$

Bei Interpretation in rechtwinkligen Coordinaten ($x_3 = y_3 = 1$) besteht das Netz aus den durch den Nullpunkt gehenden homothetischen Kegelschnitten. Je zwei Kegelschnitte schneiden sich im Nullpunkt unter demselben Winkel, wie die entsprechenden Geraden. Mit $\lambda_1 = 0$ oder mit $\lambda_1 = \lambda_2$ erhält man ein Netz von Parabeln oder von Kreisen. Der letzte Fall ist derjenige der Inversion (§ 415).

2) Eine Anwendung der allgemeinen involutorischen Transformation bietet die Figur zweier projectivischer Strahlbüschel in perspec-

tivischer Lage (§ 94). So entspringt der Satz: Wenn zwei projectivische Büschel von Kegelschnitten $S_1 + kS_2 = 0$, $U_1 + kU_2 = 0$ (§ 334) durch dieselben drei Punkte A, B, C gehen, so dafs der vierte Grundpunkt des einen D, der des andern E ist, und sie so liegen, dafs der durch die fünf Punkte A, B, C, D, E bestimmte Kegelschnitt sich selbst entspricht, so liegen die vierten Schnittpunkte der entsprechenden Kegelschnitte beider Büschel sämmtlich auf einem dem Dreieck A, B, C umgeschriebenen Kegelschnitt.

Besonders bequem erlaubt diese Methode von Kegelschnitten zu Curven höherer Ordnungen überzugehen; so gibt die Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Büschel eine Generation von Curven vierter Ordnung; etc.

3) Wenn die Punkte c, c' mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammenfallen, so bilden die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte eine Schaar von confocalen Curven, für welche die associirten Punkte a, a' und b, b' die reellen und imaginären Brennpunkte bezeichnen, während C das gemeinsame Centrum ist. Nach § 383 sind nun die entsprechenden Geraden L, L' normal zu einander, und da sie die Segmente aa', bb' zwischen den Brennpunkten harmonisch teilen, so sind sie Tangente und Normale von zwei confocalen Kegelschnitten in ihrem Schnittpunkt. Zugleich entspricht jedem Punkte p eine Parabel P, welche die Geraden aa', bb' berührt und die Gerade pC zur Directrix hat.

Den Normalen, welche von p an einen Kegelschnitt S der confocalen Schaar gezogen werden können, entsprechen die Tangenten, welche der Kegelschnitt S mit dieser Parabel gemein hat. Wenn diese gemeinschaftlichen Tangenten construirt wären, so bestimmen ihre Berührungspunkte in S mit C die fraglichen Normalen. Das Doppelverhältnis der vier Tangenten ist dem der vier Normalen gleich.

Die Fufspunkte der Normalen sind die Schnittpunkte von S mit einem Kegelschnitt H, welcher die Polarcurve von P in Bezug auf C ist und daher, weil P dem zu S harmonischen Dreieck ABC eingeschrieben ist, demselben Dreieck ABC umgeschrieben sein mufs. Also ist er eine gleichseitige Hyperbel durch das Centrum von S, deren Asymptoten den Axen von S parallel sind. Umgekehrt bestimmt jede dem Dreieck ABC umgeschriebene gleichseitige Hyperbel in S vier Punkte, deren Normalen in einem Punkte p convergiren, wo p der Parabel P entspricht, welche die Polarcurve jener Hyperbel in Bezug auf S ist.

Wenn nun den Tangenten von S die zugehörigen Normalen entsprechen, so entspricht der Curve S ihre Evolute (§ 264), eine Curve von der vierten Classe, welche durch diese Zuordnung mittelst der bekannten Curve S untersucht werden kann.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Von der Methode der Projection.

419. **Centralprojection.** Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, wie die allgemeine Idee der Verwandtschaft von zwei geometrischen Figuren in mannigfachen Formen erscheint. Die einfachste und anschaulichste Begründung einer solchen Beziehung bietet *die Methode der Projection* dar.[166])

Wenn alle Punkte einer in der Ebene **E** gelegenen Figur mit irgend einem reellen, festen Punkte im Raume O durch Strahlen verbunden werden, so bestimmen diese einen *Kegel* von der *Spitze* O; die Schnittlinie dieses Kegels mit einer beliebigen Ebene **E**′ bildet eine Figur, die man die *Centralprojection* der gegebenen Figur aus dem *Projectionscentrum* O auf die Bildebene oder *Projectionsebene* **E**′ nennt. Man bezeichnet den Kegel dann auch als den *projicirenden Kegel.*

Jedem Punkte in der einen Figur entspricht ein Punkt in der andern, nämlich der Schnittpunkt letzterer mit dem projicirenden Strahle des ersteren. *Eine Gerade wird immer als Gerade projicirt.* Denn die projicirenden Strahlen aller Punkte der Geraden bilden eine O enthaltende Ebene, die *projicirende Ebene* der Geraden, welche durch ihren Schnitt mit **E**′ die Projection der gegebenen Geraden bestimmt.

Wenn Punkte in der einen Figur in gerader Linie liegen, so liegen auch die entsprechenden Punkte der andern Figur in einer geraden Linie; wenn Gerade in der einen Figur durch denselben Punkt hindurchgehen, so schneiden sich auch die entsprechenden Geraden der andern in einem Punkte, nämlich dem entsprechenden Punkte jenes ersteren.

420. Wenn eine durch das Centrum O parallel zur Bildebene E' gelegte Ebene die Originalebene E in einer Geraden r schneidet, so projicirt sich jedes Strahlbüschel in E, welches seinen Scheitel in dieser Geraden r hat, in ein System von Parallelen in E'. Denn ein Strahl, welcher vom Centrum O nach einem beliebigen Punkte der Geraden r gezogen wird, begegnet der Projectionsebene erst in unendlicher Entfernung. Insofern jener Punkt Schnittpunkt von mehreren Geraden ist, müssen sich diese als solche Gerade projiciren, deren Schnittpunkt unendlich fern liegt. Umgekehrt wird jedes System von Parallelen in E in ein solches Strahlbüschel projicirt, welches seinen Scheitel in einem Punkte der Geraden q' hat, in der eine durch O parallel zur Originalebene E gelegte Ebene die Projectionsebene E' schneidet. Nur die Parallelen zur Bildebene haben auch parallele Bilder.

So führt uns die Methode der Projectionen ganz naturgemäfs zu dem Schlusse, dafs ein beliebiges System von Parallelen als ein durch einen unendlich fernen Punkt gehendes Büschel betrachtet werden kann (§ 65). Sie lehrt uns ebenso, dafs alle unendlich entfernten Punkte in einer Ebene als in einer Geraden gelegen angesehen werden können (§ 72), denn die Projection aller der Punkte, in welchen Parallelen sich schneiden, liegen in der Geraden q' in der Projectionsebene.

Wir bemerken endlich, dafs die Schnittlinie s der Projectionsebene mit der Ebene der Figur zugleich der Ort der Schnittpunkte der Geraden der Figur mit ihren bez. Projectionen ist. Man nennt diese Gerade, den Ort der in beiden Systemen sich selbst entsprechenden Punkte, die *Spur* der einen Ebene in der andern. Jede der beiden andern Geraden r, q', welche in jeder Ebene der unendlich fernen Geraden der andern entsprechen, heifst *Fluchtlinie* oder *Gegenaxe* der einen Ebene in der andern. Die Punkte jeder Fluchtlinie entsprechen den Richtungen der Strahlen der andern Ebene und heifsen Fluchtpunkte der zugehörigen Parallelen.

421. *Jede ebene Curve wird in eine andere Curve von derselben Ordnung und Classe projicirt.* Denn, wenn die gegebene

Curve durch eine Gerade in einer Anzahl von Punkten A, B, C, D ... geschnitten wird, so wird ihre Projection durch die Projection der Geraden in eben so vielen entsprechenden Punkten A', B', C', D' ... geschnitten. Aber die Ordnung einer Curve wird durch die Zahl von Punkten geometrisch bestimmt, welche sie mit einer Geraden gemein haben kann (§ 23). Wenn unter den Schnittpunkten der Curve mit einer Geraden neben reellen auch imaginäre sind, so bleibt die Zahl der reellen und der imaginären Punkte durch Projection ungeändert. Wenn zwei Curven sich schneiden, so schneiden sich ihre Projectionen in derselben Anzahl von Punkten; reellen Schnittpunkten entsprechen reelle, imaginären aber imaginäre*).

Jede Tangente der einen Curve wird in eine Tangente der andern Curve projicirt. Denn jede Sehne AB der einen Curve wird als eine Sehne $A'B'$ projicirt; wenn aber die Punkte A, B zusammenfallen, so fallen auch A', B' zusammen, und die Sehne $A'B'$ ist eine Tangente der Projection der Curve (§ 109). Wenn zwei Curven einander in einer Anzahl von Punkten berühren, so berühren ihre Projectionen einander in eben so vielen zu jenen entsprechenden Punkten.

Wenn irgend eine Eigenschaft, die sich nicht auf die Gröſse von Strecken oder von Winkeln, sondern auf die Lage Gerader als durch gewisse Punkte gehend oder gewisse Curven berührend, oder auf die Lage von Punkten u. s. w. bezieht, für eine gegebene Curve wahr ist, so bleibt diese Eigenschaft für alle die Curven gültig, in welche die gegebene projicirt werden kann.[167]) Beispiele bietet § 432 f.

422. **Projectivische Eigenschaften** heiſsen Eigenschaften dieser Art, welche, wenn sie für irgend eine Figur wahr sind, auch für die Projectionen derselben gelten. Zu diesen Eigenschaften gehören auſser den vorhin bezeichneten auch einige solche, welche die Gröſsen von Strecken und Winkeln scheinbar enthalten. So stimmt das Doppelverhältnis von vier

*) Eine Ausnahme machen nur die Curven, deren Ebenen durch das Projectionscentrum gehen, da deren Projectionen in die Spur der Ebene fallen.

Punkten in einer Geraden $(ABCD)$, da es durch das Doppelschnittverhältnis des projicirenden Büschels $(O\,.\,ABCD)$ am Centrum der Projection gemessen wird, mit dem der vier Punkte $(A'B'C'D')$ überein, in welchen dies Büschel durch eine beliebige Transversale geschnitten wird. *Doppelverhältnisse werden durch Projection nicht geändert.* (Vgl. Kap. V.) Aber Halbirungen werden zu harmonischen Gruppen, symmetrische Reihen oder Büschel zu involutorischen.

Oder, wenn zwischen den durch eine beliebige Anzahl von Punkten in einer Geraden bestimmten Strecken eine Gleichung von der Form

$$AB.CD.EF + k\,.\,AC.BE.DF + l.AD.CE.BF + \cdots = 0$$

besteht, in welcher jedes Glied die nämlichen Punkte nur in verschiedener Ordnung enthält, so ist diese Relation projectivisch. Denn nach § 81 kann man für AB das Verhältnis $OA\,.\,OB\,.\sin AOB : OP$ und für die übrigen Strecken entsprechende Ausdrücke substituiren, wodurch die Gleichung in allen Gliedern das Product $OA\,.\,OB\,.\,OC\,.\,OD\,.\,OE\,.\,OF$ im Zähler und die Gröſse $\overline{OP}^3$ im Nenner enthält; durch Division mit diesen Factoren wird sie daher auf eine Relation zwischen den Sinus der am Punkte O gebildeten Winkel zurückgeführt.

Auch ist leicht zu erkennen, daſs die Punkte A, B, C, D, E, F nicht in einer Geraden zu liegen brauchen, um diese Projectivität zu begründen; wenn die Senkrechte OP nicht für alle die in der Relation auftretenden Segmente die nämliche ist, so ist nur nötig, daſs dieselben so geordnet sind, daſs in jedem Gliede der Gleichung im Nenner das nämliche Product solcher zugehörigen Perpendikel $OP\,.\,OP'\,.\,OP''\ldots$ auftritt. Als ein Beispiel dafür erwähnen wir den Satz: Wenn Gerade, welche von den Ecken eines Dreiecks ABC nach demselben Punkte seiner Ebene gezogen werden, die Gegenseiten desselben in den Punkten a, b, c schneiden, so ist $Ab\,.\,Bc\,.\,Ca$ gleich $Ac.Ba.Cb$. Weil diese Relation von der eben besprochenen Art ist, so reicht es hin, sie für irgend eine Projection des Dreiecks ABC zu beweisen; machen wir für dieselbe die Voraussetzung, daſs der Punkt C in unendlicher Entfernung

projicirt sei, so werden die Geraden AB, BC, Cc einander parallel und die Relation wird $Ab \,.\, Bc = Ac \,.\, Ba$, deren Wahrheit ohne Weiteres ersichtlich ist.

Offenbar reicht es überhaupt zum Beweise solcher projectivischen Eigenschaften von Figuren hin, den Beweis für die einfachste derjenigen Figuren zu liefern, in welche die gegebene projicirt werden kann; z. B. oft für eine solche, in welcher eine gewisse Gerade der Figur unendlich fern erscheint. Wenn z. B. gefordert wäre, *die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks $ABCD$ mit den Diagonalpunkten EFG* zu untersuchen, so verbinden wir alle Punkte dieser Figur mit einem Punkte O im Raume durch Strahlen und schneiden die Verbindungslinien durch eine zur projicirenden Ebene OEF parallele Ebene, so dafs EF in unendlicher Entfernung projicirt erscheint. Die Projection $A'B'C'D'$ des Vierecks ist dann ein Parallelogramm. *Jedes Viereck kann demnach central in ein Parallelogramm projicirt werden.* Da nun die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbiren, d. h. je mit den Ecken und dem unendlich fernen Punkt eine harmonische Teilung bilden, so schliefst man aus der projectivischen Natur dieser Relation, dafs in jedem Viereck eine Diagonale durch die anderen und die Ecken harmonisch geteilt wird.

B. 1) Eine gerade Reihe von Punkten und ihr centralprojectivisches Bild sind projectivische Reihen. Wenn das Centrum der Projection in der Originalreihe liegt,[168]) so entspricht allen von ihm verschiedenen Punkten von dieser ihr Schnittpunkt mit der Bildreihe, und alle anderen Punkte der letzteren entsprechen dem mit dem Centrum zusammenfallenden Punkte der ersten Reihe. Die Projectivitätsgleichung (§ 92) $a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$ gibt für λ und λ' bez. die constanten Werte c_1 und c_2, wenn man hat $b : a = -c_2$, $c : a = -c_1$, $d : a = c_1 c_2$. Man characterisire die entsprechende Specialität projectivischer Strahlbüschel und zeige den Zusammenhang dieser *singulären* Projectivitäten mit der parabolischen Involution. (§§ 95, 343.)

2) Man discutire die Degenerationsformen der Kegelschnitte (vgl. §§ 95, 292), welche aus der Verbindung solcher singulärprojectivischen Punktreihen und Strahlbüschel hervorgehen — im Fall getrennter wie vereinigter Lage.

3) Wenn zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ so gelegen sind, dafs

die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten $AB, A'B'$; $BC, B'C'$; $CA, C'A'$ in einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken AA', BB', CC' in einem Punkte.

Der Satz bedarf keines Beweises mehr, wenn man, wie es seine projectivische Natur erlaubt, die Figur, auf welche er sich bezieht, so projicirt, dafs die Gerade, in welcher die entsprechenden Seiten beider Dreiecke sich schneiden, in unendlicher Entfernung erscheint; denn er geht alsdann in den einfachen Ausdruck der Ähnlichkeit und ähnlichen Lage beider Dreiecke über: Wenn in zwei Dreiecken abc, $a'b'c'$ die Seiten des einen den Seiten des andern parallel sind, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken in einem Punkte; welches einfach aus der Bemerkung hervorgeht, dafs die Geraden aa' und bb' beide die Linie cc' in dem nämlichen Verhältnis teilen.

423. **Geometrie im Bündel.** Die projicirenden Strahlen der Punkte, die projicirenden Ebenen der Geraden einer Ebene bilden, wie man sagt, *ein Bündel von Strahlen und Ebenen am Centrum O als Scheitel.* Also ist das Bündel in seinen Elementen von derselben Mannigfaltigkeit, wie die Ebene in den ihrigen. Aus der ebenen Geometrie folgt somit *eine Geometrie im Bündel,* welche die Lagenbeziehungen zwischen den Strahlen und Ebenen durch *einen* Scheitel untersucht. Nach dem Vorigen gelten alle Doppelverhältniseigenschaften ebener Figuren auch für die sie projicirenden Figuren des Bündels, sobald man den Begriff des Doppelverhältnisses von vier Strahlen eines Büschels auf die sie projicirenden Ebenen eines Büschels überträgt. Demnach erhalten wir aus projectivischen Sätzen der ebenen Geometrie die entsprechenden der Geometrie im Bündel, indem wir nur *Strahl und Ebene an Stelle von Punkt und Strahl* setzen.

Während die gewöhnliche Anschauung das Bündel als von der Ebene wesentlich verschieden ansieht, weil es den ganzen Raum erfüllt, ist *die allgemeine analytische Geometrie im Bündel und in der Ebene identisch.* Hierin liegt die unmittelbare Rechtfertigung der Einführung der räumlichen Projectionsmethode in die Untersuchungen der ebenen Geometrie. *In der Tat können wir die ternären homogenen Coordinaten von Elementen der Ebene auch als die Coordinaten der projicirenden Elemente des Bündels interpretiren,* sobald wir als Fundamental-

strahlen und -ebenen des Bündels die projicirenden der Fundamentalpunkte und -linien der Ebene einführen; denn die Coordinatenverhältnisse sind Doppelverhältnisse. Gleichungen ersten und zweiten Grades in x_i, bez. ξ_i definiren Ebenen bez. Strahlen und Kegel zweiter Ordnung bez. Classe im Bündel.

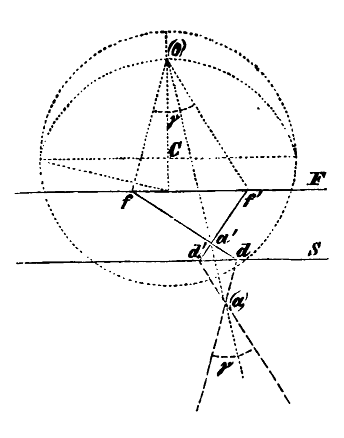
Und schneiden wir Strahlen und Ebenen des Bündels mit einer Original- und einer Bildebene, so definiren die Coordinaten der Elemente P der einen Figur die der entsprechenden Elemente P' der andern, falls wir sie je auf entsprechende Fundamentalelemente A_i, E, A_i', E' der Ebenen beziehen. *Eine Originalcurve und ihre Projectionen sind durch dieselbe Gleichung in perspectivischen Coordinatensystemen dargestellt.*

Führen wir speciell nicht-homogene Coordinaten ein, indem wir x_3 und ξ_3 constant denken, so heifst dies, wir untersuchen statt der Originalfigur eine Projection auf eine Ebene, welche zur Verbindungsebene des Centrums mit der Fundamentallinie $A_1 A_2$ parallel ist. Dann ist $A_1' A_2'$ die unendlich ferne Gerade und man hat noch dafür zu sorgen, dafs die Projection des Einheitpunktes E in die Halbirungslinie $A_1' E'$ der Axen $A_1' A_2'$, $A_1' A_3'$ fällt (§ 85), wozu nur OE die Strecke $A_1 A_2$ halbiren mufs. Umgekehrt wird mit dem Homogenmachen eine beliebige Projection eines auf zwei Axen bezogenen Originals eingeführt.[169])

424. **Centralcollineation.** Entsprechen sich ebene Systeme nach der Methode der Centralprojection in der Weise, dafs alle Paare entsprechender Punkte in Geraden aus einem Punkte O liegen, und alle Paare entsprechender Geraden sich in Punkten einer Geraden S begegnen, so bleibt diese Beziehung auch ungestört, wenn wir beide Systeme durch eine Drehung des einen um ihre gemeinschaftliche Schnittlinie S in *eine* Ebene zusammenlegen. *Man erkennt daraus die Identität der centralprojectivischen Relation ebener Systeme mit der centrischen Lage collinearer Systeme* (§ 99).

Denn, da der Winkel γ von zwei sich schneidenden Geraden durch den von Parallelen aus dem Centrum an diesen letzteren gemessen wird, so liefert diesen die Umlegung der Ebene OF um F als die Fluchtlinie der Ebene des Winkels

durch Verbindung des Centrums (O) mit den Fluchtpunkten f, f' der Schenkel, d. i. den Schnittpunkten ihrer Bilder mit F. In Folge dessen ist auch der von $(O)f$ mit F eingeschlossene Winkel der Winkel der Geraden gegen die Spur S. Wenn man also die Fluchtpunkte der Geraden in der Ebene mit dem mit der Ebene OF umgelegten Centrum (O) durch Strahlen verbindet und zu diesen durch die entsprechenden Durchgangspunkte d, d' Parallelen zieht, so geben diese die Lagen jener Geraden nach Überführung in die Bildebene an. Insbesondere entspricht diesem Gesetze gemäfs jeder durch (O) gehende Strahl sich selbst. Es liegen also, weil entsprechende Punkte die Schnittpunkte von entsprechenden Geraden sind, auch noch nach der Zusammenlegung beider Systeme in eine Ebene die entsprechenden Punkte in Strahlen aus einem Punkte (O). (In der Figur ist der Kreis um C derjenige vom Radius CO oder der *Distanzkreis*, durch den man die Lage des Centrums gegen die Bildebene festsetzt.)



Daher sind beide Systeme collinear und in centrischer Lage, die Spur S der Ebene ist die Axe und (O) ist das Centrum der Collineation; die Fluchtlinien F und F^* sind die Gegenaxen beider Systeme, und die Gegenaxe F^* ist von (O) eben so weit und im nämlichen Sinne entfernt, wie S von F. Die Gegenaxen fallen in der Mitte zwischen Collineations-Centrum und -Axe zusammen, wenn das Projectionscentrum O in der Halbirungsebene des Drehungswinkels zwischen beiden Ebenen liegt; liegt es in der Halbirungsebene seines Nebenwinkels, so liegen die Gegenaxen symmetrisch zur Collineationsaxe und diese enthält das Collineationscentrum. Im ersteren Falle hat man die *Involution der collinearen ebenen Systeme.* (§ 99.) Aus der Collineationsaxe, der einen Gegenaxe und dem (umgelegten) Centrum (O) bestimmt sich zu

dem als gegeben gedachten einen System das andere durch lineare Construction, also zum Original das Bild auf gleiche Weise wie zum Bilde das Original.[170])

Bringen wir Original und Bild *irgendwie* unverändert zur Vereinigung in einer Ebene, so können nun die Elemente beider Systeme auf *eines* der beiden Fundamentalquadrupel bezogen werden. Dann unterliegen die bisher im andern interpretirten Coordinaten einer linearen Transformation, welche durch die Lage ihres Quadrupels im gewählten System bestimmt ist (§ 91). Der geometrische Process zeigt so die Identität des analytischen Ausdrucks für Coordinatentransformation und allgemeine Collineation. Haben wir, wie oben, die Collineation nur durch eine Drehung der gegebenen Ebenen um die gemeinsame Schnittlinie erzeugt, so sind die Substitutionen von der besonderen Art, wo *ein* Strahlbüschel und *eine* Punktreihe je sich selbst entspricht (§ 98).

B. 1) Nimmt man den Nullpunkt von rechtwinkligen Coordinaten als Collineationscentrum (O), $x = a$ als Axe (Spur) und $x = b$ als Fluchtlinie F, so gibt die Ausführung der Construction des Textes die Gleichungen

$$x = \frac{(b-a)\,x'}{b-x'}, \quad y = \frac{(b-a)\,y'}{b-x'}.$$

Das entsprechende Coordinatendreieck der Projection, in welchem die homogenen Coordinaten die Werte $\mu x \,|\, \mu y \,|\, \mu$ haben, ist gebildet aus $a - b \,|\, 0$, $0 \,|\, \infty$, $0 \,|\, 0$ (Streifencoordinaten § 85).

2) Man zeige, dafs für $a = 2b$ die involutorische, für $a = 0$ die specielle Collineation des Textes unter der Formel in 1) enthalten ist. Das characteristische Doppelverhältnis ist -1 und $+1$, im allgemeinen $(b-a):b$. (§ 98).

3) Zwei Kegelschnitte sind centrisch collinear für einen Schnittpunkt gemeinsamer Tangenten, für die sie auf einerlei Seiten liegen, als Centrum und eine zugeordnete Schnittsehne (§ 279) als Axe.

425. **Kegel zweiten Grades.** Alle Projectionen eines Kreises aus einem nicht seiner Ebene angehörigen Centrum sind nach § 421 Curven zweiten Grades. Man nennt daher Kegel über kreisförmiger Basis selbst Kegel zweiten Grades. Die Untersuchung der ebenen Querschnitte solcher Kegel ist nach dem Obigen identisch mit der Theorie der zu Kreisen collinearen Curven (§ 310). Es soll hier aus der räumlichen

Auffassung die elementare Definition dieser Querschnitte abgeleitet und damit die Bezeichnung der Curven zweiten Grades als Kegelschnitte direct begründet werden.

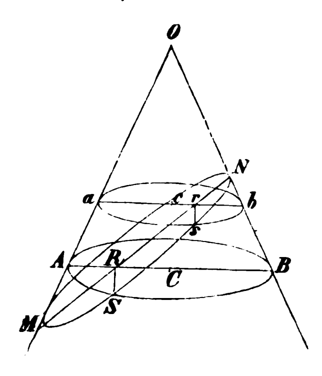
Man pflegt einen Kreiskegel ferner *gerade* oder *schief* zu nennen, je nachdem die Verbindungsgerade seiner Spitze mit dem Centrum des Basiskreises auf dessen Ebene senkrecht ist oder nicht: Axe des Rotationskegels im ersten Fall. Da die Vorstellung des geraden Kreiskegels die einfachere ist, so ist es zweckmäſsig, von ihm auszugehen. Jedoch stimmt die Untersuchung der Schnitte des schiefen Kegels mit derjenigen der Schnitte des geraden Kegels völlig überein.

Die Schnitte eines jeden Kegels mit parallelen Ebenen sind *ähnliche* Curven. Denn, wenn wir in der Ebene der einen Curve einen Punkt A und in der Ebene der andern Curve den entsprechenden Punkt a auf OA annehmen, und von ihnen nach irgend zwei entsprechenden Curvenpunkten B, b Vectoren ziehen, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken OAB und Oab die Verhältnisgleichheit $OA : Oa = AB : ab$. Weil also *jeder* Vector der einen Curve zu dem entsprechenden Vector der andern in dem nämlichen constanten Verhältnis $OA : Oa$ steht und die entsprechenden Winkel übereinstimmen, so sind die beiden Curven ähnlich (§ 245). Insbesondere wird jeder Kreiskegel durch eine Ebene, welche seiner Basis parallel ist, in einem Kreise geschnitten. Wir denken nur die entsprechenden Punkte A, a als die Mittelpunkte der beiden Curven.

Allgemeiner aber erkennen wir nach denselben Überlegungen, *daſs die Centralprojection ebener Figuren auf parallele Ebenen ähnliche Figuren liefert.* Da alsdann Spur und Fluchtlinie unendlich fern sind, so ist unter Umlegung der einen Ebene in die andere eine Parallelverschiebung zu verstehen, bei welcher alle Punkte Normalen der Ebene beschreiben. Man kommt so auf die Ähnlichkeit in ähnlicher Lage als Specialfall der Centralcollineation (§ 100).

426. *Die ebenen Schnitte eines Kreiskegels sind entweder Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln.* Im Falle des geraden Kegels lege man eine Ebene OAB durch die Axe OC senkrecht zur Schnittebene und betrachte sie als die Ebene der

Zeichnung. Die Schnittebene $MSsN$ sowol wie die Basisebene ASB steht dann senkrecht zur Ebene der Zeichnung, ebenso die Gerade RS, in der sich jene beiden Ebenen schneiden. Wir setzen alsdann zuerst voraus, dafs die Gerade MN, in welcher die Schnittebene die Ebene OAB schneidet, den beiden Seiten OA und OB auf derselben Seite des Scheitels O begegnet, wie die Figur es angibt.

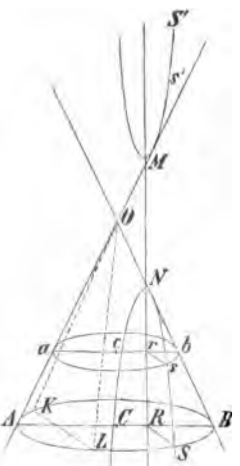


Durch irgend einen Punkt s der Schnittcurve legen wir eine zur Basis parallele Ebene und erhalten dadurch für das Quadrat der Ordinate des Kreises $\overline{RS}^2 = AR.RB$, und ebenso $\overline{rs}^2 = ar.rb$. Wenn man aber die ähnlichen Dreiecke ARM und arM, BRN und brN betrachtet, so folgt

$$AR.RB : MR.RN = ar.rb : Mr.rN,$$

also $$\overline{RS}^2 : \overline{rs}^2 = MR.RN : Mr.rN.$$

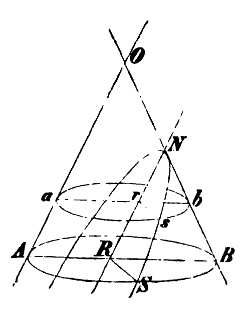
Das Quadrat einer beliebigen Ordinate rs der Schnittcurve $MSsN$ steht also zu dem Rechteck aus den von ihr in der Linie MN bestimmten Abschnitten in dem constanten Verhältnis $\overline{RS}^2 : MR.RN$. Nach § 162 ist der betrachtete Kegelschnitt eine *Ellipse*, für welche MN die Hauptaxe ist, und deren kleine Axe sich aus der Bemerkung bestimmt, dafs ihr Quadrat zu $\overline{MN}^2$ im Verhältnis $\overline{RS}^2 : MR.RN$ stehen mufs.



Wir nehmen zweitens an, eine der Seiten OA werde von der Geraden MN erst in der Verlängerung geschnitten. Der vorige Beweis bleibt völlig unverändert, nur in dem Endergebnis tritt *die* Veränderung ein, dafs nun das constante Verhältnis zwischen dem Quadrat der Ordinate rs und dem Rechteck $Mr.rN$ aus den Abschnitten stattfindet, welche ein äufserer Teilpunkt in der Strecke MN

bestimmt. Die Schnittcurve ist in diesem Falle eine *Hyperbel* aus den beiden Ästen NsS und $Ms'S'$.

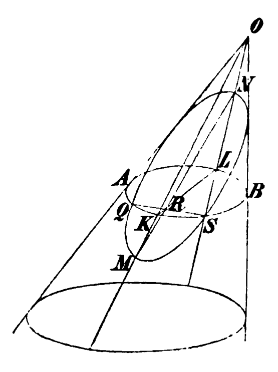
Wenn drittens die Gerade MN zu einer der Seiten parallel ist, so ist, wegen $AR = ar$ und $RB : rb = RN : rN$, das mit dem Rechteck $ar . rb$ gleiche Quadrat der Ordinate rs zu der Abcisse rN in dem constanten Verhältnis $\overline{RS}^2 : RN$ oder $AR . RB : RN$. Demnach ist die Schnittcurve in diesem Falle eine *Parabel.*[171])



Man erkennt die Parabel deutlich als den Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel, wenn man die Schnittebene sich etwa um die zu OB senkrechte Scheiteltangente drehen läſst. Die Lagen der Schnittebene für Hyperbel, Parabel, Ellipse können dadurch characterisirt werden, daſs die parallele Ebene durch die Spitze des Kegels denselben in reellen oder zusammenfallenden oder imaginären Geraden als den Asymptotenparallelen schneidet. Dabei rückt die entsprechende Tangente im Falle der Parabel in unendliche Ferne.

B. Construirt man in der Ebene AOB ein zum Dreieck Nrb ähnliches Dreieck LNK derart, daſs die rb entsprechende Seite NK in NR und die N entsprechende Ecke L in OA fällt, so ist NK der Hauptparameter p des Kegelschnittes. Man erhält damit leicht die Gleichungsformen der drei Curven von § 206.

427. **Schnitte des schiefen Kreiskegels.** Die Ebene der Zeichnung sei durch die Spitze des Kegels O und den Mittelpunkt C des Basiskreises senkrecht zur Ebene desselben gelegt; QS sei die Schnittlinie der Schnittebene mit der Ebene des Kreises $AQSB$; LK der die Sehne QS halbirende Durchmesser und MN die Gerade, welche die durch ihn und die Kegelspitze gelegte Ebene mit der Schnittebene gemein hat.



Nun entwickelt sich der Beweis ganz wie vorher: das Quadrat der Ordinate RS ist dem Rechteck $LR . KR$

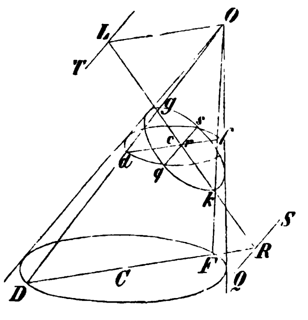
gleich, und wenn wir wieder eine zur Basis parallele Ebene einführen, so ist das Quadrat der ihr angehörigen Ordinate rs gleich dem entsprechenden Rechteck $lr \cdot rk$. Wir beweisen sodann aus den ähnlichen Dreiecken KRM, krM und LRN, lrN in der Ebene OLK, ebenso wie im Falle des geraden Kegels, dafs das Verhältnis der Quadrate $\overline{RS}^2 : \overline{rs}^2$ mit dem Verhältnis der Rechtecke identisch sei, welche aus den durch den Fufspunkt der Ordinate bestimmten Abschnitten von MN gebildet werden. Demnach ist die Schnittcurve ein Kegelschnitt, für welchen MN der die Sehne QS halbirende Durchmesser ist, nämlich speciell eine Ellipse, wenn MN die Geraden OL und OK auf derselben Seite der Kegelspitze schneidet; eine Hyperbel, wenn diese Schnittpunkte auf verschiedenen Seiten der Spitze liegen, und eine Parabel, wenn einer derselben unendlich fern ist.

Die in dem Beweise gemachte Voraussetzung, dafs der Basiskreis reelle Punkte mit der Schnittcurve gemein habe, ist in jedem Falle statthaft, weil jeder der Kreise, welche die der Basis parallelen Ebenen in der Kegelfläche bestimmen, als Basis betrachtet werden kann.

Aufser diesen gibt es aber *in jedem schiefen Kreiskegel eine zweite Serie von unter einander parallelen Kreisschnitten.* Denken wir uns nämlich eine Schnittebene um die Normale der Zeichnungsebene in C gedreht, so kommt sie in eine zweite Lage, in welcher das zwischen OA, OB enthaltene Segment $A'B'$ ihrer Spur dieselbe Länge AB annimmt. Der von ihr dann ausgeschnittene Kegelschnitt hat zwei gleich lange zu einander senkrechte Durchmesser, ist somit ein Kreis, ebenso sind alle parallelen Querschnitte Kreise.

428. *Wenn ein Kreisschnitt des Kegels von einer Ebene in der Geraden QS geschnitten wird, so begegnen der zu QS conjugirte Durchmesser in diesem Querschnitt und im Kreise sich mit QS in demselben Punkte.* Schneidet qs den Kreis reell, so ist der Satz evident und könnte auf den Fall ausgedehnt werden, wo QS nicht in reellen Punkten schneidet. Direct wird bewiesen, dafs der Durchmesser df, welcher die zu qs parallelen Sehnen eines beliebigen Kreisschnittes halbirt, sich

in einem Durchmesser DF projicirt, der die gleichgerichteten Sehnen eines parallelen Schnittes halbirt (§ 425). Der Ort der Mittelpunkte aller zu qs oder QS parallelen Sehnen ist die Ebene Odf; der zu QS in irgend einem Schnitte conjugirte Durchmesser ist daher die Schnittlinie der Ebene Odf mit der Ebene dieses Schnittes und geht durch den Punkt R, wo QS die Ebene Odf schneidet.



Wenn in demselben Falle die zu QS im Kreise und in einem andern Schnitte conjugirten Durchmesser in Segmente RD, RF; Rg, Rk geschnitten werden, so verhalten sich die Rechtecke $DR.RF$ und $gR.Rk$ wie die Quadrate des zu QS parallelen und des conjugirten Durchmessers des Schnittes. Wenn qs den Kreis schneidet, so ist offenbar $\overline{rs}^2 = dr \,.\, rf$. Für den allgemeinen Fall ist aber soeben bewiesen, dafs die Geraden gk, df, Df in einer die Spitze des Kegels enthaltenden Ebene liegen; daher sind die Punkte d, D Projectionen von g und liegen mit ihm in einer durch die Spitze gehenden Geraden. Wie in § 427 folgt daher aus ähnlichen Dreiecken

$$dr \,.\, rf : DR \,.\, RF = gr \,.\, rk : gR \,.\, Rk;$$

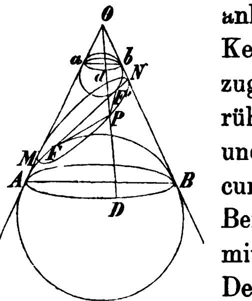
und weil $dr \,.\, rf$ zu $gr \,.\, rk$ sich verhält wie die Quadrate der parallelen Halbdurchmesser, so stehen auch $DR \,.\, RF$ und $gR \,.\, Rk$ in demselben Verhältnis. Dieser Satz gestattet, für den Schnitt $gskq$ und die Gerade QS das Product $DR.RF$ oder das Quadrat der durch R gehenden Tangente des Kreisschnittes zu bestimmen, dessen Ebene durch QS geht.

429. *Jeder Kegelschnitt kann in einen Kreis projicirt werden,* wie jede Kreisprojection ein Kegelschnitt ist. Analog zu § 425 können wir dafür auch sagen: *Jeder Kegel zweiten Grades ist ein Kreiskegel.* Wenn man durch die Spitze des Kegels parallel zur Ebene des Basiskreises eine Ebene legt, welche die Schnittebene in der Geraden TL schneidet, so folgt als ein specieller Fall des Vorigen, dafs $gL \,.\, Lk : \overline{OL}^2$ gleich dem Verhältnis der Quadrate der parallelen Durchmesser des Schnittes

ist. Somit ist es eine unbestimmte Aufgabe, zu einem gegebenen Kegelschnitt und einer Geraden TL seiner Ebene die Spitze O eines Kegels, der den ersteren zur Leitcurve hat, so zu bestimmen, dafs der von einer zu OTL parallelen Ebene in ihm bestimmte Schnitt ein Kreis sei. Denn wenn wir den zu der Geraden TL conjugirten Durchmesser der Schnittcurve ziehen, so ist die Entfernung OL des Punktes L von der Spitze des Kegels durch das Vorhergehende bestimmt; und OL ist in der Normalen aus O zu TL zu messen, weil OL dem zu TL normalen Durchmesser eines Kreises parallel sein mufs. Die Spitze O kann demnach in jedem Punkte eines gewissen um L in einer zu TL senkrechten Ebene beschriebenen Kreises genommen werden.

Ein Kegelschnitt kann immer in der Art in einen Kreis projicirt werden, dafs eine in seiner Ebene beliebig gewählte Gerade TL, welche ihn nicht schneidet, in unendlicher Entfernung projicirt wird. Man hat dazu die Spitze O des projicirenden Kegels nur auf dem oben bestimmten Kreise zu wählen, und irgend eine der zur Ebene OTL parallelen Ebenen als Projectionsebene zu nehmen. Statt dessen kann man auch sagen: *Jeden Kegelschnitt kann man so in einen Kreis projiciren, dafs dessen Centrum die Projection eines beliebigen Punktes im Innern der Curve ist.* Denn wir haben nur die Polare jenes Punktes in unendliche Entfernung zu projiciren.

430. **Brennpunkte und Directrixen** lassen sich sehr einfach an die Betrachtung der Querschnitte des geraden Kegels anknüpfen.[172]) Man kann in jeden geraden Kegel zwei Kugeln so einschreiben, dafs sie zugleich die Schnittebene berühren; die Berührungspunkte sind die Brennpunkte F, F', und jedem entspricht als Directrix der Schnittcurve die Gerade, in welcher die Ebene des Berührungskreises der zugehörigen Kugel mit dem Kegel die Schnittebene schneidet. Denn, wenn man einen beliebigen Punkt P der Schnittcurve mit der Spitze des Kegels durch eine Gerade verbindet und die Schnittpunkte derselben mit den Ebenen



der Berührungspunkte durch D, d bezeichnet, so hat man zwischen den Tangentenlängen der Kugeln die Relationen $PD = PF$, $Pd = PF'$, demnach für eine Ellipse $PF + PF' = Dd$, welche constante Länge mit der grofsen Axe MN der Schnittcurve übereinstimmt. Für den hyperbolischen Schnitt befindet sich offenbar in jeder Kegelöffnung eine Berührungskugel auf derselben Seite der Ebene. Der Punkt R, in welchem die Geraden FF' und AB bei genügender Verlängerung sich schneiden, ist ein Punkt der Polare des Brennpunktes F, weil die Polare von R in Bezug auf den Kreis AFB zugleich ihm in Bezug auf die Tangenten OA, OB harmonisch conjugirt ist.

Der Ort der Scheitel aller geraden Kreiskegel, aus welchen eine gegebene Ellipse (Hyperbel, Parabel) geschnitten werden kann, ist eine Hyperbel (Ellipse, Parabel) in einer zur Schnittebene normalen Ebene, welche die Brennpunkte der Ellipse (Hyperbel, Parabel) zu Scheiteln und ihre Scheitel zu Brennpunkten hat. Denn die Differenz von MO und NO ist constant als gleich $MF' - NF'$ *) etc.

B. 1) Der Parameter der Schnittcurve ist constant, so lange ihre Ebene den nämlichen Abstand von der Kegelspitze besitzt,

---

*) Mit Hilfe dieses Princips können Eigenschaften der am Brennpunkte eines Kegelschnittes gespannten Winkel aus den Eigenschaften von Kugelkreisen abgeleitet werden. Z. B. man weifs, dafs für einen festen Punkt P in der Kugeloberfläche und einen beliebigen festen Kreis auf der Kugel die Relation $\tan \frac{1}{2} AP \,.\, \tan \frac{1}{2} BP =$ const. besteht, wenn A und B die Schnittpunkte dieses Kreises mit einem durch den Punkt P gehenden gröfsten Kreise der Kugel bezeichnen.

Nehmen wir nun einen Kegel, dessen Basis der erstere Kreis und dessen Spitze das Centrum der Kugel ist, und denken ihn durch eine beliebige Ebene geschnitten, so erhalten wir den Satz: Wenn man durch einen Punkt p in der Ebene eines Kegelschnittes eine Gerade zieht, welche den letzteren in den Punkten a, b schneidet, so ist das Product der Tangenten von den Hälften der Winkel, welche ap, bp an der Spitze des Kegels spannen, constant. Da nun diese Eigenschaft für die Spitze jedes geraden Kegels gelten mufs, aus welchem der gedachte Kegelschnitt geschnitten werden kann, und da sein Brennpunkt ein Punkt in dem Orte dieser Spitzen ist, so erhält man für den Brennpunkt die Relation $\tan \frac{1}{2} afp \,.\, \tan \frac{1}{2} bfp =$ const.[178]) (Vgl. § 208, 7).

nämlich gleich dem vierfachen Product aus dem Abstand in die Tangente des halben Öffnungswinkels.

2) Man kann aus gegebenem Centrum jeden Punkt in der Ebene eines Kreises in einen Brennpunkt der Projection desselben projiciren.

431. **Continuitätsprincip.** *Kegelschnittbüschel können in Kreisbüschel projicirt werden,* zunächst alle solche, welche nicht lauter reelle Schnittpunkte haben. Denn, wenn wir einen der Kegelschnitte so in einen Kreis projiciren, dafs eine seiner idealen Schnittsehnen mit dem andern in unendlicher Entfernung projicirt wird (§ 429), so müssen die Projectionen der übrigen Kegelschnitte auch Kreise werden, weil sie mit dem ersten die unendlich fernen Punkte gemein haben. *Insbesondere können Doppelberührungsbüschel in Büschel concentrischer Kreise projicirt werden.* Ist die Berührung imaginär, so projicirt man sie so in Kreise, dafs die Berührungssehne in unendliche Entfernung fällt. (§ 275.)

Vermittelst solcher Projectionen gelangt man, sofern dieselben als reell vorausgesetzt werden, von jeder Eigenschaft eines Kreisbüschels zur entsprechenden Eigenschaft eines Kegelschnittbüschels, welches zwei imaginäre Grundpunkte hat. Nachdem aber die Centralprojection als mit der Centralcollineation identisch erkannt worden ist (§ 424), so überträgt sich die Allgemeinheit der analytischen Methode (§§ 98, 370) auf die Ergebnisse der Methode der Projectionen. Zwar haben wir nur reelle Substitutionen wirklich untersucht, aber alle algebraischen Operationen und Projectionen *müssen* eintreten, sobald einem einzigen reellen Elemente ein einziges imaginäres entspricht; sie *können* aber so beschaffen sein, dafs nur gewissen reellen Punkten wiederum reelle entsprechen.

So wie die analytischen Processe, durch welche die Eigenschaften der durch Gleichungen von der Form $S = kLM$ oder $S = kL^2$, etc. dargestellten Curven erkannt werden, ungeändert bleiben, ob man voraussetzt, dafs die Geraden $L = 0$, $M = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ in reellen oder imaginären Punkten schneiden, so ist es nach der erwähnten Identität gestattet, den durch Centralprojection gewonnenen Sätzen All-

gemeinheit zuzuschreiben. Denn Eigenschaften von Kegelschnittbüscheln mit einer idealen Schnittsehne können unmöglich durch allgemeine Gleichungen ausgedrückt werden, ohne dafs diese sie zugleich für Büschel mit reellen Grundpunkten beweisen. Dies zu übersehen ist mittelst der Algebra meist leichter, als mit den Mitteln der reinen Geometrie. *In der Unabhängigkeit der algebraischen Processe von der Unterscheidung zwischen reellen und complexen Gröfsen beruht die Berechtigung des Princips der Continuität, nach welchem Eigenschaften einer Figur, die bei der Realität gewisser in ihnen auftretender Elemente bewiesen sind, auf den Fall der Nichtrealität dieser Elemente ausgedehnt werden.*[174])

Es sind Beispiele für die Anwendung desselben, wenn man den Satz des § 236, 4 als eine allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte so ausspricht: Durch einen Punkt in der Peripherie eines Kegelschnittes und durch zwei beliebige Punkte seiner Ebene lassen sich immer drei Kegelschnitte legen, welche mit dem gegebenen eine Berührung zweiter Ordnung haben, und die Berührungspunkte liegen mit den drei angenommenen Punkten in einem Kegelschnitt; oder, wenn der Satz des § 121 zu dem Satze des § 279 erweitert wird (vgl. § 284); oder, wenn an Stelle eines mit einem Kegelschnitt verbundenen Punktes ein Kegelschnitt tritt, der mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist (vgl. § 207, 1; § 309); oder an Stelle der Brennpunkte eines Kegelschnittes ein confocaler Kegelschnitt (wie § 247 gegen § 201); oder, wenn wir die Erzeugung einer Curve dritter Ordnung aus zwei projectivischen involutorischen Büscheln mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl allgemein aussprechen, auf Grund von § 313, 9; etc. (Vgl. besonders auch die Kap. XIX und XX.)

432. **Kegelschnitts- und Kreiseigenschaften.** Wir geben nun Beispiele zu der Art und Weise, durch welche Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises oder aus andern speciellen Eigenschaften der Kegelschnitte centralprojectivisch abgeleitet werden.

B. 1) Jede durch einen festen Punkt gezogene Gerade wird von einem Kegelschnitt und von seiner in Bezug auf diesen ge-

nommenen Polare harmonisch geteilt; die Tangenten in den Schnittpunkten schneiden sich auf der Polaren.

Es reicht hin, zu bemerken, dafs diese Eigenschaft ebenso wie ihre Reciproke projectivische Eigenschaften sind, und dafs sie für den Kreis Gültigkeit haben; in Folge dessen sind sie notwendig für alle Kegelschnitte wahr. Alle Eigenschaften der Kreise, die von der Theorie der Pole und Polaren abhängen, gelten für Kegelschnitte überhaupt.

2) Die auf die Doppelverhältnisgleichheit bezüglichen Eigenschaften der Punkte und Tangenten eines Kegelschnittes sind projectivischer Natur; sie gelten für alle Kegelschnitte, wenn sie für den Kreis bewiesen sind. Alle Eigenschaften des Kreises, welche aus ihnen hervorgehen, sind gleichmäfsig für alle Kegelschnitte wahr. Die Sätze von *Pascal* und *Brianchon* beispielsweise brauchen nur für den Kreis bewiesen zu werden, um allgemein gültig zu sein; die Pascal'sche Linie wird in unendlicher Entfernung, der Brianchon'sche Punkt als Mittelpunkt des Kreises projicirt, in welchen man den gegebenen Kegelschnitt überführt. Beide Sätze nehmen eine so elementare Gestalt an, dafs sie des Beweises kaum noch bedürfen: Wenn in einem dem Kreise eingeschriebenen Sechseck zwei Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, so sind es auch die dritten; wenn in einem einem Kreise umgeschriebenen Sechsseit zwei Paare von Gegenecken in je einem Durchmesser liegen, so ist dies auch für das dritte Paar der Fall.

3) Der Satz von Carnot (§ 327) ist eine projectivische Eigenschaft und braucht nur für den Fall des Kreises bewiesen zu werden, in welchem er deshalb evident ist, weil $A_1B_2 . A_1B_2' = A_1B_3 . A_1B_3'$, etc. (Vgl. § 410.) Der Satz gilt ebenso und wird in derselben Art bewiesen für ein beliebiges Polygon.

4) Umgekehrt können aus diesem Carnot'schen Satze die Eigenschaften des § 162 leicht abgeleitet werden; denn, wenn wir den Punkt C in unendlicher Entfernung voraussetzen, so ist

$$A_1B_2 . A_1B_2' : A_1B_3 . A_1B_3' = A_2B_1 . A_2B_1' : A_2B_3 . A_2B_3',$$

unter der Voraussetzung, dafs die Gerade A_1B_2 zu A_2B_1 parallel ist.

5) In zwei concentrischen Kreisen wird jede Sehne des einen, welche den andern berührt, im Berührungspunkte halbirt. — In zwei Kegelschnitten, welche eine doppelte Berührung mit einander haben, wird jede Sehne des einen, welche den andern berührt, im Berührungspunkt und im Schnittpunkt mit der Berührungssehne harmonisch geteilt (§ 301,8). § 244,2 ist ein specieller Fall dieses Satzes.

6) Wenn drei concentrische Kreise gegeben sind, so wird jede Tangente des einen von den beiden andern in Punkten geschnitten, deren Doppelverhältnis constant ist. — Wenn drei Kegel-

schnitte einander in den nämlichen beiden Punkten berühren, so wird jede Tangente des einen von den andern beiden in vier Punkten geschnitten, deren Doppelverhältnis constant ist.

Der erste Satz ist wegen der Unveränderlichkeit der vier Segmente evident; der zweite kann als eine Erweiterung der projectivischen Teilung der Tangenten eines Kegelschnittes betrachtet werden. In derselben Weise können die Sätze des § 308 in Bezug auf Doppelverhältnisse in Kegelschnitten, welche sich doppelt berühren, unmittelbar bewiesen werden, indem man die Kegelschnitte als concentrische Kreise projicirt.

7) Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist und zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen, so soll man die Enveloppe der dritten Seite bestimmen. (§ 309, 4.)

Wenn wir die Verbindungsgerade der festen Punkte in unendliche Entfernung und zugleich den Kegelschnitt in einen Kreis projiciren, so verwandelt sich die Aufgabe in diese: Ein Dreieck ist einem Kreise eingeschrieben, und zwei seiner Seiten sind festen Geraden parallel; man soll die Enveloppe der dritten Seite bestimmen. Diese Enveloppe ist ein concentrischer Kreis, weil der Winkel an der Spitze des Dreiecks gegeben ist, und die Enveloppe ist demnach im allgemeinen Fall ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung in den beiden Punkten hat, welche in der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte liegen.

8) Die projectivischen Eigenschaften des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks zu untersuchen (vgl. § 422).

Nach den gegebenen allgemeinen Entwickelungen kann der Kegelschnitt in einen Kreis und zugleich das Viereck in ein Parallelogramm projicirt werden. Für ein in einen Kreis eingeschriebenes Parallelogramm ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Centrum des Kreises; demnach ist der Schnittpunkt der Diagonalen des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks der Pol der Geraden, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben verbindet. Für das dem Kreis eingeschriebene Parallelogramm liefern die in seinen Eckpunkten an den Kreis gelegten Tangenten ein Viereck, dessen Diagonalen sich auch im Mittelpunkte des Kreises schneiden, indem sie zugleich die von den Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks gebildeten Winkel halbiren; in Folge dessen gehen die Diagonalen des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen und des entsprechenden umgeschriebenen Vierecks durch denselben Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.

9) Wenn vier Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort seines Centrums ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen Vierecks hindurchgeht. — Wenn vier Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der

Ort des Pols einer festen Geraden ein Kegelschnitt, welcher zu den Endpunkten jeder Seite und dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit derselben in ihr den vierten harmonischen Punkt bestimmt.

10) Der Ort der Punkte, in welchen alle parallelen Sehnen eines Kreises in einem gegebenen Verhältnis geteilt werden, ist eine Ellipse, welche mit dem Kreise eine doppelte Berührung besitzt. (§ 172.) — Wenn man durch einen festen Punkt O eine Gerade zieht, welche mit einem festen Kegelschnitt die Punkte A, B gemein hat, und in ihr einen Punkt P so wählt, dafs das Doppelverhältnis der vier Punkte O, A, B, P unveränderlich ist, so ist der Ort des Punktes P ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

433. Mit Hilfe der allgemeinen Definition der Brennpunkte (§§ 195, 312) können Eigenschaften derselben projectivisch auf ihren allgemeinen Ausdruck gebracht werden. Hier ist aber stets eine imaginäre Projection oder, statt derselben, nach einer reellen Projection das Continuitätsprincip des § 431 in Anwendung zu bringen.

B. 1) Wenn ein Kreis zwei gegebene Kreise stets berührt, so ist der Ort seines Centrums ein Kegelschnitt, welcher die Centra der gegebenen Kreise zu Brennpunkten hat (§ 209). — Wenn ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte geht und zwei feste Kegelschnitte stets berührt, welche auch durch diese Punkte gehen, so ist der Ort des Pols der Verbindungsgeraden dieser Punkte ein Kegelschnitt, welcher dem Viereck eingeschrieben ist, das von den Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte mit den in Bezug auf die beiden gegebenen Kegelschnitte genommenen Polen ihrer Verbindungslinie gebildet wird.

Hier kommen gleichzeitig die folgenden verschiedenen Principien zur Anwendung: dafs alle Kreise durch zwei feste Punkte in unendlicher Entfernung gehen; dafs das Centrum der Pol ihrer Verbindungslinie ist; dafs der Brennpunkt als der Schnittpunkt der von ihnen ausgehenden Tangenten der Curve betrachtet werden mufs; und dafs wir zur Ausdehnung unserer Schlüsse von imaginären auf reelle Punkte berechtigt sind.

2) Wenn von einem Kegelschnitt ein Brennpunkt und zwei Punkte der Peripherie gegeben sind, so liegt der Schnittpunkt der in diesen Punkten an ihn gezogenen Tangenten in einer festen Geraden (§ 204). — Wenn zwei Tangenten und zwei Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so liegt der Schnittpunkt der in diesen Punkten an ihn zu ziehenden Tangenten in einer festen Geraden.

3) Wenn ein Brennpunkt und zwei Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort seines andern Brennpunktes eine Gerade. (Nach § 202.) — Wenn vier Tangenten und je ein fester Punkt in zweien derselben gegeben sind, so ist der Ort des Schnittpunktes der von diesen an den Kegelschnitt zu legenden Tangenten eine Gerade.

Denn die zwei unendlich fernen Punkte eines Kreises liegen jeder in einer der vom ersten Brennpunkt ausgehenden Tangenten, und die von ihnen ausgehenden beiden andern Tangenten des Kegelschnittes schneiden sich im andern Brennpunkte.

4) Wenn drei Tangenten einer Parabel gegeben sind, so geht der ihrem Dreieck umgeschriebene Kreis durch den Brennpunkt derselben. (§ 228.) — Zwei einem und demselben Kegelschnitt umgeschriebene Dreiecke haben ihre sechs Ecken auf einem und demselben Kegelschnitt.

Denn der Brennpunkt bildet mit den absoluten Richtungen ein zweites der Parabel umgeschriebenes Dreieck.

5) Der Ort des Centrums für einen Kreis, welcher durch einen festen Punkt geht und eine feste Gerade berührt, ist eine Parabel, welche den festen Punkt zum Brennpunkt hat. — Wenn eine Tangente und drei Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort des Schnittpunktes der Tangenten in irgend zweien dieser Punkte ein Kegelschnitt, welcher dem von ihnen gebildeten Dreieck eingeschrieben ist.

6) Wenn vier Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort seines Centrums die Gerade, welche die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks verbindet. — Wenn vier Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort des Pols einer Geraden die Verbindungsgerade der Punkte, welche mit den Schnittpunkten der ersteren in den Diagonalen diese selbst harmonisch teilen.

7) Aus unserer Definition der Brennpunkte ergibt sich, dafs der gemeinschaftliche Brennpunkt zweier Kegelschnitte als der Schnittpunkt gemeinschaftlicher Tangenten derselben angesehen werden mufs und demnach die im § 279 entwickelten Eigenschaften eines solchen besitzt. Wenn zwei Kegelschnitte einen Brennpunkt und die zugehörige Directrix gemeinschaftlich haben, so müssen sie als solche Kegelschnitte betrachtet werden, die eine doppelte Berührung mit einander haben, und können daher als concentrische Kreise projicirt werden.

8) Auch über die Beziehungen zweier Kegelschnitte führt die Methode der Projection mit grofser Leichtigkeit zu einer Fülle von Sätzen allgemeiner Natur. Wir projiciren beide Kegelschnitte so, dafs eine Seite ihres gemeinsamen Polardreiecks im Bilde

unendlich fern ist, beide also concentrisch werden. Sie haben dann im allgemeinen ein reelles gemeinschaftliches Paar conjugirter Durchmesser — nur dann nicht, wenn sie Hyperbeln sind, deren Asymptotenpaare sich trennen (§ 300, 3) — und vier reelle gemeinsame Punkte oder Tangenten, wenn sie *einen* solchen Punkt oder *eine* solche Tangente haben. Wir nehmen an, daſs dies der Fall sei, und nennen a, b, c, d die gemeinsamen Tangenten mit den Berührungspunkten A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; D_1, D_2 bez. am ersten und zweiten Kegelschnitt; ferner E, F, G, H die gemeinsamen Punkte, und e_1, e_2; f_1, f_2; g_1, g_2; h_1, h_2 die in ihnen an den ersten und zweiten Kegelschnitt gehenden Tangenten. Alle erwähnten Punkte liegen in Paaren auf einerlei Durchmesser A_1C_1, EG, A_2C_2, B_2D_2, FH, B_1D_1 und in Parallelen zu den gemeinsamen conjugirten Durchmessern A_2B_2, EF, A_1B_1, C_1D_1, GH, C_2D_2; A_1D_1, EH, A_2D_2, B_2C_2, FG, B_1C_1; die Geraden sind in Paaren parallel a_1, c_1; b_1, d_1; e_1, g_1; etc. oder sie schneiden sich in jenen Durchmessern. (§ 371, 10.) Nach diesen Relationen sind die Sätze des § 369 von den Kegelschnitten F und Φ evident, zugleich aber noch eine Menge anderer.

Die vier gemeinschaftlichen Punkte liegen mit jedem Gegeneckenpaar des umgeschriebenen Vierseits in einem Kegelschnitt; z. B. E, F, G, H, a_1b_1, c_1d_1. Die Geraden A_1E, B_1F, C_1G, D_1H berühren einen Kegelschnitt in A_1, B_1, C_1, D_1 bez. Die Punkte A_1, B_1, A_2, B_2, E, F und C_1, D_1, C_2, D_2, E, F liegen je in einem Kegelschnitt, und diese berühren sich in E und F. Das erstere geschieht zwölfmal in der Figur, nämlich folgender Tabelle entsprechend, nach deren erster Gruppe auſser den vorangeführten auch $A_1B_1A_2B_2GH$, $C_1D_1C_2D_2GH$ doppelt berührende Kegelschnitte sind:

$$\left|\begin{array}{c|c} A_1B_1A_2B_2 & EF \\ C_1D_1\,C_2D_2 & GH \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{c|c} A_1C_1A_2C_2 & EG \\ B_1D_1\,B_2D_2 & FH \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{c|c} A_1D_1A_2D_2 & EH \\ B_1C_1B_2C_2 & FG \end{array}\right|.$$

Die dualistisch entsprechenden Sätze bildet man leicht.[175])

434. **Metrik der Projection.** Strecken und Winkel, welche in der gegebenen Figur constant sind, sind es in einer Centralprojection derselben im allgemeinen nicht. Es sind daher die Gesetze speciell zu untersuchen, nach welchen metrische Eigenschaften generalisirt werden können. Nach § 424 muſs erwartet werden, daſs dieselben mit den Ergebnissen der Theorie der Distanz in § 383 f. zusammenfallen.

Zunächst ist die Projection einer Strecke mit ihrem Halbirungspunkt eine Strecke, welche durch die Projection desselben und den Fluchtpunkt der Geraden harmonisch geteilt

wird. Hiernach kann man im Bilde eine Scala construiren. Ferner bilden die Richtungen von zwei zu einander rechtwinkligen Geraden mit den imaginären absoluten Richtungen ein harmonisches Büschel. Wenn also vier harmonische Punkte A, B, C, D einer Geraden durch eine reelle oder imaginäre Projection so projicirt werden, dafs die Punkte A und C, die wir als reell oder als imaginär denken dürfen, mit den zwei imaginären unendlich fernen Kreispunkten zusammenfallen, so projiciren sich gleichzeitig beliebige durch die Punkte B und D gehende Gerade als die Schenkel eines rechten Winkels. Und umgekehrt: *Wenn zwei Gerade zu einander rechtwinklig sind, so werden sie als Gerade projicirt, welche die Verbindungslinie der beiden festen Punkte harmonisch teilen, die als die Projectionen der absoluten Richtungen erscheinen.*

Die Projection eines Linienpaares mit seinen Winkelhalbirenden ist daher ein Linienpaar und das harmonische Paar, welches dasselbe mit den Projectionen der Strahlen der absoluten Richtungen gemeinsam hat. Hiernach kann in der Projection eine Winkelscala construirt werden. *Nehmen wir die Projectionen der unendlich fernen imaginären Kreispunkte als die absoluten Elemente der Metrik, nach welcher wir die projicirten Gebilde messen, so übertragen sich alle metrischen Gröfsen unverändert, nicht aber im allgemeinen, wenn wir dieselbe Messung in Original und Bild anwenden.* Man erhält durch Projection nicht die allgemeinste Metrik, sondern nur die der parabolischen Geometrie (§ 394).

B. 1) Die Tangente eines Kreises ist rechtwinklig zum Radius des Berührungspunktes. — Jede Sehne eines Kegelschnittes wird durch eine Tangente desselben und durch die Verbindungsgerade ihres Berührungspunktes mit dem Pol der gegebenen Sehne harmonisch geteilt. (§ 157.)

Denn sobald wir die Sehne des Kegelschnittes als in die unendlich ferne Gerade der Ebene eines Kreises projicirt voraussetzen, so erscheinen die Punkte, in welchen dieselbe den Kegelschnitt schneidet, als die absoluten Richtungen und der Pol der Sehne als das Centrum des Kreises.

2) Jede durch den Brennpunkt eines Kegelschnittes gehende Gerade ist rechtwinklig zu der Verbindungsgeraden ihres Pols mit dem Brennpunkte. (§ 204.) — Jede Gerade durch einen festen

Punkt bildet mit den beiden von ihm ausgehenden Tangenten eines Kegelschnittes und der Verbindungslinie desselben mit ihrem eigenen Pol in Bezug auf diesen ein harmonisches Büschel.

Denn die vom Brennpunkt ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes sind die Verbindungsgeraden des Brennpunktes mit den absoluten Richtungen.

3) Nach § 433, 6) können wir den Ort des Pols einer Geraden in Bezug auf ein System confocaler Kegelschnitte bestimmen; denn die Brennpunkte bestimmen, heifst ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Viereck angeben, welches die Verbindungsgerade der Brennpunkte zu einer Diagonale hat. In Folge dessen ist der vierte harmonische Punkt zu dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit der zwischen den Brennpunkten enthaltenen Strecke ein Punkt des gesuchten Ortes. Die andere Diagonale ist die unendlich ferne Gerade, und ihre Endpunkte sind die absoluten Richtungen; demnach ist der gesuchte Ort zur gegebenen Geraden rechtwinklig und somit vollkommen bestimmt.

4) Zwei confocale Kegelschnitte schneiden einander unter rechten Winkeln. — Wenn zwei Kegelschnitte demselben Viereck eingeschrieben sind, so teilen die beiden in jedem ihrer Schnittpunkte zu ziehenden Tangenten derselben jede Diagonale des umgeschriebenen Vierseits harmonisch.

Wir bemerken, dafs der letztere Satz ein Fall von dem reciproken Satze zu § 301, 5) ist.

5) Der Ort des Schnittpunktes solcher Tangentenpaare eines Centralkegelschnittes, welche sich rechtwinklig schneiden, ist ein Kreis aus dem Centrum desselben. — Wenn man von zwei Punkten B, D, welche eine gegebene Strecke AC harmonisch teilen, Tangenten an einen Kegelschnitt construirt, so ist der Ort ihres Schnittpunktes ein durch die Punkte A, C gehender Kegelschnitt, in welchem diese Gerade denselben Pol hat wie in jenem.

Der Satz kann auch so ausgesprochen werden: Der Ort eines Punktes O, für welchen seine Verbindungsgerade mit dem Pol der festen Geraden AO durch den festen Punkt C geht, ist ein durch die Punkte A und C gehender Kegelschnitt. Alsdann ist seine Richtigkeit direct daraus ersichtlich, dafs wir das Doppelverhältnis des von vier beliebigen Lagen der Geraden CO gebildeten Büschels als mit dem des Büschels übereinstimmend erkennen, welches die vier entsprechenden Lagen von AO bilden. (§ 334, 1.)

6) Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten einer Parabel, die einander rechtwinklig schneiden, ist die Directrix. — Wenn in dem allgemeinen Satze 5) die Gerade AC den gegebenen Kegelschnitt berührt, wird der Ort des Punktes O die Gerade, welche

die Berührungspunkte der von A und C ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes verbindet.

7) Der Kreis, welcher einem in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel sich selbst conjugirten Dreieck umgeschrieben ist, geht durch das Centrum der Curve. (§ 179, 4.) — Wenn zwei Dreiecke in Bezug auf denselben Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einem Kegelschnitt. (§ 312, 2; § 361, 3.)

Die Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbel mit der unendlich fernen Geraden sind in Bezug auf die imaginären Kreispunkte derselben harmonisch conjugirt; das von ihnen mit dem Centrum gebildete Dreieck ist also ein Polardreieck der Curve. Durch Reciprocität ergibt sich, daſs die Seiten von zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt sich selbst conjugirten Dreiecken einen Kegelschnitt berühren.

8) Wenn durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes zwei Gerade rechtwinklig zu einander gezogen werden, so geht die Sehne, welche ihre Endpunkte in der Curve verbindet, stets durch einen festen Punkt. (§ 207.) — Wenn durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes ein harmonisches Büschel gelegt wird, in welchem zwei Strahlen unveränderlich sind, so geht die die Endpunkte der jedesmaligen beiden andern Strahlen verbindende Sehne stets durch einen festen Punkt.

Dasselbe Ergebnis lautet, anders ausgedrückt: Wenn zwei Punkte a, c eines Kegelschnittes gegeben sind, und $(abcd)$ eine harmonische Gruppe ist, so geht die Gerade bd stets durch einen festen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt der Tangenten des Kegelschnittes in a und c. Denn die Tangente des Kegelschnittes muſs im Punkte a die Gerade bd in dem vierten harmonischen Punkte zu dem Punkte K schneiden, welchen ac mit ihr gemein hat, weil $(a \,.\, abcd)$ ein harmonisches Büschel ist; und das nämliche gilt von der Tangente in c, so daſs diese Tangenten bd in demselben Punkte schneiden müssen. Als ein specieller Fall dieses Satzes erscheint der folgende: Wenn durch einen festen Punkt eines Kegelschnittes zwei Gerade so gezogen werden, daſs sie mit einer festen Geraden gleiche Winkel bilden, so geht die Sehne, welche ihre Endpunkte verbindet, durch einen festen Punkt.

435. Zwei Strahlen, welche einen constanten Winkel einschlieſsen, bilden mit den Strahlen absoluter Richtung aus ihrem Schnittpunkt ein constantes Doppelverhältnis (§ 387). Daher beschreiben die Projectionen der beiden Schenkel eines sich in seiner Ebene um einen Scheitel drehenden constanten Winkels projectivische Büschel, deren Doppelstrahlen nach

dem absoluten Punktepaar der Projection gehen. Dieses Absolute der Bildebene wird also auf der Fluchtlinie der Originalebene durch jede Projection einer Rechtwinkelinvolution definirt.

Umgekehrt kann jede Strahlinvolution, reell oder imaginär, in eine Rechtwinkelinvolution und gleichzeitig eine gegebene Gerade ihrer Ebene in unendliche Entfernung projicirt werden (§ 96). Man hat das Centrum auf einem gewissen Kreis zu wählen, der die Gerade als Mittelnormale hat (vgl. § 429). Es können überhaupt irgend zwei gegebene Winkel gleichzeitig in Winkel von gegebenen Gröſsen projicirt werden, denn die Strecke, welche jeder von ihnen auf der gegebenen Geraden, d. h. der Fluchtlinie r abschneidet, wird von allen Punkten einer gewissen, die Endpunkte der Strecke enthaltenden Kugel unter vorgeschriebenem Winkel gesehen; reelle Projectionscentra gibt es aber nur, wenn die Strecken in einander greifen.

Dieselbe Construction kann aber dazu dienen, *zwei gegebene concentrische Strahleninvolutionen, reell oder imaginär, gleichzeitig in symmetrische zu projiciren.* Denn, denken wir uns die beiden Paare der Doppelstrahlen bestimmt, so sind diese nur gleichzeitig in Rechtwinkelpaare zu projiciren. In den symmetrischen Involutionen sind die Strahlen absoluter Richtung einander zugeordnet (§ 96).

B. 1) Der in demselben Segment eines Kreises enthaltene Winkel ist constant. Dieser Satz ist, wie der gegenwärtige Artikel lehrt, die von der Doppelverhältnisgleichheit von vier Punkten eines Kreises angenommene Form für den Fall, wo zwei dieser Punkte in unendlicher Entfernung sind.

2) Die Enveloppe derjenigen Sehnen eines Kegelschnittes, welche einen constanten Winkel am Brennpunkt spannen, ist ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen Kegelschnitt den Brennpunkt und die Directrix gemein hat. (§ 313, 3.) — Wenn die von dem Punkte O gezogenen Tangenten mit dem Kegelschnitt die Punkte T, T' gemein haben, und zwei Punkte A und B in demselben so gewählt werden, daſs das Doppelverhältnis $(O\,.\,ATBT')$ constant ist, so ist die Enveloppe der Sehne AB ein Kegelschnitt, welcher den gegebenen in den Punkten T, T' berührt.

3) Der Ort des Schnittpunktes derjenigen Tangenten einer Parabel, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist eine Hyperbel, die mit der Parabel den Brennpunkt und die Directrix

gemein hat. — Wenn eine begrenzte Gerade AB, welche einen Kegelschnitt berührt, von zwei Tangenten desselben nach constantem Doppelverhältnis geteilt wird, so ist der Ort ihres Schnittpunktes ein Kegelschnitt, der den gegebenen in den Berührungspunkten der von A, B ausgehenden Tangenten berührt.

4) Wenn durch den Brennpunkt eines Kegelschnittes eine Linie gezogen wird, welche mit einer Tangente desselben einen gegebenen Winkel einschliefst, so ist der Ort des Punktes, in welchem sie dieselbe schneidet, ein Kreis. — Wenn eine veränderliche Tangente eines Kegelschnittes zwei feste Tangenten in T, T' und eine feste Gerade in M schneidet, und ein Punkt P in ihr so bestimmt wird, dafs das Doppelverhältnis $(PTMT')$ constant ist, so ist der Ort des Punktes P ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte geht, in denen die festen Tangenten die feste Gerade schneiden. (§ 304, 3.)

5) Ein Specialfall von 4) ist: Der Ort des Punktes, in welchem der von zwei festen Tangenten eines Kegelschnittes in einer veränderlichen Tangente desselben bestimmte Abschnitt in einem gegebenen Verhältnis geteilt wird, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den festen Tangenten parallel sind.

6) Wenn von einem festen Punkt O die Gerade gezogen wird, welche einen gegebenen Kreis im Punkte P schneidet, und an sie der constante Winkel TPO angetragen wird, so ist die Enveloppe des neuen Schenkels TP ein Kegelschnitt, welcher den Punkt O zum Brennpunkt hat. — Wenn das Doppelverhältnis eines Büschels, von welchem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist, und der Scheitel desselben sich auf einem durch zwei dieser Punkte gehenden gegebenen Kegelschnitt bewegt, so umhüllt der vierte Strahl desselben einen Kegelschnitt, welcher die Verbindungsgeraden dieser zwei Punkte mit dem dritten festen Punkt berührt.

7) Ein Specialfall von 6) ist: Wenn zwei feste Punkte A und B eines Kegelschnittes mit einem veränderlichen Punkte P desselben durch Gerade verbunden werden, und der von den Verbindungslinien in einer festen Geraden bestimmte Abschnitt in dem Punkte M in einem gegebenen Verhältnis geteilt wird, so ist die Enveloppe der Geraden PM ein Kegelschnitt, welcher die durch A und B gezogenen Parallelen zu der festen Geraden berührt.

8) Wenn man an die um den festen Punkt O sich drehende Gerade OP in ihrem Schnittpunkt P mit einer festen Geraden den constanten Winkel TPO anträgt, so ist die Enveloppe seines neuen Schenkels PT eine Parabel, welche den Punkt O zum Brennpunkt hat. — Wenn das Doppelverhältnis eines Büschels, von welchem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist,

und sein Scheitel sich längs einer festen Geraden bewegt, so ist die Enveloppe des vierten Strahles ein Kegelschnitt, der die drei Seiten des von den gegebenen Punkten gebildeten Dreiecks berührt.

9) Die von einem beliebigen Punkte zu einem System confocaler Kegelschnitte gezogenen Tangenten machen mit zwei festen Geraden gleiche Winkel. (§ 247.) — Die von einem beliebigen Punkte zu einem System von demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten gezogenen Tangenten schneiden jede Diagonale des Vierecks in einer Involution, welcher die Endpunkte der Diagonale als ein Paar conjugirter Punkte angehören. (§ 301.)

436. **Parallelprojection.** Wenn das Projectionscentrum in unendliche Entfernung rückt, so gehen die Strahlen des projicirenden Bündels in parallele Strahlen über, deren Richtung gegenüber der Bildebene angegeben werden mufs. Legt man durch alle Punkte der Begrenzung einer Figur Strahlen *einer* Richtung, so bilden sie einen projicirenden Cylinder und jeder Querschnitt desselben heifst eine *Parallelprojection* der Figur (§ 1).

Die gebräuchlichste Projectionsrichtung ist die zur Bildebene normale. Die Fufspunkte der von den Punkten der Begrenzung einer Figur gefällten Perpendikel bilden die *Orthogonalprojection* derselben. Die entsprechenden Figuren haben nicht nur unveränderten projectivischen Character, sondern auch gewisse metrische einfache Beziehungen.

Parallele Strahlen haben parallele Projectionen. Die gegebene Strecke und ihre Projection sind den Seiten eines Dreiecks gleich, dessen Winkel nur durch die Neigungen der Strecke und der Projectionsrichtung gegen die Bildebene bestimmt sind. *Parallele Strecken stehen zu ihren Parallelprojectionen in constantem Verhältnis.* Insbesondere ist die Orthogonalprojection einer Strecke das Product der Strecke in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Wie die in der Bildebene selbst liegenden Strecken nicht geändert werden, *so ist die Projection jeder zur Bildebene parallelen Strecke ihr gleich.*

Der Flächeninhalt einer ebenen Originalfigur steht zu dem ihrer Parallelprojection in einem constanten Verhältnis. Setzen wir die Ordinaten der Figur und ihrer Projection rechtwinklig zur Schnittlinie ihrer Ebenen voraus, so setzen sich beide Flächen aus Parallelstreifen von je gleicher Breite zusammen,

deren Höhen in einem constanten Verhältnis stehen, das nur von den Neigungen der Ebene und der Projectionsrichtung abhängt. Nach der Methode des XIII. Kapitels (§ 254) folgt die gleiche Proportionalität der ganzen Flächen. Die Fläche der Orthogonalprojection ist gleich der Originalfläche, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels der Ebenen.

Bringt man die ebenen Figuren durch Drehung der einen um die Schnittlinie ihrer Ebenen in dieselbe Ebene (§ 424), so erhält man den speciellen Fall der centrischen Lage collinearer Systeme, bei welchem das Collineationscentrum unendlich fern ist. Wir haben sie in § 100 als *Affinität* bezeichnet. Die Affinität zwischen der Umlegung des Originals und der Orthogonalprojection wird man selbst orthogonal nennen, weil die Affinitätsrichtung zur Collineationsaxe normal ist.

Diese Affinität geht in schiefe bez. orthogonale *Symmetrie* zur Axe über, wenn die Richtung der projicirenden Strahlen der Halbirungsebene des Drehungswinkels zwischen beiden Ebenen angehört. Gehört die Richtung dagegen der Halbirungsebene des Nebenwinkels an, so wird die Affinitätsrichtung mit der Axenrichtung identisch, und man erhält *flächengleiche* Systeme (§ 100).

437. *Jede Ellipse kann orthogonal in einen Kreis projicirt werden.* Wir wählen die Projectionsebene so, dafs ihre Schnittlinie mit der Ebene der gegebenen Ellipse der kleinen Axe dieser letzteren parallel ist und zugleich so, dafs der Cosinus des von den beiden Ebenen eingeschlossenen Winkels dem Verhältnis $b : a$ der kleinen Axe zur grofsen Axe gleich ist. Alsdann bleiben alle zur kleinen Axe parallelen Sehnen der Ellipse unverändert in der Projection, während alle der grofsen Axe parallelen Sehnen in dem Verhältnis $b:a$ verkürzt werden; folglich wird die Projection ein Kreis vom Radius b. (§ 172.) Die rechtwinkligen Durchmesserpaare des Kreises liefern die conjugirten der Ellipse. (§ 183.) Dabei kann ein Brennpunkt an eine beliebige Stelle des Kreisinnern projicirt werden.

Da bei Parallelprojectionen keine im Endlichen gelegenen Geraden in die unendlich ferne projicirt werden, so sind alle Querschnitte eines Kreiscylinders Ellipsen (oder zwei Mantel-

linien etc.). *Durch Parallelprojection wird die Gattung des Kegelschnittes nicht geändert.* Auch entsprechen sich in Original und Bild die Mittelpunkte.

B. 1) Untersuchung des Ausdrucks in § 183, 7) für den Radius des Kreises, der einem in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck umgeschrieben ist.[176])

Bekanntlich gilt die Relation $2FR = l_1 l_2 l_3$, wenn R diesen Radius, $\frac{1}{2}F$ den Flächeninhalt des Dreiecks, $l_1 l_2 l_3$ die Seitenlängen desselben bezeichnen. Projiciren wir dann die Ellipse in einen Kreis vom Radius b, so gilt, weil dieser Kreis als der umgeschriebene Kreis des projicirten Dreiecks erscheint, die Relation $2F'b = l_1' l_2' l_3'$. Wenn wir nun die den Seiten dieses Dreiecks parallelen Halbmesser der Ellipse durch b', b'', b''' bezeichnen, so gelten die Proportionen $l_1' : l_1 = b : b'$, $l_2' : l_2 = b : b''$, $l_3' : l_3 = b : b'''$. Es steht ferner F' zum Inhalt des Kreises b, also πb^2, in demselben Verhältnis, wie F zum Inhalt der Ellipse von den Halbaxen a und b, also πab; demnach ist $F' : F = b : a$. Alles dies gibt die Relation

$$b : R = \frac{l_1' l_2' l_3'}{2F'} : \frac{l_1 l_2 l_3}{2F} = ab^2 : b' b'' b''', \quad \text{oder} \quad R = \frac{b' b'' b'''}{ab}.$$

2) Gute weitere Beispiele liefern die Probleme von der kleinsten einem Dreieck umgeschriebenen und der gröfsten ihm eingeschriebenen Ellipse, etc. Jene geht in den umgeschriebenen Kreis über für ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecktangenten zu den Gegenseiten parallel sind; und dies letztere gilt auch für die Projection.

3) Man schreibe einer Ellipse ein convexes n-Eck $P_1 P_2 P_3 \ldots$ ein, dessen Seiten am Brennpunkt F gleiche Winkel $P_1 F P_2 = P_2 F P_3 =$ etc. spannen, und projicire die Ellipse orthogonal in einen Kreis. Die Projection $P_1' P_2' P_3' \ldots$ des n-Ecks heifst *ein harmonisches Kreispolygon in Bezug auf den Punkt* F, d. h. ein solches, dessen Seiten ihren Abständen von dem festen Punkt F' proportional sind.

Denn ziehen wir in P_1, P_3 die Tangenten $P_1 T$, $P_3 T$ an die Ellipse, so ist $P_1' T' = P_3' T'$, also verhalten sich die Abstände der Seiten $P_1' P_2'$, $P_3' P_2'$ von T' wie $\sin T' P_1' P_2' : \sin T' P_3' P_2' = \sin P_1' P_3' P_2' : \sin P_3' P_1' P_2' = P_1' P_2' : P_3' P_2'$, aber auch wie die analogen Abstände von F', weil $F' P_2' T'$ ebenso wie $F P_2 T$ in einer Geraden liegen.

4) Jedem harmonischen Kreispolygon kann eine Ellipse eingeschrieben werden. Denn auf der in 3) benutzten Ellipse erzeugen die Schenkel eines sich um F drehenden constanten Winkels projectivische Reihen von Schnittpunkten $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $P_2 P_3 P_4 \ldots$.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, d. h. die Polygonseiten umhüllen einen doppeltberührenden Kegelschnitt (§ 309). Die Berührungspunkte liegen auf den Strahlen absoluter Richtung von F, also hat der Kegelschnitt mit dem ersten den Brennpunkt F und die Directrix gemeinsam.

438. **Orthogonalsystem im Bündel.** Auch die geometrische Verwandtschaft der Polarreciprocität läfst sich in fruchtbarer Weise mit dem Process der Projection durch geradlinige Strahlen aus einem Centrum O auf eine Ebene verbinden in dem speciellen Falle, wo die Directrix ein Kegelschnitt von der Gleichungsform $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, d. h. ein aus dem Anfangspunkte O der Coordinaten mit dem Radius i beschriebener Kreis. Es ist dies der wichtige Fall, wo die polarreciproken Gleichungen identisch sind, aber dualistisch interpretirt werden (§ 465). Die Gleichung der Polare des Punktes $x' | y'$ oder P ist $xx' + yy' + 1 = 0$; man construirt sie wie folgt: Man bildet aus dem Vector PO_1 des Pols und der Einheit z als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck $PO_1(O)$ und schneidet den erstern durch das im Endpunkt (O) der letzten auf seiner Hypotenuse $(O)P$ errichtete Perpendikel; die im Schnittpunkt P' auf dem Vector errichtete Normale p ist die Polare von P.

Dies Verfahren ist einer einfachen stereometrischen Veranschaulichung fähig. Denken wir uns das Dreieck $P(O)P'$ um PP' aufgerichtet, bis $O_1O = O_1(O)$ auf der Bildebene senkrecht ist, so ist die durch p und O gelegte Ebene normal zur Geraden OP. *Wird also in der Entfernung Eins vom Centrum der Reciprocität auf der Normale ihrer Ebene ein Projectionscentrum angenommen, so sind der Sehstrahl OP eines Pols und die projicirende Ebene Op seiner Polare normal zu einander.*[177])

Ordnet man nun *in einem Bündel O den Strahlen ihre Normalebenen als entsprechend* zu, so nennt man die Gesammtheit solcher Elementenpaare ein *Orthogonalsystem.* Interpretiren wir die Coordinaten $x | y | z$ aber im Bündel, so stellt $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ einen imaginären Kegel dar, in Bezug auf welchen der Strahl OP und die Ebene Op als polarconjugirte Elemente zusammengehören, wie der Punkt P und die Gerade p in Bezug auf den Querschnitt des Kegels mit der Bildebene.

Das Orthogonalsystem ist also eine Polarreciprocität mit dem Kegel als Directrix.

Endlich aber kann dieser Kegel auch als die aus O als Mittelpunkt beschriebene *Kugel vom Radius Null* bezeichnet werden. In der Tat liegt in jeder durch OO_1 gelegten Ebene ein Mantellinienpaar des Kegels, welches nach den absoluten Richtungen dieser Ebene geht, somit als ein Nullkreis gilt (§ 103); denn die Mantellinien schneiden auf den Schenkeln $O_1 O$, $P'P$ eines rechten Winkels Segmente von den Längen 1 und i ab. Durch Drehung dieser Querschnitte um OO_1 entsteht aber ein Kegel absoluter Richtungen oder eine Nullkugel.

B. 1) Jeder Kegel zweiten Grades kann definirt werden als *Directrix eines Polarsystems im Bündel.* Man hat in der Tat nur das ebene Polarsystem, welches einen seiner Querschnitte definirt, aus seinem Centrum zu projiciren. Zwei concentrische Kegel haben ein gemeinsames harmonisches Polartripel.

2) Ein Kegel zweiten Grades besitzt *drei zu einander rechtwinklige Axen.* Denn das ihn definirende Polarsystem hat mit dem Orthogonalsystem an seinem Scheitel ein harmonisches Polartripel gemeinsam, dessen Strahlen zu den entsprechenden Ebenen normal sind.

3) Das concentrische Orthogonalsystem ordnet einem Kegel zweiten Grades einen *normalen Kegel* zweiten Grades zu, dessen Mantellinien die Normalen der Tangentialebenen des ersten sind. Die Querschnitte beider Kegel sind polarreciproke Curven in Bezug auf den Fuſspunkt des vom Kegelscheitel auf die Ebene gefällten Perpendikels.

4) Die beiden Parallelebenen durch O zu den Kreisschnittebenen enthalten Rechtwinkelinvolutionen harmonischer Polaren in Bezug auf den Kegel. Das Orthogonalsystem ordnet ihnen zwei Strahlen mit Rechtwinkelinvolutionen harmonischer Polarebenen in Bezug auf den normalen Kegel zu.

5) In jedem Kegel zweiten Grades gibt es *zwei Focalstrahlen*, d. h. Strahlen, deren jeder einen Brennpunkt aller zu ihm normalen Querschnitte enthält. Denn sind die Strahlen die Träger von Rechtwinkelinvolutionen im Bündel, so haben ihre Fuſspunkte in Normalebenen dieselbe Eigenschaft (§ 195). Die Focalstrahlen sind die Normalen der Kreisschnittebenen des normalen Kegels.

439. **Methode der Kreisscheitel.** Da im Vorigen der Directrixkreis und das Projectionscentrum sich gegenseitig bestimmen, so kann man die zu Grunde liegende Betrachtungsweise dahin aussprechen, daſs überhaupt ein Kreis vom Mittelpunkt M und dem Radius r in der Ebene E durch zwei

Punkte S und S' im Raume dargestellt oder bestimmt werden kann, welche in den durch $\overline{MS}^2 = \overline{MS'}^2 = -r^2$ gegebenen Distanzen $MS = -MS'$ von M in der in M auf E errichteten Normale liegen. Sie sind offenbar für jeden reellen Kreis imaginär und für jeden imaginären reell und zwar sind sie als zu jedem Paar von Durchmesserendpunkten associirte Punkte zu characterisiren (§ 96). Daher wird man dieselben auch *die associirten Punkte* oder die *Scheitel des Kreises* nennen. *Also sind die Scheitel auch als die Mittelpunkte der Kugeln vom Radius Null anzusehen, von welchen der gegebene Kreis der Querschnitt ist.* Denn ist X ein Punkt des Kreises, so hat man $\overline{MX}^2 = -\overline{MS}^2$, und offenbar $\overline{SX}^2 = \overline{MX}^2 + \overline{MS}^2 = 0$, d. h. die Scheitel haben von jedem Punkte des Kreises den Abstand Null.

Die Beziehungen von Kreisen in der Ebene lassen sich nun an den räumlichen Beziehungen zwischen ihren Scheiteln studiren. Der Hauptsatz dieses Übertragungsprincips lautet: *Die Entfernungen zwischen den Scheiteln zweier Kreise sind gleich den Längen ihrer gemeinsamen Tangenten.* Bezeichnen wir die auf der einen Seite der Ebene gelegenen Scheitel von Kreisen (S_i) mit S_i, ihre symmetrischen mit S_i', so ist $\overline{S_1S_2}$ oder $\overline{S_1'S_2'}$ gleich den innern, $\overline{S_1S_2'}$ oder $\overline{S_1'S_2}$ gleich den äufsern Tangenten von (S_1) und (S_2). Denn ihre Quadrate sind gleich dem Quadrat der Centraldistanz c, vermehrt um das Quadrat der Differenz bez. Summe der Normalen der Scheitel oder auch vermindert um das Quadrat der Differenz bez. Summe der Kreisradien (§ 129).

B. Das *Apollonische Problem* (§ 133).

Setzen wir zuerst die Mittelpunktscoordinaten und Radien der drei gegebenen Kreise S_1, S_2, S_3 des Problems gleich $\alpha_k | \beta_k | i(z-\gamma_k)$ für z als eine Constante, so sind die Gleichungen derselben

$$(x-\alpha_k)^2 + (y-\beta_k)^2 + (z-\gamma_k)^2 = 0,$$

und der Apollonische Kreis (S) hat die Gleichung

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0,$$

wenn $\alpha | \beta | i(z-\gamma)$ seinen Mittelpunkt und Radius bestimmen. Die Bedingungen z. B. der inneren Berührung zwischen ihm und jenen sind

$$(\alpha-\alpha_k)^2 + (\beta-\beta_k)^2 + (\gamma-\gamma_k)^2 = 0,$$

denn diese Gleichungen sagen aus, dafs die Längen der äufsern gemeinsamen Tangenten zwischen ihm und jenen Null sind.

Zur Elimination der α, β, γ zwischen den drei Bedingungen und der Gleichung des Apollonischen Kreises führt dann folgende Überlegung. Es ist $\overline{SS_1}^2 = 0$, wenn die inneren gemeinsamen Tangenten, und $\overline{SS_1'}^2 = 0$, wenn die äufseren gemeinsamen Tangenten der Kreise die Länge Null haben; jenes ist also die Bedingung der äufseren, dieses die Bedingung der inneren Berührung. Den Apollonischen Kreis suchen heifst daher nichts anderes als: diejenigen Kugeln vom Radius Null bestimmen, welche von jedem der drei gegebenen Kreise einen Scheitel enthalten.

Nun besteht aber zwischen den Distanzen von fünf Punkten im Raume eine Relation, welche sich von der in § 140, 1 für vier Punkte der Ebene gegebenen nur dadurch unterscheidet, dafs der Saum 1, $\overline{15}^2$, $\overline{25}^2$, $\overline{35}^2$, $\overline{45}^2$, 0 rechts und unten hinzutritt, also die Relation in B. 2 a. a. O.; wenn dann der fünfte der Punkte das Centrum einer durch die vier ersten gehenden Kugel vom Radius Null ist, so dafs $\overline{15}$, $\overline{25}$, $\overline{35}$, $\overline{45}$ sämmtlich Null sind, so kommt man zu der am Schlufs des B. 2 a. a. O. gefundenen Relation, welche die Beziehung zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten von vier Kreisen ausdrückt, die von demselben fünften Kreis berührt werden; hier also erscheint sie als eine Relation zwischen den gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten einer Kugel vom Radius Null. Die irrationale Form derselben

$$\overline{23} \,.\, \overline{14} + \overline{31} \,.\, \overline{24} + \overline{12} \,.\, \overline{34} = 0$$

führt wegen

$$\overline{23} = \sqrt{\{(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 + (\gamma_2 - \gamma_3)^2\}}, \text{ etc.};$$

$$\overline{14} = \sqrt{\{(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 + (z - \gamma_1)^2\}}, \text{ etc.},$$

wonach $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{12}$ die Längen der äufseren gemeinsamen Tangenten der bezeichneten Kreispaare sind, direct zu der Gleichung von *Casey* in § 140

$$\overline{23} \,.\, \sqrt{S_1} + \overline{31} \,.\, \sqrt{S_2} + \overline{12} \,.\, \sqrt{S_3} = 0,$$

welche zwei der Berührungskreise ausdrückt.

Der geometrische Sinn dieser Lösung ist, dafs die Querschnitte der Projectionsebene mit den beiden Nullkugeln (S) und (S'), welche durch die Scheitel S_1, S_2, S_3 oder durch S_1', S_2', S_3' bez. gehen, zwei der Apollonischen Kreise sind.

Und die Construction von *Gergonne* ergibt sich daraus in folgender Weise. Die Geraden S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1 schneiden die Ebene der drei Kreise in ihren äufseren Ähnlichkeitspunkten, die in der Schnittlinie derselben mit der Ebene der drei Scheitel $S_1S_2S_3$ als der bezüglichen Ähnlichkeitsaxe liegen. Die Gerade SS' schneidet

dieselbe Bildebene in einem von S_1, S_2, S_3 gleichweit entfernten Punkte, also in einem Punkte gleicher Tangentenlängen zu den gegebenen Kreisen oder im Radicalcentrum R derselben. Dafs die Punkte S, S' von jedem Punkte der vorerwähnten Ähnlichkeitsaxe gleichen Abstand haben, sagt weiter aus, dafs die Tangenten von den Punkten der Ähnlichkeitsaxe an die erhaltenen Apollonischen Kreise gleichlang sind, oder dafs sie die Radicalaxe derselben sein mufs.

Da endlich die Kreise S und S_1 sich berühren müssen, so haben die entsprechenden Kugeln vom Radius Null (S) und (S_1) in allen Punkten der Geraden SS_1 Berührung mit einander; somit liegen die Berührungspunkte des Kreises S_1 mit den beiden Apollonischen Kreisen S und S' in der Ebene $S_1SS'R$, welche auch die Normale zur Ebene $S_1S_2S_3$ im Punkte S_1 enthält. Daher ist ihre Schnittlinie mit der Bildebene die Gerade, die das Radicalcentrum R mit dem Pol der Ähnlichkeitsaxe in Bezug auf den Kreis Eins verbindet; denn jene Normale ist die Polare der Ähnlichkeitsaxe in Bezug auf die Nullkugel Eins.[178])

440. **Methode der räumlichen Repräsentation. Cyklographie.**[179]) Die vorige Methode ist sehr bequem, um die Kreislehre nach ihrer Anleitung analytisch zu entwickeln, aber sie ist infolge des Übergangs vom Reellen zum Imaginären nicht ebenso vorteilhaft für die geometrische Construction. Diese Schwierigkeit kann man nun leicht beseitigen, indem man das imaginäre Scheitelpaar des Kreises durch das reelle Stellvertreterpaar ersetzt (§ 17). Es kommt dies darauf hinaus, *als die repräsentirenden Punkte des Kreises die Spitzen der gleichseitigen, geraden Kegel zu betrachten, welche den Kreis zur Basis haben;* d. h. *jeden Kreis als Distanzkreis* zugehöriger Projectionscentra O nach § 424.

Denken wir in der Mittelnormale jedes Kreises den Radius ϱ als MS und MS' beiderseits abgetragen, so entspricht offenbar *eine gerade Reihe repräsentirender Punkte der Gesammtheit der einem Tangentenpaar eingeschriebenen Kreise.* Denn die Orthogonalprojectionen M von S erfüllen eine Gerade, die Centrale der Kreise, deren Radien MS den Abständen MA vom Schnittpunkt A der Geraden mit der Ebene proportional sind. Also ist A ein gemeinsamer Ähnlichkeitspunkt der Kreise. Punkte einer Ebene repräsentiren ebenso Kreise, welche die Spur der Ebene zu einer Ähnlichkeitsaxe haben (§ 131).

In jedem Kreisbüschel ist die Differenz der Quadrate des Radius und der Mittelpunktsentfernung vom Centralpunkt des Büschels constant. *Die repräsentirenden Punkte eines Kreisbüschels bilden also eine gleichseitige Hyperbel*, welche die Centrale des Büschels und die im Centralpunkt errichtete Normale der Ebene zu Axen hat (§ 179, 1). Die Grenzpunkte des Büschels sind die in der Centrale liegenden Scheitel der Hyperbel (§ 126).

Alle Kreise, welche einen gegebenen Kreis berühren, werden durch die Punkte des über jenem Kreise stehenden geraden gleichseitigen Kegels repräsentirt. Denn einer Mantellinie desselben entsprechen alle die Basis in ihrem Fufspunkt berührenden Kreise. Damit ist wieder ein Mittel zur constructiven Lösung des Apollonischen Problems gegeben; es führt nach der Methode der Projection[180]) direct auf die Construction des § 133.

Wie die Kreise nach diesem speciellen Process, *so können überhaupt die Kegelschnitte eines Systems dritter Stufe durch die Punkte oder Ebenen des Raumes nach bestimmten Gesetzen repräsentirt werden.* Denn der Raum ist ein dreidimensionales Gebilde, eine dreifache Mannigfaltigkeit von Punkten und Ebenen, wie das System dritter Stufe eine dreifache Mannigfaltigkeit von Curven enthält.

Insbesondere aber weist die Lehre von den linearen Verwandtschaften überall hinaus auf die räumliche Geometrie, weil erst da die organische Entwickelung aus Grundgebilden ihre vollständige Durchführung findet. *Der Wert der Projectionsmethode beruht vor allem in der geometrischen Anschaulichkeit, welche sie den analytischen Operationen zu substituiren erlaubt.* Als Hauptunterschied in der Handhabung der geometrischen und der analytischen Methode stellt sich aber klar der heraus, dafs das rein geometrische Verfahren meist einfacher zuerst zu einem speciellen Satze führt, dessen Verallgemeinerung die Projectionsmethode liefert, während die algebraische Rechnung den allgemeinen Satz in der Regel ebenso leicht wie den speciellen beweist, so dafs nach Aufstellung des ersteren nur zu specialisiren bleibt.

Alphabetisches Sachregister.

Die Zahlen sind Seitenzahlen; die gesperrt gedruckten Worte gelten immer auch für die durch — mit ihrem Satze verbundenen nachfolgenden Anführungen; die Autoren-Namen findet man in den Literatur-Noten. Für einige häufig wiederkehrende Worte sind oft Abkürzungen gebraucht, nämlich für Ellipse, Hyperbel, Kegelschnitt, Kreis, Parabel resp. E., H., Ke., Kr., P.; für Collineation, Construction, Coordinaten, Doppelverhältnis, Doppelpunkt etc., Involution resp. Coll., Constr., Coord., D. verh., D. p. etc., Inv.; für conjugirt, harmonisch, imaginär, projectivisch, perspectivisch resp. conj., harm., imag., proj., persp.

